

6. ЛИНЕЙНА N -МЕРНА РАДИАЛНО-СИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ЗА МИГНОВЕН ТОЧКОВ ИЗТОЧНИК НА ТОПЛИНА

Задачата от *Пример 2* на Лекция 2. ще бъде разгледана тук в по-обща постановка. Като използваме математическата ѝ формулировка в N -мерния случай, ще намерим в явен вид нейното автомоделно решение.

6.1. Постановка на задачата. В момента от време $t = 0$ топлинна енергия e , концентрирана в точка от N -мерното пространство, е освободена и се разпространява в него, като остава постоянна. Средата е с нулева температура и се характеризира с постоянна топлопроводност k , специфична топлемност c и плътност ρ . Ако t е времето и r – радиалното разстояние от източника на топлинна енергия, искаме да определим температурата $u(r, t)$ на разстояние r в момента от време t . Да отбележим, че поради радиалната симетрия температурата на средата ще зависи само от радиалното разстояние от източника.

6.2. Математическият модел на така поставената задача е следният.

Да се намери функция $u(r, t)$, която удовлетворява уравнението

$$(1) \quad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} k \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad t > 0, \quad r > 0,$$

началното условие

$$(2) \quad u(r, 0) = 0, \quad r > 0,$$

условието за запазване на освободената енергия

$$(2') \quad c\rho\omega_N \int_0^\infty r^{N-1} u(r, t) dr = e, \quad \omega_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}, \quad t > 0,$$

условието за симетрия

$$(3) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(r^{N-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0,$$

или, ако търсим ограничени при $r = 0$ решения,

$$(3') \quad \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

и граничното условие

$$(4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} u(r, t) = 0, \quad t > 0.$$

Да отбележим, че в (2') сме използвали

$$\int_{R^N} f(x_1, x_2, \dots, x_N) dx = \omega_N \int_0^\infty r^{N-1} f(r) dr,$$

където ω_N е повърхнината на N -мерната единична сфера. Горната формула е валидна и за $N = 1, 2$. $\Gamma(z)$ е гама-функцията:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(n+1) = n!, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

6.3. Размерностен анализ. При размерностния анализ използваме същите размерни величини, както в *Пример 2* от Лекция 2.:

$$t, r, u, e, c_v, \kappa$$

и търсим физически закон от вида

$$g(t, r, u, e, c_v, \kappa) = 0.$$

Следваща стъпка е да определим основните размерности $L_1, \dots, L_n$, чрез които ще изразим шестте размерни величини. Подходящ избор са отново T (време), L (дължина), Θ (температура) и E (енергия). В N -мерния случай

$$[c_v] = E\Theta^{-1}L^{-N}.$$

Както беше казано, размерностите на двете страни на всяко уравнение с физически смисъл трябва да са едни и същи. Това дава

$$[k] = EL^{2-N}T^{-1}\Theta^{-1}$$

и

$$[\kappa] = \left[\frac{k}{c\rho} \right] = L^2T^{-1}.$$

Размерностната матрица A е

$$\begin{array}{c} L \\ T \\ \Theta \\ E \end{array} \begin{array}{cccccc} r & t & u & e & c_v & \kappa \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -N & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}.$$

Тук $m = 6$, $n = 4$, и рангът на A е равен на 4. Следователно от t, r, u, e, c_v, κ могат да се образуват $m - r = 2$ безразмерни величини.

Ще ги намерим от системата

$$\begin{cases} \alpha_1 - N\alpha_5 + 2\alpha_6 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_6 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_5 = 0 \\ \alpha_4 + \alpha_5 = 0 \end{cases}$$

Нека първо $\alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = 0$. Получаваме:

$$\alpha_5 = 1, \alpha_6 = N/2, \alpha_4 = -1, \alpha_2 = N/2, \\ \pi_1 = u(\kappa t)^{N/2} e^{-1} c_v.$$

Нека сега $\alpha_3 = 0$, $\alpha_1 = 1$. Това дава:

$$\alpha_5 = 0, \alpha_2 = \alpha_6 = -\frac{1}{2}, \alpha_4 = 0,$$

$$\pi_2 = (t\kappa)^{-\frac{1}{2}} r.$$

Pi теоремата гарантира, че има еквивалентен физически закон от вида

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0,$$

или

$$\pi_1 = f(\pi_2)$$

за някаква функция f . Следователно

$$(5) \quad u(r, t) = \frac{e}{c_v} (\kappa t)^{-\frac{N}{2}} f\left(\frac{r}{\sqrt{\kappa t}}\right) = \varphi(t) f(\xi),$$

$$\varphi(t) = \frac{e}{c_v} (\kappa t)^{-\frac{N}{2}}, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{\kappa t}}.$$

Това е автомоделната форма на решението $u(r, t)$; ξ е *автомоделна променлива*. Функцията $f(\xi)$ определя пространствено-временния профил на решението, функцията $\varphi(t)$ - амплитудата му. Функцията $f(\xi)$ се нарича *автомоделна функция*.

