

12. МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ТОПЛИННИТЕ СТРУКТУРИ. СИНГУЛЯРНИ ПО ВРЕМЕТО РЕШЕНИЯ

12.1. Постановка на задачата. Ще приложим техниката, развита в Лекция 10, за конструиране на един клас инвариантни решения на следната задача от тип реакция-дифузия:

$$(1) \quad u_t = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right) + u^\beta, u = u(r, t), r > 0, t > 0, \sigma > 0, \beta > 1,$$

$$(2) \quad u(r, 0) = u_0(r) \geq 0, \quad r \geq 0,$$

$$(3) \quad u_r(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$(4) \quad u(\infty, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$(5) \quad u^\sigma u_r = 0 \quad \text{ако} \quad u = 0.$$

Тази задача е радиално-симетричен вариант на известния модел на топлинните структури. Тук $u(r, t)$ е температура на нелинейната среда с коефициент на топлопроводност $k(u) = u^\sigma$, $q(u) = u^\beta$ е обемен източник на топлина.

Интересуваме се от решения, които клонят към безкрайност за **крайно време** T_0 :

$$u(r, t) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T_0 - 0.$$

Такива сингулярни по времето решения се наричат **избухващи (blow-up) решения**, а времето T_0 се нарича **време на избухване (blow-up time)**.

Необходимо условие за крайно време на съществуване на решението е :

$$F(s) = \int_s^\infty \frac{d\eta}{q(\eta)} = \int_s^\infty \frac{d\eta}{\eta^\beta} < \infty,$$

и то е изпълнено за $\beta > 1$.

Да въведем функцията

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{k(\eta)}{\eta} d\eta = \int_0^u \frac{\eta^\sigma}{\eta} d\eta = \frac{u^\sigma}{\sigma} \Rightarrow \Phi(1) = \frac{1}{\sigma} < \infty, (\sigma > 0).$$

Условието $\Phi(1) < \infty$ е **необходимо и достатъчно** условие за **крайна скорост на разпространение на топлината** при $q(u) = 0$ и начални данни u_0 с краен носител.

12.2. Инвариантни избухващи решения.

Търсим решения, инвариантни относно следната група трансформации на разтягане:

$$(6) \quad \bar{r} = \varepsilon^a r, \quad \bar{t} = \varepsilon^b t, \quad \bar{u} = \varepsilon^c u,$$

Имаме:

$$u_t = \varepsilon^{b-c} \bar{u}_{\bar{t}}, \quad u_r = \varepsilon^{a-c} \bar{u}_{\bar{r}}, \quad \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{N-1} u^\sigma u_r) = \frac{N-1}{r} u^\sigma u_r + \frac{\partial}{\partial r} (u^\sigma u_r),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (u^\sigma u_r) = \varepsilon^{2a-c(\sigma+1)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u}^\sigma \bar{u}_{\bar{r}}).$$

Заместваме в уравнение (1) и получаваме:

$$\varepsilon^{b-c} \bar{u}_{\bar{t}} = \frac{N-1}{\bar{r}} \varepsilon^{2a-c(\sigma+1)} \bar{u}^\sigma \bar{u}_{\bar{r}} + \varepsilon^{2a-c(\sigma+1)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} (\bar{u}^\sigma \bar{u}_{\bar{r}}) + \varepsilon^{-c\beta} \bar{u}^\beta,$$

така че условията за инвариантност са:

$$b - c = 2a - c(\sigma + 1) = -c\beta,$$

или, ако изберем $b = 1$:

$$a = \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}, \quad b = 1, \quad c = -\frac{1}{\beta - 1}.$$

Така кандидатите за инвариантни решения са:

$$(7) \quad u(r, t) = t^{c/b} \cdot \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r^b}{t^a}, \quad u(r, t) = t^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{t^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}.$$

Понеже уравнение (1) е инвариантно относно трансляция по t , $\bar{t} = t \pm T_0$, то ще има и следното семейство инвариантни решения:

$$u(r, t) = (t \pm T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \cdot \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{(t \pm T_0)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}.$$

За удобство ние ще търсим **избухващи решения** от вида:

$$(8) \quad u(r, t) = \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi), \quad \xi = \frac{r}{\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}}.$$

Ясно е от (8), че $u(r, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0 - 0$. Да изследваме какво е поведението на ξ при фиксирано r в зависимост от параметрите на средата σ и β :

- $\beta = \sigma + 1$: $\xi = r$;
- $\beta < \sigma + 1$: $\xi \rightarrow 0$, $t \rightarrow T_0$;
- $\beta > \sigma + 1$: $\xi \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0$.

