## 13. Общ метод на подобието. Локални групи на Ли в $R^3$.

Показахме, че ЧДУ от втори ред, което е инвариантно относно еднопараметричната група на разтягане, може да се сведе до ОДУ. Естествено е да очакваме, че такава процедура би довела до успех при по-общи групи от трансформации като транслации, ротации и други геометрични преобразования.

**Един пример.** Нека $\varepsilon$ е реален параметър, дефиниран в интервал, съдържащ $\varepsilon = 0$. Еднопараметричното семейство трансформации от $R^3$ в $R^3$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x\cos\varepsilon - t\sin\varepsilon \\ \bar{t} &= t\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon \\ \bar{u} &= u + \varepsilon \end{aligned} \tag{1}$$

е **ротация** на ъгъл $\varepsilon$ в $tx$ равнината и **транслация** с $\varepsilon$ в $u$ направление. Тогава точката $(x, t, u)$ се движи по вертикална спирала около оста $u$ в $R^3$.

При $\varepsilon = 0$ се получава **идентитетът**: $\bar{x} = x,\ \bar{t} = t,\ \bar{u} = u$;

Ако заместим $\varepsilon$ с $-\varepsilon$, получаваме **о**братната трансформация на (1): $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u})$ се изобразява в $(x, t, u)$;

Прилагането на трансформацията (1) с $\varepsilon_1$, последвана от трансформацията (1) с $\varepsilon_2$ е еквивалентно на прилагането на трансформация (1) с $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Развивайки десните части на (1) в Тейлоров ред при $\varepsilon \ll 1$ около $\varepsilon = 0$ :

$$\cos\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots, \quad \sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots,$$

получаваме

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x - t\varepsilon + o(\varepsilon) \\ \bar{t} &= t + x\varepsilon + o(\varepsilon) \\ \bar{u} &= u + \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

Така наречената **инфинитезималната трансформация** (2) е **приближение на (1) за малки** $\varepsilon$. Коефициентите $-t, x, 1$ на $\varepsilon$ в (2) се наричат **генератори** на групата. Те дефинират в $R^3$ **векторно поле** $\langle -t, x, 1\rangle$, което на всяка точка от $R^3$ съпоставя вектор, показващ направлението на движение на тази точка под действието на трансформацията (1). Интегралните криви на векторното поле, дефинирани от генераторите, са спиралите, по които трансформацията (1) движи точките.

Разглеждаме следната **обща еднопараметрична фамилия от трансформации** $T_\varepsilon$, дефинирана с уравненията:

$$
(3) \qquad T_\varepsilon : \begin{array}{ll} \bar{x} = \Phi(x,t,\varepsilon) & (3a) \\ \bar{t} = \Psi(x,t,\varepsilon) & (3b) \\ \bar{u} = \Omega(x,t,u,\varepsilon) & (3c) \end{array}
$$

където $\varepsilon$ е реален параметър, определен в отворен интервал, съдържащ нулата, а $\Phi, \Psi, \Omega$ са аналитични функции в дефиниционните си области.
За $\forall\varepsilon$, $T_\varepsilon : R^3 \to R^3$.

Предполагаме, че при $\varepsilon = 0$ трансформацията (3) дефинира идентичната трансформация, зададена чрез

$$
\begin{array}{l} \bar{x} = \Phi(x,t,0) = x \\ \bar{t} = \Psi(x,t,0) = t \\ \bar{u} = \Omega(x,t,u,0) = u \end{array}
$$

Предполагаме още:
– за $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ достатъчно малки $\exists\varepsilon_3$ в интервала $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ такова, че $T_{\varepsilon_2}T_{\varepsilon_1} = T_{\varepsilon_3}$.
– за $\forall\varepsilon$ достатъчно малко $\exists\varepsilon_1$ такова, че $T_\varepsilon T_{\varepsilon_1} = T_{\varepsilon_1}T_\varepsilon = I$. $T_{\varepsilon_1} = T_\varepsilon^{-1}$.

