8. ЕДНОМЕРНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА
ПОЛУБЕЗКРАЙНИ ТЕЛА С ЕДНИ И СЪЩИ ТОПЛОФИЗИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ И РАЗЛИЧНИ НАЧАЛНИ ТЕМПЕРАТУРИ

8.1. Постановка на физическата задача и математически модел. При $t = 0$ две полубезкрайни едномерни тела с едни и същи топлофизични характеристики, но с различни постоянни температури, са поставени в контакт. Математическият модел, който описва разпределението $u(x,t)$ на температурата в двете тела, е

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ -\infty < x < \infty, t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u_0, & x > 0; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ll} u(-\infty,t) = 0 & t > 0, \\ u(+\infty,t) = u_0, & t > 0. \end{array} \tag{3}$$

В (2) без ограничение на общността е положено, че едната от началните температури е равна на нула.

8.2. Размерностен анализ. Предполагаме физически закон, който свързва размерните величини $t, x, u, u_0, \varkappa$. За основни размерности избираме T (време), L (дължина) и Θ (температура). Размерностната матрица A е

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} t & x & u & u_0 & \varkappa \end{array} \\ \begin{array}{c} T \\ L \\ \Theta \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{array} \end{array}$$

rank $A = 3$. $\Pi-$ теоремата гарантира съществуването на $5 - 3 = 2$ безразмерни величини π_1, π_2.

Системата за α_i, $i = 1, \ldots, 5$ е:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_5 & = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_5 & = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & = 0 \end{cases}$$

За да намерим π_1, полагаме

$$\alpha_3 = 1, \ \alpha_2 = 0;$$

тогава

$$\alpha_4 = -1, \ \alpha_5 = \alpha_1 = 0,$$

и

$$\pi_1 = \frac{u}{u_0}.$$

За да намерим π_2, полагаме

$$\alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 0;$$

тогава

$$\alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = \alpha_1 = -\frac{1}{2},$$

и

$$\pi_2 = \frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}.$$

Законът $\pi_1 = f(\pi_2)$ дава автомоделната форма на $u(x,t)$:

$$u(x,t) = u_0 f(\frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}) = u_0 f(\xi), \tag{4}$$

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}. \tag{5}$$

8.3. Задачата за $f(\xi)$ и нейното решение. Заместваме (4), (5) в уравнението (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\xi u_0}{2t} f', \qquad (f' = \frac{\partial f}{\partial \xi}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_0}{\sqrt{\varkappa t}} f', \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_0}{\varkappa t} f'',$$

и получаваме уравнението за $f(\xi)$:

$$f'' + \frac{\xi}{2} f' = 0, \qquad -\infty < \xi < \infty. \tag{6}$$

От (3) и (5) определяме граничните условия:

$$f(-\infty) = 0, \tag{7}$$

$$f(\infty) = 1. \tag{8}$$

За да решим *автомоделната задача* (6)-(8), интегрираме уравнението (6) и получаваме последователно:

$$\int \frac{f''}{f'} d\xi = -\int \frac{\xi}{2} d\xi, \qquad \ln f' = -\frac{\xi^2}{4} + \ln C_1,$$

$$f' = C_1 e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \qquad f(\xi) = C_1 \int_{C_2}^{\xi} e^{-\frac{z^2}{4}} dz;$$

От условието (7) намираме C_2:

$$f(-\infty) = C_1 \int_{C_2}^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} dz = 0,$$

следователно $C_2 = -\infty$. Тогава

$$f(\xi) = C_1 \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{z^2}{4}} dz.$$

Правим смяната:

$$\frac{z}{2} = s, \ dz = 2ds \ : \qquad f(\xi) = 2C_1 \int_{-\infty}^{\xi/2} e^{-s^2} ds.$$

От условието (8) намираме C_1:

$$f(\infty) = 2C_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = 1, \qquad C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

Автомоделната функция е

$$f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\xi/2} e^{-s^2} ds. \tag{9}$$

8.4. Явен вид на автомоделното решение. От (4) и (9) намираме явния вид на *автомоделното решение*:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-s^2} ds.$$

Правим смяната $z = -s, \ ds = -dz$:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{u_0}{2} \ erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)$$

и окончателно

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right) \tag{10}$$

По-горе сме използвали специалните функции:

