10. Инвариантни частни диференциални уравнения. Инвариантни решения.

Нека

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0, \quad (x,t)\in D \tag{1}$$

е частно диференциално уравнение от втори ред за функцията $u=u(x,t)$.

Разглеждаме еднопараметричното семейство от трансформации на разтягане

$$\bar{x}=\varepsilon^a x, \qquad \bar{t}=\varepsilon^b t, \qquad \bar{u}=\varepsilon^c u, \tag{2}$$

където a,b,c са фиксирани реални константи, ε е реален параметър със стойности в отворения интервал I , съдържащ $\varepsilon=1$.

Да означим трансформацията (2) с T_ε, $T_\varepsilon : R^3 \to R^3$ за $\forall \varepsilon \in I$. Семейството T_ε съдържа идентичната трансформация T_1 в R^3 при $\varepsilon=1$, а композиционното правило $T_{\varepsilon_1}T_{\varepsilon_2}=T_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ е в сила за всички ε_1 и ε_2. Обратната трансформация на T_ε е $T_{\varepsilon^{-1}}$. Следователно (2) е локална група трансформации на Ли върху R^3 с идентитет при $\varepsilon=1$.

Тъй като дискутираме тези трансформации за решенията $u(x,t)$ на (1), да разгледаме резултата от прилагането на T_ε при фиксирано ε към повърхнина в R^3, дефинирана чрез

$$u=\phi(x,t), \quad (x,t)\in D. \tag{3}$$

Повърхнината (3) се преобразува в повърхнина $\bar{\phi}$ в $\bar{x}\bar{t}\bar{u}$, дефинирана чрез

$$\bar{u}=\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}), \quad (\bar{x},\bar{t})\in \bar{D}, \tag{4}$$

където $\bar{D}=\{(\bar{x},\bar{t})|\bar{x}=\varepsilon^a x, \bar{t}=\varepsilon^b t, (x,t)\in D\}$ и $\bar{\phi}$ е дефинирана чрез

$$\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})=\varepsilon^c \phi(\varepsilon^{-a}\bar{x},\varepsilon^{-b}\bar{t}). \tag{5}$$

За да получим (5), ние приложихме трансформацията (2) към множеството от точки $(x,t,\phi(x,t))$. В новите променливи записваме следното частно диференциално уравнение

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{t}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{t}},\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}})=0, \qquad (\bar{x},\bar{t})\in \bar{D} \tag{6}$$

(със *същия* оператор F). Очевидно е, че ако $u=\phi(x,t)$ е решение на (1), то $\phi(\bar{x},\bar{t})$ е решение на (6), понеже просто сме преименували променливите. Да отбележим, че изобщо $\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})$ е различна от $\phi(\bar{x},\bar{t})$.

Пример 1. Да разгледаме трансформацията

$$\bar{x} = \varepsilon x, \quad \bar{t} = \varepsilon^2 t, \quad \bar{u} = \varepsilon^3 u$$

и нека $\phi(x,t) = x^2 - t^2$. Тогава $\phi(\bar{x},\bar{t}) = \bar{x}^2 - \bar{t}^2$, а от (5) $\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = \varepsilon^3(\varepsilon^{-2}\bar{x}^2 - \varepsilon^{-4}\bar{t}^2) = \varepsilon\bar{x}^2 - \bar{t}^2/\varepsilon$.

Да отбележим, че ако $u = \phi(x,t)$ е решение на (1), то $\bar{u} = \bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})$ не е обезателно решение (6). Но ако частното диференциално уравнение (1) е инвариантно относно трансформацията (2), то $\bar{u} = \bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})$ ще бъде решение на (6).

Дефиниция 1. *Частното диференциално уравнение (1) е (с точност до константа) инвариантно относно еднопараметричното семейство от трансформации T_ε, дефинирани в (2) тогава и само тогава когато*

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{u}_{\bar{x}},\bar{u}_{\bar{t}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}},\bar{u}_{\bar{x}\bar{t}},\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}}) = A(\varepsilon)F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}) \tag{7}$$

за $\forall\varepsilon \in I$, и за някаква функция A с $A(1) = 1$. Ако $A(\varepsilon) \equiv 1$, (1) се нарича абсолютно инвариантно.