12.3. Автомоделна задача.

Да заместим (8) в уравнение (1), записано във вида:

$$u_t = \frac{N-1}{r} u^\sigma u^r + \frac{\partial}{\partial r} (u^\sigma u_r) + u^\beta.$$

Намираме последователно:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{(\beta-1)T_0} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}-1} \theta(\xi) + \\ &\quad \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta'(\xi) \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)T_0} r \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}-1}, \\ u_r &= \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta'(\xi) \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}, \\ \frac{\partial}{\partial r} (u^\sigma u_r) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\sigma}{\beta-1}} \theta^\sigma \theta'(\xi) \right) \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1} - \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)} - \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}}, \\ \frac{1}{(\beta-1)T_0} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}-1} \theta(\xi) &+ \xi \theta'(\xi) \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)T_0} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}-1} = \\ &\quad (\theta^\sigma \theta')' \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}-1} + \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\beta}{\beta-1}} \theta^\beta + \\ &\quad \frac{N-1}{\xi} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}} \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\sigma}{\beta-1}} \theta^\sigma \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta' \times \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)}} \end{aligned}$$

и окончателно:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta^\sigma \theta')' - \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)T_0} \xi \theta' - \frac{1}{(\beta-1)T_0} \theta + \theta^\beta = 0.$$

Без ограничение на общността можем да положим

$$(9) \quad (\beta-1)T_0 = 1, \quad T_0 = \frac{1}{\beta-1}.$$

Тогава **автомоделното уравнение** добива вида:

$$(10) \quad \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta^\sigma \theta')' - \frac{\beta-\sigma-1}{2} \xi \theta' - \theta + \theta^\beta = 0.$$

То има две константни решения – тривиалното, $\theta_H^0 \equiv 0$, и едно нетривиално, $\theta_H^1 \equiv 1$.

Търсим решение на уравнение (10) при условията, които следват от (3), (4) и (5):

$$(11) \quad \theta'(0) = 0,$$

$$(12) \quad \theta(\infty) = 0,$$

$$(13) \quad \theta^\sigma \theta'(\xi) = 0 \text{ ако } \theta(\xi) = 0.$$

Така успяхме да сведем начално-граничната задача за ЧДУ до гранична задача за ОДУ. От свойствата на решенията на последната задача можем да направим важни изводи за свойствата на решенията на изходната задача.

Да предположим, че θ има максимум в точката ξ_0 . Тогава $\theta'(\xi_0) = 0$, $\theta''(\xi_0) < 0$ и като положим $\xi = \xi_0$ в уравнение (10):

$$\left(\sigma \theta^{\sigma-1} (\theta')^2 + \theta^\sigma \theta'' + \frac{N-1}{\xi} \theta^\sigma \theta' - \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \xi \theta' - \theta + \theta^\beta \right)_{\xi=\xi_0} = 0,$$

заклучаваме, че $(\theta^\beta - \theta)_{\xi=\xi_0} > 0$ и следователно $\theta(\xi_0) > 1$, понеже $\beta > 1$. Аналогично, ако θ има минимум при $\xi = \xi_0$, то $\theta(\xi_0) < 1$. Това означава, че в областта на своята немонотонност автомоделната функция θ ще осцилира около $\theta_H^1 \equiv 1$.

Изследванията на автомоделната задача показват, че свойствата на нейните решения, а от там и свойствата на решенията на изходната задача, съществено зависят от съотношението на параметрите β и σ на средата, както и от размерността N на пространството. Така се определят **базисните режими** на горене на средата, както и структурите, които могат да възникват и да се самоподдържат в нея. Поради определящата роля на автомоделните функции, те са наречени [2] *собствени функции на горене на нелинейната среда*, чийто модел е задачата (1)-(5).

