

Упражнение No 1

Задача 1 (Закон на Галилей). Физичният закон

$$f(x, t, g) \equiv x - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

свързва разстоянието x и времето t при свободно падане на тяло в постоянно гравитационно поле g . Да се покаже, че той е независим от мерните единици.

Решение. Нека $\bar{x} = \lambda_1 x$, $\bar{t} = \lambda_2 t$. Тогава, тъй като $[g] = LT^{-2}$, получаваме $\bar{g} = \lambda_1 \lambda_2^{-2} g$. Следователно

$$f(\bar{x}, \bar{t}, \bar{g}) = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{g}\bar{t}^2 = \lambda_1 x - \frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2^{-2} g \lambda_2^2 t^2 = \lambda_1 (x - \frac{1}{2}gt^2).$$

Тогава очевидно

$$f(x, g, t) = 0 \iff f(\bar{x}, \bar{g}, \bar{t}) = 0$$

и даденият закон е независим от мерните единици.

Задача 2. Малка сфера с радиус r и плътност ρ пада със скорост v под действието на гравитацията g в течност с плътност ρ_l и вискозитет μ . Експериментално е установен следният закон:

$$f(v, r, \rho, g, \mu, \rho_l) \equiv v - \frac{2}{9}r^2 \rho g \mu^{-1} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho}\right) = 0.$$

Да се покаже, че законът е независим от мерните единици.

Решение. Първо, сменяме основните размерности L, T, M :

$$\bar{r} = \lambda_1 r, \quad \bar{t} = \lambda_2 t, \quad \bar{m} = \lambda_3 m$$

Имайки предвид, че размерността на μ е $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$, получаваме:

$$\bar{v} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v, \quad \bar{\rho} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1^3} \rho, \quad \bar{g} = \lambda_1 \lambda_2^{-2} g, \quad \bar{\mu} = \lambda_3 \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \mu, \quad \bar{\rho}_l = \frac{\lambda_3}{\lambda_1^3} \rho_l.$$

Тогава

$$\begin{aligned} f(\bar{v}, \bar{r}, \bar{\rho}, \bar{g}, \bar{\mu}, \bar{\rho}_l) &\equiv \bar{v} - \frac{2}{9} \bar{r}^2 \bar{\rho} g \bar{\mu}^{-1} \left(1 - \frac{\bar{\rho}_l}{\bar{\rho}} \right) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} v - \frac{2}{9} \left(\cancel{\lambda_1^2} r^2 \cancel{\lambda_3^3} \cancel{\rho} \cancel{\lambda_1^2} g \cancel{\lambda_1 \lambda_2} \frac{1}{\cancel{\lambda_3} \mu} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho} \right) \right) = \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f(v, r, \rho, g, \mu, \rho_l), \end{aligned}$$

с което твърдението е доказано.

Задача 3. Вж. примера за атомния взрив от лекцията

Задача 4. Вж. пример 2 от лекцията

Задача 5. Махало прави малки вибрации с период T_p , има дължина l и маса m . Ако предположим, че T_p зависи от l и от гравитацията g , да се покаже, че

$$T_p = C \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Решение. Търсим закон от вида

$$f(T_p, l, m, g) = 0.$$

Работейки в класа MLT , получаваме размерностната матрица:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} T_p & l & m & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} T \\ L \\ M \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Рангът на матрицата е 3 и следователно ще имаме една безразмерна величина. Ще я намерим, решавайки системата:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Полагаме $\alpha_1 = 1$ и получаваме $\alpha_4 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Тогава безразмерната величина е

$$\pi_1 = T_p \left(\frac{g}{l} \right)^{1/2}$$

и съществува закон от вида

$$g(\pi_1) = 0, \text{ т.е. } \pi_1 = \text{const},$$

еквивалентен на дадения, откъдето следва и исканото в условието на задачата.

Задача 6. Скоростта v на вълна в дълбока вода се определя от нейната дължина λ и гравитацията g . Каква зависимост между g , v и λ дава размерностният анализ?

Решение. Размерностната матрица е

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} v & \lambda & g \end{matrix} \\ \begin{matrix} L \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Отново имаме една безразмерна величина, като трябва да е изпълнено:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Полагаме $\alpha_1 = 1$. Следователно $\alpha_3 = \alpha_2 = -\frac{1}{2}$. Окончателно получаваме

$$\pi = v(\lambda g)^{-1/2} = \text{const} \implies v = C\sqrt{\lambda g}$$

Задача 7. По анализа на размерностите да се намери еквивалентен закон на

$$f(e, p, A) = 0, \text{ } e\text{—енергия, } p\text{—налягане, } A\text{—площ.}$$

Решение.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} e & p & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} M \\ L \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} & \end{matrix}$$

Рангът на A е $2 \implies 1$ безразмерна величина.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = 1 \implies \alpha_1 = -1, \alpha_3 = \frac{3}{2}.$$

$$\pi_1 = \frac{p}{e} A^{3/2} \implies \frac{p}{e} A^{3/2} = \text{const} \implies p = C e^{-3/2}$$