Пример 2. Да се намери трансформацията на разтягане, при която уравнението

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{8}$$

е инвариантно. Нека

$$\bar{x} = \varepsilon^a x, \quad \bar{t} = \varepsilon^b t, \quad \bar{u} = \varepsilon^c u,$$

Тогава

$$\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = \varepsilon^{c-2b}u_{tt} - \varepsilon^{c-2a}u_{xx}.$$

Ако $a = b$, то

$$\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = \varepsilon^{c-2a}(u_{tt} - u_{xx}),$$

следователно $A(\varepsilon) = \varepsilon^{c-2a}$ и вълновото уравнение (8) е инвариантно относно (2) за $a = b$ при произволни a и c .

Теорема 1. *Ако частното диференциално уравнение (1) е (с точност до константа) инвариантно относно трансформацията (2) и ако $\phi(x,t)$ е решение на (1), то $\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t})$, дефинирано чрез (5) е решение на частното диференциално уравнение (6).*

Доказателството следва от Дефиниция 1 и равенство (7).

Пример 3. Да изберем $a = b = 1, c = 2$. в Пример 2. Следователно уравнението (8) е абсолютно инвариантно относно трансформацията $\bar{x} =$

$\varepsilon x, \bar{t} = \varepsilon t, \bar{u} = \varepsilon^2 u$. Решението $\phi(x,t) = \sin(x-t)$ на (8) се трансформира в $\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) = \varepsilon^2 \sin((\bar{x}-\bar{t})/\varepsilon)$, което е решение на $\bar{u}_{\bar{t}\bar{t}} - \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} = 0$. Но $\phi(\bar{x},\bar{t}) = \sin(\bar{x}-\bar{t})$ и следователно $\bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}) \neq \phi(\bar{x},\bar{t})$. Обаче решението $g(x,t) = (x-t)^2$, се трансформира в $\bar{g}(\bar{x},\bar{t}) = \varepsilon^2(\frac{\bar{x}}{\varepsilon} - \frac{\bar{t}}{\varepsilon})^2 = (\bar{x}-\bar{t})^2$, което съвпада с $g(\bar{x},\bar{t})$. Казваме, че решението $\phi(x,t)$ не е инвариантно относно трансформацията (2), а $g(x,t)$ е инвариантно.

Дефиниция 2. *Едно решение $u = \phi(x,t), (x,t) \in D$ на (1) е инвариантно решение относно T_ε (или инвариантна повърхнина), тогава и само тогава когато*

$$\phi(\bar{x},\bar{t}) = \bar{\phi}(\bar{x},\bar{t}). \tag{9}$$

Автомоделните решения на частните диференциални уравнения са измежду инвариантните решения. От (9) може да се изведе условие, което да се използва за намиране на инвариантните решения. В термините на първоначалните променливи (9) е еквивалентно на

$$\phi(\varepsilon^a x, \varepsilon^b t) = \varepsilon^c \phi(x,t). \tag{10}$$

Понеже (10) е вярно за $\forall \varepsilon \in I$, то можем да го диференцираме по ε и после да положим $\varepsilon = 1$. Получаваме частно диференциално уравнение от първи ред

$$ax\phi_x + bt\phi_t = c\phi. \tag{11}$$

Уравнението (11) се нарича *условие за инвариантната повърхнина (за инвариантното решение).* За да намерим общия вид на Φ можем да използваме метода на характеристиките. Характеристичната система за уравнението е

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dt}{bt} = \frac{d\phi}{c\phi}.$$

