

5. Обезразмеряване. Задача за снаряда

5.1. Постановка на задачата. В момента $t = 0$ на тяло с маса m , разположено на повърхността на земята с радиус R и маса M , е зададена вертикална скорост V . Да се определи височината h на тялото в момента от време t .

Силите, действащи на тялото, са земното привличане (гравитацията) и тези, породени от съпротивлението на въздуха. В първо приближение ще предполагаме, че последната сила е пренебрежимо малка.

5.2. Размерностен анализ. Размерните величини, от които зависи процесът, са t , h , R , V и g с размерности съответно $[t] = T$, $[h] = L$, $[R] = L$, $[V] = \alpha T^{-1}$, $[g] = LT^{-2}$. Търсим физичен закон от вида

$$f(t, h, R, V, g) = 0.$$

Избираме T и L за основни размерности. Тогава всяка безразмерна величина, която може да се образува от тях, ще има вида

$$\pi = t^{\alpha_1} h^{\alpha_2} R^{\alpha_3} V^{\alpha_4} g^{\alpha_5}.$$

За нейната размерност имаме

$$[\pi] = [t^{\alpha_1} h^{\alpha_2} R^{\alpha_3} V^{\alpha_4} g^{\alpha_5}] = T^{\alpha_1 - \alpha_4 - 2\alpha_5} L^{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5} = 1.$$

Показателите α_i се определят от условията

$$\begin{aligned}\alpha_1 - \alpha_4 - 2\alpha_5 &= 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= 0.\end{aligned}$$

Рангът на размерностната матрица е $\text{rank } A = 2$, следователно от петте размерни величини могат да се образуват $m - r = 5 - 2 = 3$ независими безразмерни величини. Избираме α_1 , α_2 и α_5 за свободни неизвестни. Получаваме

$$\begin{aligned}1) \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_5 = 0 &\rightarrow \alpha_4 = 1, \alpha_3 = -1 : \pi_1 = \frac{tV}{R}. \\ 2) \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_5 = 0 &\rightarrow \alpha_4 = 0, \alpha_3 = -1 : \pi_2 = \frac{h}{R}. \\ 3) \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_5 = 1 &\rightarrow \alpha_4 = -2, \alpha_3 = 1 : \pi_3 = \frac{Rg}{V^2}.\end{aligned}$$

Следователно законът $f(t, h, R, V, g) = 0$ е еквивалентен на

$$\pi_2 = f_1(\pi_1, \pi_3) : \frac{h}{R} = f_1\left(\frac{t}{R/V}, \frac{Rg}{V^2}\right).$$

От тук можем да определим времето $t_{\max}$, за което снаряда ще достигне максимална височина при зададена скорост V . За целта пресмятаме

$$\frac{1}{R} \frac{dh}{dt} = \frac{1}{R/V} \frac{\partial f_1}{\partial \pi_1} \left(\frac{t}{R/V}, \frac{Rg}{V^2} \right).$$

Времето $t_{\max}$ се определя от уравнението

$$\frac{\partial f_1}{\partial \pi_1} \left(\frac{t_{\max}}{R/V}, \frac{Rg}{V^2} \right) = 0,$$

следователно

$$\frac{t_{\max}}{R/V} = f_2 \left(\frac{Rg}{V^2} \right).$$

5.3. Математически модел. Използваме универсалния закон на Нютон за гравитацията: силата на привличане между две тела е пропорционална на произведението от масите им и обратно пропорционална на квадрата на разстоянието между тях, като масата на всяко тяло може да се разглежда като концентрирана в центъра му. Тъй като по II закон на Нютон $F = ma$, то

$$m \frac{d^2 h}{dt^2} = -G \frac{Mm}{(h+R)^2}, \quad G \text{ е константата в универсалния гравитационен закон.}$$

При $h = 0$ (т.е. върху повърхността на земята) гравитационната сила е равна на $-mg$, и следователно

$$-mg = -G \frac{Mm}{R^2}$$

От тук за земното ускорение получаваме $g = G \frac{M}{R^2}$ и определяме $G = \frac{R^2}{M} g$.

Следователно математическият модел е

$$\begin{cases} \frac{d^2 h}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(h+R)^2} \\ h(0) = 0, \quad \frac{dh}{dt}(0) = V. \end{cases}$$

5.4. Обезразмеряване. Нека $\bar{t} = \frac{t}{t_c}$, $\bar{h} = \frac{h}{h_c}$. Какво да изберем за t_c и h_c ?

Тук възможностите са повече, понеже разполагаме с константите R , V и g , и от тях може да образуваме различни комбинации с размерност T и L :

- за h_c - R и V^2/g ;
- за t_c - $\frac{R}{V}$, $\sqrt{\frac{R}{g}}$, $\frac{V}{g}$:

$$\left[\sqrt{\frac{R}{g}} \right] = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = T, \quad \left[\frac{V}{g} \right] = \frac{LT}{TL} = T.$$

Да разгледаме следните комбинации и съответните безразмерни задачи:

$$(1) \quad \bar{t} = \frac{t}{R/V}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R} \rightarrow \varepsilon \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{t}^2} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}, \quad \bar{h}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 1.$$

$$(2) \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{R/g}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{R} \rightarrow \frac{d^2 \bar{h}}{d\bar{t}^2} = -\frac{1}{(1+\bar{h})^2}, \quad \bar{h}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = \sqrt{\varepsilon}.$$

$$(3) \quad \bar{t} = \frac{t}{Vg^{-1}}, \quad \bar{h} = \frac{h}{V^2g^{-1}} \rightarrow \frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} = -\frac{1}{(1+\varepsilon\bar{h})^2}, \quad \bar{h}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 1,$$

където $\varepsilon = \frac{V^2}{gR}$, $[\varepsilon] = 1$.

Да допуснем че знаем, че $\varepsilon \ll 1$, т.е. V^2 е много по-малко от gR . Следователно можем да разглеждаме като първо приближение задачите, които се получават, като пренебрегнем членовете, пред които има ε .

Задачата (1) се трансформира в:

$$(1 + \bar{h})^{-2} = 0, \quad \bar{h}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 1.$$

Тя очевидно няма решение.

Задачата (2) се трансформира в:

$$\frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} = -\frac{1}{(1 + \bar{h})^2}, \quad \bar{h}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}}(0) = 0.$$

Тя няма физически смислено решение, понеже $\bar{h}(\bar{t})$ трябва да минава през $\bar{t} = 0$ с нулев наклон, и понеже $\frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} < 0$, то $\bar{h}(\bar{t}) < 0$. Излиза, че не можем да пренебрегнем членовете с ε , а това е резонна апроксимационна процедура в приложната математика. Лошото обезразмеряване води до това, че членовете, които изглеждат малки, може да не са малки в действителност – например $\varepsilon \ll 1$, но $\frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2}$ да е голямо, така че произведението им да не е пренебрежимо в сравнение с останалите членове на уравнението.

Ако обаче пренебрегнем члена εh в задача (3), то получаваме

$$\frac{d^2\bar{h}}{d\bar{t}^2} = -1, \quad \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}} = -\bar{t} + c_1, \quad \bar{h} = -\frac{\bar{t}^2}{2} + c_1\bar{t} + c_2$$

.

Началните условия дават:

$$\bar{h}(0) = c_2 = 0, \quad \left. \frac{d\bar{h}}{d\bar{t}} \right|_0 = \bar{t}'|_0 + c_1 = 1, \quad \bar{h} = -\frac{\bar{t}^2}{2} + \bar{t}.$$

Следователно само този начин на обезразмеряване е разумен.