Случай $\beta = \sigma + 1$ (S -режим, избухване в крайна област).

N=1. В този случай уравнение (10) е

$$(14) \quad (\theta^\sigma \theta') - \theta + \theta^{\sigma+1} = 0$$

и има аналитично решение

$$\theta(\xi) = \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma+2} \cos^2 \frac{\pi \xi}{L_s} \right)^{1/\sigma}, \quad L_s = \frac{2\pi\sqrt{\sigma+1}}{\sigma}, \quad \theta\left(\frac{L_s}{2}\right) = 0.$$

Функцията

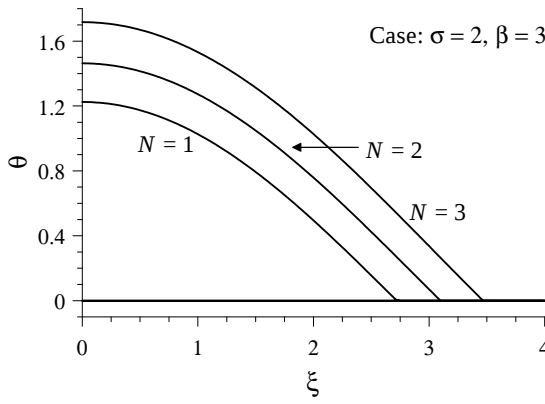
$$(15) \quad \theta(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma+1)}{\sigma+2} \cos^2 \frac{\pi \xi}{L_s} \right)^{1/\sigma} & , |\xi| \leq \frac{L_s}{2} \\ 0 & , |\xi| > \frac{L_s}{2} \end{cases}$$

която удовлетворява условието (13), също ще бъде решение. Стойността L_s се нарича *фундаментална дължина на S -режима*. Уравнението (14) е автономно (не зависи явно от ξ), затова решението е *инвариантно и при трансляция* относно ξ . Това означава, че уравнението (14) има изброимо много различни решения, които се състоят от произволен краен брой елементарни решения (15), изместени или не по оста ξ .

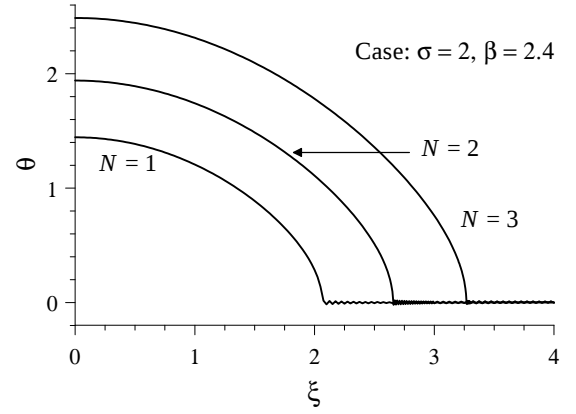
N > 1. В този случай уравнение (10) няма аналитично решение. Доказано е:

Теорема 3. [4] *При $N > 1$ и $\beta = \sigma + 1$ задачата (10) - (13) има строго монотонно неотрицателно решение с краен носител и няма немонотонни решения.*

На Фиг.1 са показани графиките на автомоделните функции при $\sigma = 2, \beta = \sigma + 1 = 3, N = 1, 2, 3$.



Фигура 1: $\beta = \sigma + 1$, S-режим



Фигура 2: $\beta < \sigma + 1$, HS-режим

Автомоделното решение $u(r, t)$, съответстващо на θ , ще има този постоянен носител за всяко t и понеже $r = \xi$, то $u(r, t) \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0 - 0$ за всяко r от носителя на θ . Казва се, че избухването е в крайна област (*S*-еволюция, по имената на А.А. Самарский и М.И. Соболев, които първи [5], през 1963 г., са открили феномена локализация на топлината.) Дифузията на топлината и интензивността на нагряването (източникът на топлина) се съгласуват така, че определят процес, **локализиран върху фундаменталната дължина**. В областта на локализация $\Omega_L = \{r = |x| < L_s/2\}$ средата се нагрява до безкрайна температура за време T_0 .