Да означим $Q = e/c_v$ и да намерим уравнението за функцията $f(\xi)$. За целта заместваме (5) в уравнението (1), записано във вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{N-1}{r} \kappa \frac{\partial u}{\partial r} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Имаме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Q \frac{N}{2} \kappa^{-\frac{N}{2}} t^{-\frac{N}{2}-1} f(\xi) - Q (t\kappa)^{-\frac{N}{2}} f'(\xi) \frac{r \cdot t^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{\kappa}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = Q (t\kappa)^{-\frac{N}{2}} f'(\xi) (t\kappa)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = Q (t\kappa)^{-\frac{N}{2}} f''(\xi) (t\kappa)^{-1}.$$

След някои пресмятания получаваме

$$f'' + \left(\frac{N-1}{\xi} + \frac{\xi}{2} \right) f' + \frac{N}{2} f = 0,$$

или, в друга форма:

$$(6) \quad \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} f')' + \frac{\xi}{2} f' + \frac{N}{2} f = 0$$

От (3), (4) и (5) извеждаме следните условия за $f(\xi)$:

$$(7) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} (\xi^{N-1} f') = 0,$$

$$(8) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 0, \quad t > 0.$$

Умножаваме уравнение (6) с ξ^{N-1} и го записваме във вида

$$(\xi^{N-1} f')' + \frac{1}{2} (\xi^N f)' = 0.$$

Интегрираме го и получаваме

$$(9) \quad \xi^{N-1} f' + \frac{1}{2} \xi^N f = C.$$

За да определим C , оставяме $\xi \rightarrow 0$ и използваме условието за симетрия

(7). Това дава $C = 0$.

Тогава (9) е еквивалентно на уравнението

$$f' + \frac{1}{2} \xi f = 0, \quad \xi > 0,$$

което може да бъде решено аналитично:

$$(10) \quad f(\xi) = C e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

За определяне на C използваме (2'):

$$Q = \omega_N \int_0^\infty (\kappa t)^{\frac{N-1}{2}} \xi^{N-1} \cdot \frac{Q}{(\kappa t)^{N/2}} f(\xi) \sqrt{\kappa t} d\xi,$$

$$\omega_N C \int_0^\infty \xi^{N-1} e^{-\frac{\xi^2}{4}} d\xi = 1.$$

Използваме известния интеграл

$$\int_0^\infty x^n e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{n+1}}$$

и получаваме

$$C = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Автомоделната функция е

$$(11) \quad f(\xi) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Така получихме точното автомоделно решение на задачата (1)-(5)

$$(12) \quad u_s(r, t) = \frac{Q}{(\varkappa t)^{N/2}} \cdot \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^N} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}.$$

Свойства на автомоделното решение (а.р.).

1. Автомоделното решение $u_s(r, t)$ описва **безкрайна скорост на разпространение на топлината**:

$$u_s(r, t) > 0 \text{ for } \forall t > 0.$$

2. Амплитудата на а.р. намалява с времето по закона:

$$u_{s, \max}(t) = u_s(0, t) = \frac{Q}{(4\pi\varkappa t)^{N/2}} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

и зависи от размерността на пространството N . (Защо?)

3. Да дефинираме понятието *полуширина r_{ef} на температурния профил $u(r, t)$* с равенството:

$$r_{ef} : u(r_{ef}, t) = \frac{1}{2} u(0, t), \text{ ако } u_{\max}(t) = u(0, t).$$

За автомоделното решение (12) това дава:

$$r_{ef} = 2\sqrt{\ln 2} \sqrt{\varkappa t} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty$$

и не зависи от N . Полуширината характеризира *ефективната дълбочина на проникване на топлината*.

