

6. Упражнения 3,4

Като се използва подходящ числен метод, да се намери приближено решение $u(x, t)$ на уравнението

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x \leq X,$$

при начално условие

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

и гранични условия:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(X, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Примери за $u_0(x)$ ($A, l \ll X$, дадени):

$$u_0(x) = A(1 - x/l) \text{ при } 0 \leq x \leq l, \quad u_0(x) = 0 \text{ при } l \leq x \leq X.$$

$$u_0(x) = A \cos(\pi x/(2l)) \text{ при } 0 \leq x \leq l, \quad u_0(x) = 0 \text{ при } l \leq x \leq X.$$

$$u_0(x) = A(1 - x^2/l^2) \text{ при } 0 \leq x \leq l, \quad u_0(x) = 0 \text{ при } l \leq x \leq X.$$

Дефинираме следното автомоделно представяне на решението $u(x, t)$:

$$(5) \quad \bar{f}(\xi, t) = \frac{u(x, t)}{u_{max}(t)}, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}, \quad t > 0.$$

Покажете графично, че има интервал (t_0, T_0) , $0 < t_0 < T_0 < T$, в който

$$\bar{f}(\xi, t) \approx \exp(-\xi^2)$$