

Теоретични основи на индустриалната математика II,

изпит, юни 2019г.

Скала: 11 задачи всяка по 10 точки

Задача 1. Да се направи параметрична идентификация в модела

$$\frac{dx}{dt} = A \sin t + B \cos t$$
$$x(0) = x_0$$

като се използват следните данни

t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
x	1	1.2186	1.4684	1.7393	2.0207	2.3012

За нелинейната задача на НМК да се използва методът на Гаус-Нютон.

Задача 2. Да се изведе методът на Levenberg-Marquardt.

Задача 3. Да се даде дефиниция за ω -гранична точка и ω -гранично множество и да се обясни какво се има предвид под „изследване на асимптотиката“ на решенията.

Задача 4. Да се формулира теоремата на Poincaré–Bendixson.

Задача 5. Даден е ковариантен базис с Декартови координати

$$\mathbf{g}_1 = (1,1,1), \quad \mathbf{g}_2 = (1,1,2), \quad \mathbf{g}_3 = (1,2,5)$$

Да се намери реципрочен базис. Ако координатите на вектора $\mathbf{v}$ са $(1,1,1)^T$, да се пресметнат координатите му в контравариантния базис.

Задача 6. Изследвайте съществуването и устойчивостта на равновесните точки на системата, която моделира биореактор:

$$\frac{ds}{dt} = 1 - s - \frac{asx}{1 + s + s^2}$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{as}{1 + s + s^2} - d \right) x,$$

където a и d са положителни параметри.

Задача 7. Да се формулира и докаже теоремата на Ляпунов.

Задача 8. Изследвайте устойчивостта на началото на координатната система с теоремата на Ляпунов за системата

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x(x^2 + y^2) - xy^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -2y(x^2 + y^2) + x^2y^2\end{aligned}$$

Разгледайте функцията $V(x, y) = x^2 + y^2$.

Задача 9. Да се изведе общ вид на втория закон на Нютон в координатна форма в произволна координатна система. При извеждането да се мотивират и дефинират символите на Christoffel за съответната координатна система.

Задача 10. Да се покаже как възниква необходимостта от въвеждането на ковариантна производна и да се даде дефиниция.

Задача 11. Да се изведат общите уравнения на Navier-Stokes. Като се използва конститутивната релация

$$\sigma = -pI + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

да се запишат в Декартови координати уравненията на Navier-Stokes за несвиваеми Нютонови флуиди.