функция на грешката

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt,$$

нейното допълнение

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$$

и свойствата им:

$$erfc(z) = 1 - erf(z), \quad erf(-z) = -erf(z).$$

8.5. Някои обобщения. Лесно е да се намерят явните автомоделни решения на контактните задачи при други начални условия:

$$1.\ u(x,0)=\begin{cases} 0, & x<\bar{x}, \\ u_0 & x>\bar{x} \end{cases} :\ u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[1+erf\left(\frac{x-\bar{x}}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right]$$

$$2.\ u(x,0)=\begin{cases} 0, & x<\bar{x}_1 \\ u_0 & \bar{x}_1<x<\bar{x}_2 \\ 0, & x>\bar{x}_2 \end{cases} :$$

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[erf\left(\frac{x-\bar{x}_1}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)-erf\left(\frac{x-\bar{x}_2}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)\right]$$

$$3.\ u(x,0)=\begin{cases} u_{01}, & x<0 \\ u_{02}, & x>0 \end{cases} :\ u(x,t)=\frac{u_{01}+u_{02}}{2}+\frac{u_{02}-u_{01}}{2}erf(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}})$$

9. ЕДНОМЕРНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА
ТЕЛА С РАЗЛИЧНИ ТОПЛОФИЗИЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ
И РАЗЛИЧНИ НАЧАЛНИ ТЕМПЕРАТУРИ

9.1. Постановка на физическата задача и математически модел. При $t=0$ две полубезкрайни едномерни тела с различни топлофизични характеристики и с различни постоянни температури (едната от които равна на нула), са поставени в контакт. За удобство ще дефинираме две различни неизвестни функции $u(x,t)$:

$$u_1(x,t),\ -\infty<x<0,\quad u_2(x,t),\ 0<x<\infty.$$

Математическият модел е начално-гранична задача за система уравнения

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\varkappa_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},\ -\infty<x<0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=\varkappa_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},\qquad 0<x<\infty, \tag{12}$$

с начални условия

$$u_1(x,0)=0,\ -\infty<x<\infty, \tag{13}$$

$$u_2(x,0)=u_0,\quad 0<x<\infty; \tag{14}$$

гранични условия

$$u_1(-\infty,t)=0,\quad t>0, \tag{15}$$

$$u_2(+\infty,t)=u_0,\ t>0, \tag{16}$$

условия за спрягане (идеален контакт между двете тела):

$$u_1(0,t)=u_2(0,t),\ t>0, \tag{17}$$

$$k_1\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t)=k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t),\ t>0. \tag{18}$$

9.2. Аналитично решение. Означаваме $\phi(z) = erf(z)$ и търсим $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ във вида:

$$u_1(x,t)=A_1+B_1\phi(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}})$$
$$u_2(x,t)=A_2+B_2\phi(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_2 t}})$$

От (15) получаваме:

$$0=u_1(-\infty,t)=A_1+B_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{-\infty}e^{-t^2}dt=$$

$$=A_1-B_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=A_1-B_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=A_1-B_1.$$

От (16):

$$u_0=u_2(+\infty,t)=A_2+B_2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=A_2+B_2$$

От (17):

$$u_1(0,t)=A_1=u_2(0,t)=A_2$$

От (18):

$$k_1\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=k_1B_1\phi'\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}\right)\Big|_{x=0}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}=$$

$$=k_1B_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}=k_1\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa_1 t}}B_1,$$

$$k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t)=k_2B_2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}=k_2B_2\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa_2 t}},$$

Така

$$\frac{k_1B_1}{\sqrt{\varkappa_1}}=\frac{k_2B_2}{\sqrt{\varkappa_2}},\quad \frac{B_1}{B_2}=\frac{\sqrt{k_2\rho_2c_2}}{\sqrt{k_1\rho_1c_1}}=\beta,$$

$$B_1=\beta B_2;$$
$$B_1+B_2=u_0$$

$$(1+\beta)B_2=u_0,\quad B_2=\frac{u_0}{1+\beta},\quad B_1=\frac{\beta u_0}{1+\beta},\quad A_1=A_2=B_1=\frac{\beta u_0}{1+\beta}.$$

Окончателно намираме:

$$u_1(x,t)=\frac{\beta u_0}{1+\beta}\left[1+erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_1 t}}\right)\right],$$

$$u_2(x,t)=\frac{u_0}{1+\beta}\left[\beta+erf\left(\frac{x}{2\sqrt{\varkappa_2 t}}\right)\right].$$