Случай $\beta < \sigma + 1$ (*HS*-еволюция, тотално избухване)

Теорема 4. [4] *При $\beta < \sigma + 1$ задачата (10) - (13) има строго монотонно неотрицателно решение с краен носител и няма немонотонни решения. При $N = 1$ решението е единствено.*

На Фиг.2 са показани графиките на автомоделните функции при $\sigma = 2$, $\beta = 2.4 < \sigma + 1$, $N = 1, 2, 3$.

За фиксирано ξ при $t \rightarrow T_0 - 0$, имаме $r = \xi \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}} \rightarrow \infty$. Автомоделното решение $u(r, t)$, съответстващо на θ , определя топлинна вълна, която за време T_0 обхваща цялото пространство. Процесът **не е локализиран**.

Случай $\beta > \sigma + 1$ (*LS*-еволюция, избухване в една точка)

Задачата (10) - (13) няма решения с краен носител. Локалният анализ на уравнението (10) при $\xi \rightarrow \infty$ дава следната асимптотика на автомоделната функция [4]:

$$(16) \quad \theta(\xi) = C(\sigma, \beta, N) \xi^{-\frac{2}{\beta - \sigma - 1}} (1 + \varepsilon(\xi)), \quad \varepsilon(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

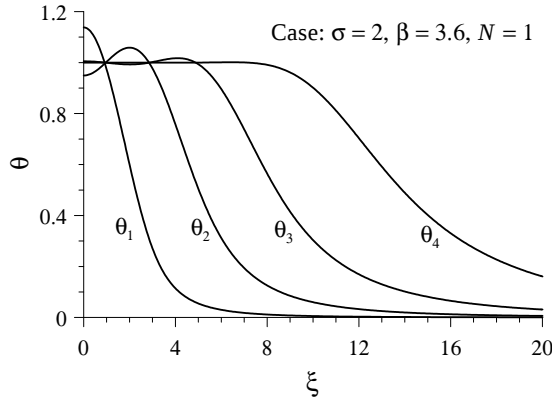
Теорема 5. [4] *За $\sigma + 1 < \beta < \infty$, $N = 1, 2$, и $\sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2) = \beta_s$, $N \geq 3$, задачата (10) - (13) има строго монотонно решение с асимптотика (16).*

Теорема 6. [4], [1] За $N = 1$ задачата (10) - (13) има не по-малко от $K - 1$ различни решения $\theta_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, K - 1$, различаващи се по броя на екстремумите си при $\xi \in [0, \infty)$, където

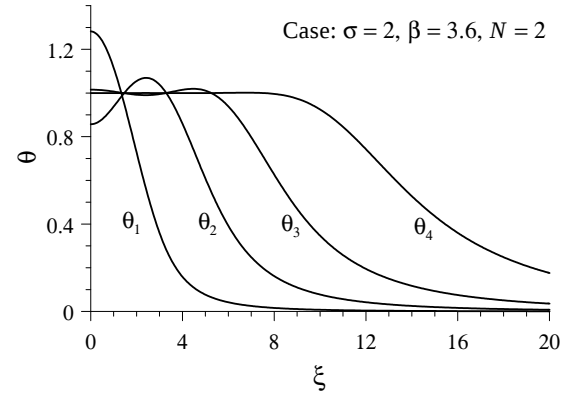
$$K = -[a], \quad a = \frac{\beta - 1}{\beta - \sigma - 1},$$

$[a]$ означава цялата част на числото a .

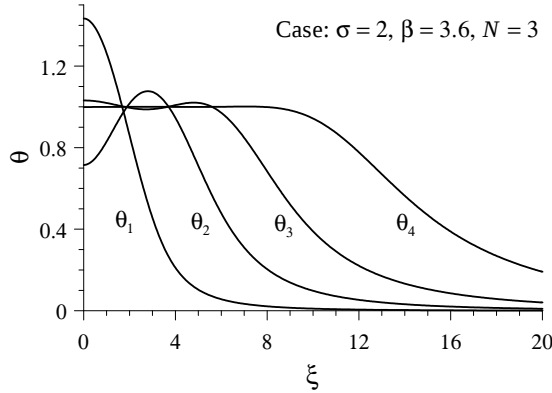
В работа [3] този резултат е уточнен неотдавна с бифуркационен анализ: броят на различните решения е $K - 1$ (равен на $[a]$, ако a не е цяло число, и равен на $a - 1$, ако a е цяло). За $N = 2, 3$ бифуркационният анализ дава същата оценка за броя на решенията, но при $\beta \approx \sigma + 1$, $\beta > \sigma + 1$ тя се нарушава [7].



