

14. Решения от тип *бягаща вълна* на уравнението на преноса и на уравнението на Бюргерс.

1. Линеен хомогенно уравнение на преноса

В курса по Числени методи за диференциални уравнения се запознахме с линейното хомогенно уравнение на преноса:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

То моделира в първо приближение разпространението на частици във вещество, ако дължината на свободния пробег на частиците е значително по-голяма от размерите им. $u(x, t)$ е функцията на разпределение на частиците във веществото, а $c = \text{const}$ е скоростта им. Функцията $u(x, t)$, удовлетворяваща уравнението (1), е постоянна върху правите (характеристики):

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = c, \quad x - ct = \text{const}.$$

Действително, ако $u(x, t)$ е решение на (1), то производната му по направление на една права от семейството $x - ct = \text{const}$ е равна на 0 (проверете!) Това означава, че решението зависи от x и t само чрез комбинацията $x - ct$, следователно

$$(3) \quad u(x, t) = f(x - ct).$$

Формула (3) дефинира общото решение на линейното хомогенно уравнение (1). То има вида на “бягаща вълна”. Ако $c > 0$, вълната се движи надясно. Вида на решението подсказва как могат да се формулират пълните задачи за уравнението (1):

а) Задача на Коши:

$$(4) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Точното решение на задача (1),(4) е

$$(5) \quad u(x, t) = \varphi(x - ct).$$

б) Гранична задача:

$$(6) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ако са изпълнени условията за съгласуваност $\varphi(0) = \mu(0)$, непрекъснатото точно решение на задача (1),(6) е:

$$(7) \quad u(x, t) = \begin{cases} \varphi(x - ct), & t \leq x/c, \\ \mu(t - x/c), & t \geq x/c. \end{cases}$$

Решения от типа (5), (7) (решения от тип *бягаща вълна*) са специален клас автомоделни решения, при които пространството и времето са свързани в автомоделната променлива $\xi = x - ct$.

Както се вижда от формулите (5) и (7), зададените начални и гранични стойности се “пренасят” по характеристиките (2). Ако началните и граничните условия са непрекъснати, непрекъснато ще бъде и решението.

2. Квазилинейно хомогенно уравнение на преноса

Когато скоростта c на частиците зависи от разпределението им, $c = c(u)$, характеристиките са отново прави линии, но в този случай при непрекъснати и дори достатъчно гладки начални и гранични данни непрекъснатостта на решението може с течение на времето да се наруши и то може да престане да съществува. В общия случай на зависимост $c = c(u)$ проблемът е сложен. Тук с един конкретен пример и $c = c(u) = u$ ще илюстрираме какво може да се случи.

Ще разгледаме следната задача:

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$(9) \quad u(x, 0) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0, 1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

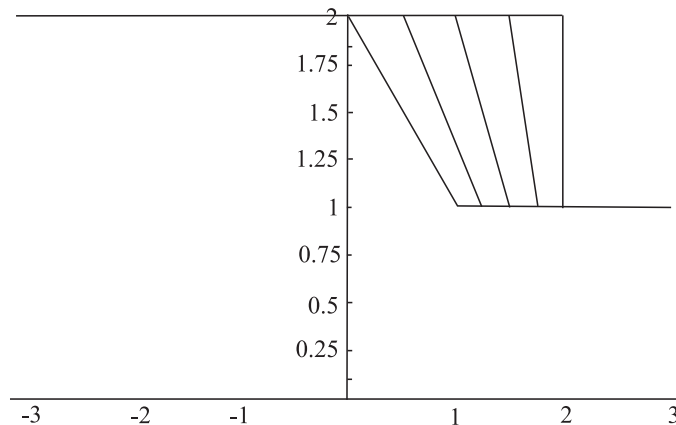
Тук получаваме три семейства от характеристики:

$$(10) \quad x(t) = \begin{cases} 2t + \xi, & \xi < 0, \\ (2 - \xi)t + \xi, & \xi \in [0, 1], \\ t + \xi, & \xi > 1. \end{cases}$$

Решението по характеристиките е константа, тогава фактът, че има характеристики, които се пресичат в точката $(x, t) = (2, 1)$, означава, че решението съществува само за $t < 1$ (за $t < 1$ няма пресичащи се характеристики). Решението е:

$$(11) \quad u(x, t) = \begin{cases} 2, & x < 2t, \\ \frac{2 - x}{1 - t}, & 2t \leq x \leq t + 1, \\ 1, & x > t + 1. \end{cases}$$

Графиките на решението за различни стойности на t са показани на Фиг. 1.