$T_\varepsilon$, дефинирана чрез (3), е **локална група трансформации на Ли.**
Развиваме десните части на (3) в Тейлоров ред по $\varepsilon$, например

$$
\begin{aligned} \bar{x} = \Phi(x,t,\varepsilon) &= \Phi(x,t,0) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(x,t,0)\varepsilon + o(\varepsilon), \\ &= x + \varepsilon\xi(x,t) + o(\varepsilon) \end{aligned}
$$

където

$$
(4) \qquad \xi(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi(x,t,0)
$$

Така получаваме *инфинитезималната трансформация*

$$
(5) \qquad \begin{array}{l} \bar{x} = x + \varepsilon\xi(x,t) + o(\varepsilon) \\ \bar{t} = t + \varepsilon\tau(x,t) + o(\varepsilon) \\ \bar{u} = u + \varepsilon\omega(x,t,u) + o(\varepsilon) \end{array}
$$

където

$$
(6) \qquad \tau(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Psi(x,t,0), \quad \omega(x,t,u) \equiv \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Omega(x,t,u,0)
$$

$\xi, \tau, \omega$ се наричат *генератори на групата трансформации* (3).

## Инвариантни ЧДУ

Нека

$$F(x,t,u,p,q) = 0, \quad (x,t) \in D \tag{7}$$

$$p \equiv u_x, \ q = u_t.$$

е ЧДУ от първи ред.

**Дефиниция 1.** *ЧДУ (7) е инвариантно относно локалната група трансформации на Ли (3) тогава и само тогава, когато*

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{q})|_{\varepsilon=0} = kF(x,t,u,p,q), \tag{8}$$

$$\bar{p} \equiv \bar{u}_{\bar{x}}, \ \bar{q} \equiv \bar{u}_{\bar{t}}$$

*за някаква константа $k$. Ако $k = 0$, ЧДУ се нарича абсолютно инвариантно.*

Като се пресметне (8), може да се получи *условие за инвариантност в термините на генераторите на групата* трансформации на Ли.

Извършвайки диференцирането, получаваме

$$F_x \xi + F_t \tau + F_u \omega + F_p \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} + F_q \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = kF, \tag{9}$$

където $\xi, \ \tau, \ \omega$ са генераторите, зададени чрез (4) и (6).

Остава да се пресметнат

$$\pi = \pi(x,t,u,p,q) \equiv \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \quad \chi = \chi(x,t,u,p,q) \equiv \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0}, \tag{10}$$

за което трябва да се знае как се трансформират $u_x$ и $u_t$ под действието на групата.

**Теорема 1.** *Ако $u = g(x,t)$, то при трансформацията $T_\varepsilon$, зададена чрез (3), производните на $\bar{u} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{t})$ са*

$$\bar{p} \equiv \bar{g}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\bar{t}_t D_x \Omega - \bar{t}_x D_t \Omega}{\det J} \tag{11}$$

$$(12) \qquad \bar{q} \equiv \bar{g}_{\bar{t}}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{-\bar{x}_t D_x \Omega + \bar{x}_x D_t \Omega}{\det J}$$

*където*

$$D_x \Omega \equiv \Omega_x + g_x \Omega_u, \qquad D_t \Omega \equiv \Omega_t + g_t \Omega_u,$$

*а $J$ е матрицата на Якоби за трансформацията*

$$\bar{x} = \Phi(x, t, \varepsilon), \ \bar{t} = \Psi(x, t, \varepsilon) :$$

$$J \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_t \\ \bar{t}_x & \bar{t}_t \end{pmatrix}.$$

*Десните части на (11) и (12) се пресмятат за $x = x(\bar{x}, \bar{t})$ и $t = t(\bar{x}, \bar{t})$.*

**Теорема 2.** *Величините $\pi$ и $\chi$ дефинирани в (10), са*

$$(13) \qquad \begin{aligned} \pi &= \omega_x + p\omega_u - p\xi_x - q\tau_x \\ \chi &= \omega_t + q\omega_u - p\xi_t - q\tau_x \end{aligned}$$

*където $\xi$, $\tau$ и $\omega$ са генераторите на (3).*

**Автомоделни решения**

За всяко фиксирано $\varepsilon$, $T_\varepsilon$ изобразява повърхнината с уравнение

$$u = g(x, t), \quad (x, t) \in D$$

в $xtu$ пространството в повърхнина

$$\bar{u} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{t}), \quad (\bar{x}, \bar{t}) \in D$$

в $\bar{x}\bar{t}\bar{u}$ пространството, където

$$\bar{D} = \{(\bar{x}, \bar{t}) | \bar{x} = \Phi(x, t, \varepsilon), \quad \bar{t} = \Psi(x, t, \varepsilon), \quad (x, t) \in D\}.$$

