

Метод на крайните елементи – 2

2018/2019 академична година, летен семестър

КОНСПЕКТ

1. Дефиниция за КЕ. Лагранжеви за крайни елементи.
Дайте точна дефиниция за КЕ. Дефинирайте линейни, квадратични и кубични Лагранжеви КЕ в 1D, както и линейни и квадратични триъгълни и билинейни четириъгълни Лагранжеви КЕ в 2D. За целта посочете степените на свобода за всеки от елементите и изведете функциите на формата (пресмятането на матрицата H^{-1} е необходимо да се направи само за 1D линейни и квадратични елементи).
2. Ермитови КЕ
Обосновайте необходимостта от използването на елементи с по-голяма регулярност за решаването на диференциални задачи от четвърти ред. Изведете МКЕ за 1D стационарна гранична задача от четвърти ред. Кои ГУ са главни и кои – естествени? Постройте МКЕ за 2D стационарна гранична задача от четвърти ред. Какви елементи могат да се използват в този случай?
3. Изопараметрични КЕ
Обяснете какво означава изопараметрични елементи. Мотивирайте използването на последните. Изведете общия вид на елементните матрици на коравина и маса, получени с използването на изопараметрична трансформация.
4. МКЕ за нелинейни задачи
Опишете накратко общата идея на итерационните методи за решаване на нелинейни алгебрични системи. Приведете метода на простата итерация, като формулирате и докажете достатъчното условие за сходимост. Изведете метода на Нютон. Постройте МКЕ за нелинейното уравнение на Поасон. Обяснете как решаването на стационарни задачи може да се сведе към решаването на нестационарни.
5. МКЕ за уравнения с доминиращ адвективен член
Изведете стандартен МКЕ за стационарното уравнение дифузия-адвекция. Обяснете защо този метод е неприложим при доминиращ адвективен член. Покажете как МНК може да се използва за стабилизация. Изведете априорна оценка на грешката при стабилизация на МКЕ с НМК.
6. Нарушения на вариационния принцип
Формулирайте и докажете двете лема на Strang, като обясните какви са нарушенията на вариационния принцип, които те изследват. Въведете понятието неконформни КЕ.
7. Апостериорни оценки на грешката. Адаптивен МКЕ.
Изведете апостериорна оценка на грешката за уравнението $-u''=f$ с хомогенни условия на Дирихле. Обяснете как последната може да се използва за построяването на МКЕ с адаптивен избор на мрежата.
8. МКЕ за уравнения на Stokes. Смесен МКЕ.
Изведете МКЕ за задачата на Stokes. Обяснете какво означава смесен МКЕ. Посочете примери за елементи, които удовлетворяват $\inf\text{-}\sup$ условието. Какво е предимството на работата с неконформните $P^1\text{-}P^0$ елементи?

9. МКЕ за уравнения на Navier-Stokes

Изведете формулировка на уравненията на Navier-Stokes за несвиваеми Нютонови флуиди в променливи вихър-функция на тока. Постройте МКЕ за последната. Постройте МКЕ за оригиналните уравнения, базиран на разделяне на оператора по времето. И за двата метода формулирайте алгоритъм за последователността на пресмятанията.