Фиг. 1. $u(x, t)$ за $t = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1.0$.

Вижда се, че при $t = 1$ вълната се “изправя” и в следващия момент би се “преобърнала”, но това не се описва от нашия модел. Решението, определено от непрекъснати начални данни при $t = 0$, престава да съществува при $t = 1$. Това е ефектът от нелинейността на уравнението. Казва се, че членът uu_x има “шок” ефект.

3. Уравнение на Бюргерс

Ще търсим решение от тип “бягаща вълна” и за уравнението на Бюргерс

$$(12) \quad u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \quad \nu > 0.$$

Тук освен члена uu_x има и дифузионен член, νu_{xx} . Търсим решението във вида

$$(13) \quad u = f(x - ct),$$

т.е., трябва да определим f и c . Заместваме (13) в (12), като полагаме $s = x - ct$ и получаваме ОДУ от II ред относно f :

$$-cf'(s) + f(s)f'(s) - \nu f''(s) = 0.$$

Вземайки предвид, че $ff' = \frac{1}{2}(d/ds)f^2$, интегрираме и получаваме:

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 - \nu f' = B,$$

B е интеграционна константа. Това дава

$$(14) \quad \frac{df}{ds} = \frac{1}{2\nu}(f - f_1)(f - f_2),$$

където

$$f_1 = c - \sqrt{c^2 + 2B}, \quad f_2 = c + \sqrt{c^2 + 2B}.$$

Предполагаме, че $c^2 > -2B$, и следователно $f_2 > f_1$. Разделяме променливите в уравнение (14) и интегрираме отново:

$$\frac{s}{2\nu} \int \frac{df}{(f - f_1)(f - f_2)} = \frac{1}{f_2 - f_1} \ln \frac{f_2 - f}{f - f_1}, \quad f_1 < f < f_2$$

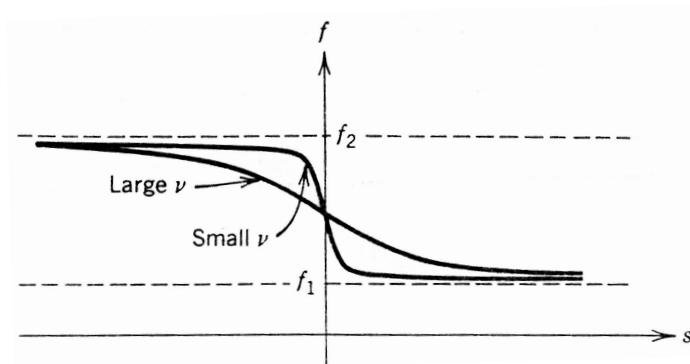
Решаваме относно f :

$$(15) \quad f(s) = \frac{f_2 + f_1 e^{Ks}}{1 + e^{Ks}},$$

където

$$K = \frac{1}{2\nu}(f_2 - f_1) > 0.$$

За големи положителни s имаме $f(s) \sim f_1$, а за големи отрицателни s – $f(s) \sim f_2$. Вижда се, че $f'(s) < 0$ за всяко s и че $f(0) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$. Графиките на f за 2 различни стойности на ν са показани на Фиг. 2. Колкото по-слаб е дифузионният член (малко ν), толкова по-голям е градиентът на f .



Фиг. 2. Бягаща вълна за уравнението на Бюргерс.

Решението $u(x, t)$ от тип бягаща вълна на уравнението (12) е

$$u(x, t) = \frac{f_2 + f_1 e^{K(x-ct)}}{1 + e^{K(x-ct)}},$$

където скоростта на вълната се определя чрез f_1 и f_2 :

$$c = \frac{1}{2}(f_1 + f_2).$$

Графично решението от тип бягаща вълна е профилът $f(s)$ на Фиг. 2., движещ се на дясно със скорост c . Казва се, че решението на уравнението на Бюргерс има “структура на ударна вълна” (*shock structure solution*), понеже наподобява реалния профил на ударна вълна (*shock wave*). Без члена νu_{xx} решението на уравнение (12) ще престане да съществува след крайно време. Наличието на дифузионен член “предпазва” от такова прекъсване, противодействайки на нелинейността. Резултатът е състезание и баланс между нелинейния член uu_x и дифузионния член νu_{xx} . В контекста на ударните вълни членът νu_{xx} може да се интерпретира като изкуствен вискозитет.