За да определим $\bar{g}$, обръщаме трансформацията

$$\bar{x} = \Phi(x, t, \varepsilon) \quad \bar{t} = \Psi(x, t, \varepsilon)$$

в $D$, за да получим

$$x = x(\bar{x}, \bar{t}) \quad t = t(\bar{x}, \bar{t}).$$

Тогава $\bar{g}$ се определя от

$$(14) \qquad \bar{g}(\bar{x},\bar{t}) \equiv \Omega(x(\bar{x},\bar{t}), t(\bar{x},\bar{t}), g(x(\bar{x},\bar{t}), t(\bar{x},\bar{t})), \varepsilon)$$

Ако $u = g(x,t)$ е решение на уравнението

$$(15) \qquad F(x,t,u,p,q) = 0$$

то $\bar{u} = g(\bar{x},\bar{t})$ е решение на уравнението

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{p},\bar{q}) = 0.$$

Може да се покаже, че $\bar{u} = \bar{g}(\bar{x},\bar{t})$ също е решение на последното уравнение, но изобщо $g(\bar{x},\bar{t}) \neq \bar{g}(\bar{x},\bar{t})$.

**Автомоделните решения** са измежду инвариантните повърхнини $u = g(x,t)$, за които

$$g(\bar{x},\bar{t}) = \bar{g}(\bar{x},\bar{t}).$$

Прилагайки (14), определяме производната относно $\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$ и получаваме **условието за инвариантна повърхнина:**

$$g_x(x,t)\Phi_\varepsilon(x,t,0) + g_t(x,t)\Psi_\varepsilon(x,t,0) = \Omega_\varepsilon(x,t,g,0)$$

или

$$(16) \qquad \xi(x,t)g_x + \tau(x,t)g_t = \omega(x,t,g)$$

Това е уравнение от I ред относно $g$.

Характеристичната система е

$$(17) \qquad \frac{dx}{\xi(x,t)} = \frac{dt}{\tau(x,t)} = \frac{dg}{\omega(x,t,g)}$$

Първата двойка уравнения

$$\frac{dx}{\xi(x,t)} = \frac{dt}{\tau(x,t)}$$

определя един пръв интеграл (автомоделната променлива)

$$(18) \qquad s \equiv s(x,t) = \mathrm{const}$$

Определяме $x = X(s,t)$ от (18), интегрираме двойката

$$\frac{dt}{\tau(X(s,t),t)} = \frac{dg}{\omega(X(s,t),t,g)}$$

и получаваме друг пръв интеграл

$$w(s,t,g) = \text{const} \tag{19}$$

Следователно общото решение на (16) е

$$F(s, w(s,t,g)) = 0, \tag{20}$$

от което определяме $g$ и следователно кандидатите за автомоделни решения. Процедирайки както в случая на групата трансформации на разтягане, заместваме получения израз в изходното уравнение (15) и го свеждаме до ОДУ от I ред относно автомоделната функция. Ще илюстрираме тази процедура с един пример.

**Пример 2.** Нелинейното хиперболично уравнение от I ред

$$u_t + uu_x = 0 \tag{21}$$

е абсолютно инвариантно относно групата на Ли с генератори (проверете!)

$$\xi = 2x + 2, \quad \tau = t + 1, \quad \omega = u.$$

Условието (16) е

$$(2x+2)u_x + (t+1)u_t = u \tag{22}$$

(използваме $u$ вместо $g$). Характеристичната система е

$$\frac{dx}{2(x+1)} = \frac{dt}{t+1} = \frac{du}{u}.$$

Двата първи интеграла са съответно

$$s \equiv \frac{(t+1)^2}{x+1} = \text{const}, \tag{23}$$

$$\frac{u}{t+1} = \text{const}.$$

Общото решение на (22) е

$$F\left(s, \frac{u}{t+1}\right) = 0, \quad F \text{ произволна}$$

или

(24) $$u = (t+1)f(s), \quad f \text{ произволна.}$$

Уравнението (24), в което $s$ е автомоделната променлива, дефинира инвариантните повърхнини и кандидатите за автомоделни решения. Заместваме (24) в ЧДУ (21) и получаваме ОДУ относно $f(s)$

$$2sf' + f - s^2 ff' = 0.$$

Със субституцията $g = sf$ получаваме

$$\frac{2-g}{g(1-g)}dg = \frac{ds}{s}$$

и интегрираме

$$\frac{g^2}{g-1} = cs, \quad c \text{ constant.}$$

Тогава

$$f(s) = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{c}{s}},$$

и

$$u(x,t) = (t+1)\left[\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{c(x+1)}{(t+1)^2}}\right].$$