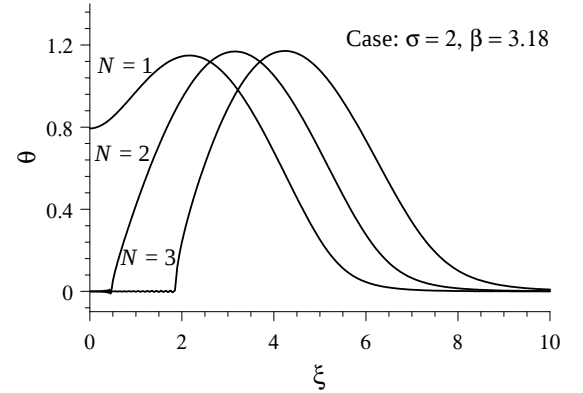
Фигура 3: $\beta > \sigma + 1$, LS-режим



Фигура 4: $\beta > \sigma + 1$, LS-режим



Фигура 5: $\beta > \sigma + 1$, LS-режим



Фигура 6: $\beta > \sigma + 1$, LS-режим

На Фиг. 3 ($N = 1$), Фиг. 4 ($N = 2$), Фиг. 5 ($N = 3$) са показани графиките на четирите автомоделните функции ($K - 1 = 4$), които съществуват при $\sigma = 2$, $\beta = 3.6 > \sigma + 1$. На Фиг. 6 са показани графиките на втората автомоделна функция при $\sigma = 2$, $\beta = 3.18 > \sigma + 1$, $N = 1, 2, 3$. При $N = 2, 3$ автомоделните функции имат

област с нулеви стойности около центъра на симетрия - факт, открит за първи път с числен експеримент и публикуван в работа [7].

При $\beta > \sigma + 1$ интензивността на източника е по-силна от дифузията. За фиксирано ξ при $t \rightarrow T_0 - 0$, имаме $r = \xi \left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{\frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)}} \rightarrow 0$. Процесът е **локализиран**, средата се нагрява до безкрайна температура за време T_0 само в една точка: $\text{mes } \Omega_L = 0$, $t \rightarrow T_0^-$. При това $u(r, t) \leq Cr^{-\frac{2}{\beta - \sigma - 1}}$ за $t < T_0$.

В съответствие с различните решения $\theta_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$, средата гори във вид на прости ($i = 1$) и сложни структури ($i > 1$) с един и същи момент на избухване. В началния момент от време всяка структура “съдържа” определено количество “топлинна енергия” [2]

$$E_i = \int_0^\infty \theta_i(\xi) d\xi, \quad E_i > E_{i-1}, i = 2, \dots$$

Така автомоделните функции $\theta_i(\xi)$ определят краен брой “енергетични нива”, съществуващи по автомоделния закон (8) в течение на едно и също време T_0 .

12.4. Автомоделните решения като атрактори.

За да покажем значимостта на **автомоделните решения като атрактори** на широки класове други решения на същото уравнение, ще въведем няколко понятия.

При произволни *финитни* начални данни $u_0(r)$ (2) дефинираме *автомоделно представяне* на решението $u(t, r)$ на задачата (1)-(5), което във всеки момент от време се определя в съответствие с вида на автомоделното решение (8):

$$(17) \quad \Theta(t, \xi) = (1 - t/T_0)^{\frac{1}{\beta-1}} u \left(t, \xi (1 - t/T_0)^{\frac{(\beta-\sigma-1)}{2(\beta-1)}} \right) = \varphi^{-1}(t) u(t, \xi \psi(t))$$