4. Инварианти на процеса на разпространение на топлината:

$$u_{s, \max}(t) (4\pi\varkappa t)^{N/2} = Q = \frac{e}{c_v} = \text{const},$$

$$\frac{r_{ef}}{\sqrt{\varkappa t}} = \xi_{ef} = \text{const},$$

$$\frac{u_s(r, t)}{\varphi(t)} = f(\xi).$$

5. $\lim_{t \rightarrow 0+} u_s(0, t) = \infty$.

Следователно автомоделното решение съответства на начални данни:

$$u_s(x, 0) = Q\delta(x), \quad x \in R^N,$$

където $\delta(x)$ е делта-функцията на Дирак.

Асимптотична устойчивост на автомоделното решение.

Нека $u(r, t)$ е решение на задачата (1), (3), (4) при произволни начални данни $u_0(r)$ със зададена енергия e :

$$(13) \quad u(r, 0) = u_0(r), \quad \omega_N \int_0^\infty r^{N-1} u_0(r) dr = Q, \quad Q = e/c_v.$$

Ще дефинираме понятието автомоделно представяне на решението $u(r, t)$.

Дефиниция 1. Функцията $\bar{f}(\xi, t)$:

$$(14) \quad \bar{f}(\xi, t) = \frac{u(r, t)}{\varphi(t)} = \frac{u(\xi\sqrt{\kappa t}, t)}{\varphi(t)}, \quad \forall t > 0$$

се нарича *автомоделно представяне* на решението $u(r, t)$ на задачата (1), (13), (3), (4).

Дефиниция 2. Автомоделното решение (12) се нарича *асимптотично устойчиво*, ако съществува клас от начални данни $u(r, 0) = u_0(r)$ такива, че за автомоделните представяния $f(\xi, t)$ на съответните им решения е изпълнено:

$$(15) \quad \|\bar{f}(\xi, t) - f(\xi)\|_{C(R^N)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Ще докажем асимптотичната устойчивост на автомоделното решение (12) само в едномерния случай. При $N = 1$ автомоделното решение (12) е:

$$u_s(r, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi\kappa t}} e^{-\frac{r^2}{4\kappa t}},$$

За да докажем (15), ще използваме интеграла на Поасон за решението на задачата (1), (13), (3), (4) при $N = 1$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}} dy.$$

Заместваме го в (14) и получаваме последователно:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi, t) &= \frac{u(\xi\sqrt{\kappa t}, t)}{\varphi(t)} = \frac{\sqrt{\kappa t}}{Q} \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{(\sqrt{\kappa t}\xi - y)^2}{4\kappa t}} dy \\ &= \frac{1}{Q\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) e^{-\frac{\xi^2}{4}} e^{-\frac{-2\xi y\sqrt{\kappa t} + y^2}{4\kappa t}} dy \\ &= \frac{1}{Q\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{-\frac{y^2 - 2\sqrt{\kappa t}\xi y}{4\kappa t}} dy, \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{f}(\xi, t) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4}}}{2Q\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{y^2 - 2\sqrt{\kappa t}\xi y}{4\kappa t}} dy = \frac{1}{2Q\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} Q = f(\xi).$$

Следователно автомоделното решение (12) е асимптотично устойчиво при $N = 1$. Може да се докаже, че то е асимптотично устойчиво и при $N > 1$.

Да отбележим, че както автомоделното решение $u_s(r, t)$, така и интегралът на Поасон, са в сила при следните предположения:

- мигновен точков източник на топлина с енергия e ;
- топлината се разпространява в цялото пространство ($0 \leq r < \infty$).

Какъв е тогава смисълът на автомоделното решение, ако източникът на топлина е разпределен в някаква област $0 \leq r \leq R_0$, излъчената енергията e се разпространява в крайна област $0 \leq r \leq R$, $R_0 < R$ и на границата $r = R$ на областта е зададен някакъв граничен режим (например топлоизолирана граница, зададена температура или топлообмен с околната среда)? Ако $R_0 \ll R$, то има интервал от време (T_1, T_2) , $0 < T_1, T_2 < T$, когато процесът се развива по автомоделния закон (12). Това е интервалът от време, когато началните данни са вече забравени, но граничният режим не е започнал още да действа. В този интервал от време се реализира автомоделното решение. Затова се казва [1], че то представлява **междинна асимптотика на процеса**.

[1]. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л., Гидрометиздат, 1978.

Similarity, self-similarity and intermediate asymptotics. Consultants Bureau, New York, 1979.