

I. Параметрична идентификация в математически модели

1. Формулировка на задачата за параметрична идентификация
Да се формулира най-общо задачата за параметрична идентификация. В частност, да се формулира общата (нелинейна) задача за най-малки квадрати. Въведете понятията целева функция и метод на спускане и обяснете идеята на последните.
2. Методи с линейно търсене
Да се опише общата идея на методите с линейно търсене. Да се опишат методите на най-бързото спускане, Нютон, Гаус-Нютон. Да се даде дефиниция за линейна, квадратична, суперлинейна сходимост. Да се обясни какви са предимствата и недостатъците на разгледаните методи.
3. Методи с търсене в доверителна област
Да се опише общата идея на методите с търсене в доверителна област. В частност да се изведе методът на Levenberg-Marquardt.
4. Параметрична идентификация в модели, описвани с диференциални уравнения
Да се опише накратко подходът за идентифицирането на параметри в модели, описвани с диференциални уравнения.

II. Качествен анализ на динамични системи

1. Основни понятия
Да се даде дефиниция за автономна система, фазово пространство, траектория, равновесна точка, периодична орбита, устойчивост по Ляпунов, асимптотична устойчивост. Да се приведат подходящи примери. Да се обясни какво се има предвид под „качествено изследване на динамична система“ и „асимптотика на решенията“.
2. Линейни автономни системи
Да се изведе общият вид на решенията на дадена линейна автономна система ОДУ. Да се обосноват и илюстрират графично основните възможни фазови портрети.
3. Изследване на локална устойчивост
Да се изведе линеаризацията на дадена автономна система ОДУ. Да се формулира теоремата на Hartman–Grobman. Да се приложи за изследване на съществуване и устойчивост на равновесните точки в модела на Monod в зависимост от параметрите.
4. Глобална асимптотика на решенията – основни понятия
Да се даде дефиниция за ω -гранична точка и ω -гранично множество. Да се даде дефиниция за инвариантно множество. Да се формулира твърдение за

основните свойства на ω -граничните множества. Да се докажат затвореността и инвариантността.

5. Теория на Poincare–Bendixson

Да се формулира теоремата на Poincare–Bendixson. Да се формулира и докаже критерият на Dulac. Да се въведат понятията устойчиво многообразие и неустойчиво многообразие на дадена равновесна точка. Да се формулира лемата на Butler–McGehee. Да се използва развитата теория, за да се установи глобалната устойчивост на граничното равновесие в модела на Monod, в случая когато не съществува вътрешна равновесна точка.

6. Теорема на Ляпунов. Принцип за инвариантността на LaSalle

Да се даде дефиниция за функция на Ляпунов и слаба функция на Ляпунов. Да се формулира и докаже теоремата на Ляпунов. Да се приведе пример за приложението ѝ при линейни системи. Да се формулира и докаже принципът на LaSalle. Да се използва така развитата теория, за да се установи глобалната устойчивост на граничната/вътрешната равновесна точка в модела на Monod, когато не съществува/съществува вътрешна равновесна точка.

III. Тензорно смятане и приложения

1. Тензори – основни понятия (стр. 15-17 от [1])

Да се въведе понятието тензор от втори ред. Да се дефинира тензорно произведение на два вектора. Да се дефинира равенство на тензори, транспониране на тензор, симетричен, антисиметричен, сингулярен тензор.

2. Реципрочни базиси (стр. 27-29 от [1])

Да се въведе конвенцията за сумиране на Айнщайн. Да се въведе понятието реципрочен базис и да се обясни защо възниква необходимостта от въвеждането на такъв. Да се покаже как може да се намери реципрочният на даден базис.

3. Базиси и координати на тензор от втори ред

Да се изведе представяне в Декартови координати на даден тензор от втори ред (стр. 17-19 от [1]). Четири набора от компоненти на тензор при въведени ковариантен и контравариантен базис (стр. 34 от [1]).

4. Втори закон на Нютон

Да се изведе общ вид на втория закон на Нютон в координатна форма в произволна координатна система. При извеждането да се мотивират и дефинират символите на Christoffel за съответната координатна система. Да се изведе формула за тяхното пресмятане. В частност, да се направят съответните пресмятания и да се приведе вторият закон на Нютон в полярни координати (стр. 48-52, 56 от [1]).

5. Ковариантна производна, материална производна

Да се покаже как възниква необходимостта от въвеждането на ковариантна производна и да се даде дефиниция (стр. 75-76 от [1]). Да се обясни разликата между Лагранжевата и Ойлеровата постановка на задача от механиката на непрекъснатите среди. Да се покаже как възниква необходимостта от въвеждането на материална производна и да се даде дефиниция (стр. 78-79 от [1]).

6. Уравнения на Navier–Stokes

Да се изведат общите уравнения на Navier–Stokes, отразяващи законите за запазване на линейния момент и масата. Да се докаже теоремата на Коши за напреженията. Да се въведе понятието тензор на напреженията на Коши. Да се обясни какъв е смисълът на Декартовите компоненти на тензора на напреженията. Да се изведат и приведат в координатна форма уравненията на Navier–Stokes в случая на несвиваеми Нютонови флуиди.

[1] J. Simmonds, A Brief on Tensor Analysis, Springer, 1982.