Автомоделното решение $u_a(t, r)$ се нарича **асимптотично устойчиво**, ако съществува достатъчно широк клас решения $u(t, r)$ на задачата (1)-(5) с начални данни $u_0(r) \neq \theta(r)$, автомоделните представяния $\Theta(t, \xi)$ на които клонят в някаква норма към $\theta(\xi)$ когато $t \rightarrow T_0^-$:

$$(18) \quad \|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^-.$$

В определението на автомоделното представяне (17) участва неизвестното време на избухване T_0 , затова то е непригодно за числено изследване на асимптотичната устойчивост на автомоделното решение. В работата [1] е предложен и числено реализиран (при $N = 1$) друг подход, позволяващ да се изследва “**структурната**” **устойчивост** на неограничените автомоделни решения в специална “**автомоделна**” **норма**, съгласувана при всяко t със структурата на автомоделното решение, но не използваща в явен вид времето на избухване T_0 . Дефинира се ново автомоделно представяне:

$$(19) \quad \Theta(t, \xi) = u(t, \xi(\gamma(t))^{-(\beta-\sigma-1)/2})/\gamma(t), \quad \gamma(t) = \frac{\max_r u(t, r)}{\max_\xi \theta(\xi)}.$$

Автомоделното решение $u_a(t, r)$ се нарича **структурно устойчиво**, ако сходимостта (18) е в сила за $\Theta(t, \xi)$, зададена чрез (19).

Ако автомоделната функция $\theta(\xi)$ не е известна (нито аналитично, нито числено), въвеждаме отношението

$$(20) \quad \Gamma(t) = \frac{\max_r u(t, r)}{\max_r u_0(r)}$$

и ново автомоделно представяне

$$(21) \quad \bar{\Theta}(t, \xi) = u(t, \xi(\Gamma(t))^{-(\beta-\sigma-1)/2})/\Gamma(t).$$

Автомоделното решение $u_a(t, r)$ ще е структурно устойчиво, ако

$$(22) \quad \|\bar{\Theta}(t, \xi) - \bar{\theta}(\xi)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^-,$$

където

$$\bar{\theta}(\xi) = \frac{\max_r u_0(r)}{\max_\xi \theta(\xi)} \theta(\xi).$$

За автомоделните решения със сложна пространствено-времева структура, съответстващи на немонотонни автомоделни функции, се въвежда понятието **метаустойчивост**.

Автомоделното решение $u_a(t, r)$ се нарича **метаустойчиво**, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува клас начални данни $u_0(r) \approx \theta(r)$ и време T , $T_0 - T \ll T_0$ такива, че за автомоделните представяния (19) на съответните решения е в сила

$$(23) \quad \|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Понятията структурна устойчивост и метаустойчивост отразяват същността на режимите с избухване.

Автомоделните решения, съответстващи на автомоделни функции с един максимум, са структурно устойчиви - те запазват автомоделната си структура до самия момент на избухване. Нещо повече - решения, отговарящи на произволни начални данни, на асимптотичния стадий клонят към тези структурно устойчиви автомоделните решения при съответните параметри на средата. В процеса на еволюцията началните данни се “забравят” и процесът се развива в автомоделен режим.

Автомоделните решения, съответстващи на автомоделни функции със сложна структура (с повече от един максимум), са метаустойчиви - те запазват автомоделната си структура до времена, “много близки” до момента на избухване, но след това се израждат в структурно устойчивото автомоделно решение при съответните параметри на средата.

Библиография

- [1] Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде // *ЖВМ и МФ*, 1983, т.23, 2, 38–90.
- [2] С. П. Курдюмов. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. В кн.: *Современные проблемы матем. физики и вычислительной математики*. М.: Наука, 1983, 217–243.
- [3] Е. С. Куркина, С. П. Курдюмов. Спектр диссипативных структур, развивающихся в режиме с обострением // *Доклады РАН*, т. 395, 6, 2004, 743–748.

- [4] А. А. Самарский, В. А. Галактионов В. А., С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, М.: Наука, 1987.
- [5] А. А. Самарский, И. М. Соболев. Примеры численного расчета температурных волн // *ЖВМ и МФ*, т.3, 4, 1963, 18–28.
- [6] В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // *Совр. пробл. матем. Новейшие достижения*. Т. 28. ВИНТИ АН СССР, М., 1986, 95–206.
- [7] С. Н. Димова, М. С. Касчиев, С. П. Курдюмов, Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае, *ЖВМ и МФ*, 1989, 29 (6), 61–73.