Интегрирайки първото от двете равенства, получаваме

$$x^b t^{-a} = constant.$$

Интегрирайки второто равенство, получаваме

$$\phi t^{-c/b} = constant.$$

Следователно общото решение на (11) е

$$\psi(\phi t^{-c/b}, x^b t^{-a}) = 0$$

за някаква функция ψ. Веднага следва, че инвариантните повърхнини са

$$\phi(x,t) = t^{c/b} f(\frac{x^b}{t^a}), \tag{12}$$

където f е произволна функция. Равенството (12) дефинира формата на възможните автомоделни решения, породени от инвариантността на уравнението относно трансформациите (2). Автомоделната променлива е:

$$s = \frac{x^b}{t^a}$$

и следователно (12) може да се запише във вида

$$u = \phi(x,t) = t^{c/b} f(s).$$

Остава да покажем , че частното диференциално уравнение (1) се трансформира в обикновена диференциално уравнение чрез (12).

Теорема 2. *Ако частното диференциално уравнение (1) е (с точност до константа) инвариантно относно (2), то полагането*

$$u = t^{c/b} f(s), \tag{13}$$

където

$$s = \frac{x^b}{t^a} \tag{14}$$

в (1) води до обикновено диференциално уравнение за f от вида

$$H(s, f, f', f'') = 0.$$

Доказателство. Ще го направим за частно диференциално уравнение от първи ред от вида:

$$F(x,t,u,p,q) = 0, \tag{15}$$

където $p = u_x$ и $q = u_t$. Тогава щом (15) е инвариантно относно (2), то

$$F(\bar{x},\bar{t},\bar{u},\bar{p},\bar{q}) = A(\varepsilon) F(x,t,u,p,q), \tag{16}$$

където A е някаква функция, $\bar{p} = \bar{u}_{\bar{x}}$ и $\bar{q} = \bar{u}_{\bar{t}}$. Имаме

$$\bar{p} = \bar{u}_{\bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} = \varepsilon^{c-a} p$$

и

$$\bar{q} = \bar{u}_{\bar{t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \varepsilon^{c-b} q.$$

Диференцираме (16) по ε и полагаме $\varepsilon = 1$, което води до частно диференциално уравнение от първи ред за функцията F:

$$axF_x + btF_t + cuF_u + (c-a)pF_p + (c-b)qF_q = A'(1)F.$$

Това уравнение може да се реши с метода на характеристиките. Характеристичната система е

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dt}{bt} = \frac{du}{cu} = \frac{dp}{(c-a)p} = \frac{dq}{(c-b)q} = \frac{dF}{A'(1)F}.$$

Петте независими първи интеграла са

$$\frac{x^b}{t^a}, \quad ut^{-c/b}, \quad pt^{(a-c)/b}, \quad qt^{1-c/b}, \quad Ft^{-A'(1)/b}.$$

Следователно

$$F = t^{A'(1)/b} G(s, ut^{-c/b}, pt^{(a-c)/b}, qt^{1-c/b}) \tag{17}$$

за някаква функция G. Тогава u се задава чрез (13), а за p и q получаваме

$$p = u_x = t^{\frac{c}{b}} f'(s)\frac{ds}{dx} = t^{\frac{c}{b}} t^{-a} b x^{b-1} f'(s) = bt^{c/b-a} x^{b-1} f'(s)$$

и

$$q = u_t = \frac{c}{b} t^{\frac{c}{b}-1} f(s) + t^{\frac{c}{b}} f'(s) x^b (-a) t^{-a-1} = \frac{c}{b} t^{c/b-1} f(s) - ax^b t^{c/b-a-1} f'(s).$$

Като заместим u, p и q в (17), уравнението (15) приема вида

$$G(s, f(s), bs^{1-1/b} f'(s), \frac{c}{b} f(s) - asf'(s)) = 0, \tag{18}$$

което е уравнение от вида $H(s, f, f') = 0$.

Забележка - в (18) трябва $b \neq 0$. Ако $b = 0$, то последните четири първи интеграла трябва да се изразят в термините на x, а не на t.

Пример 4. Разпространение на топлината в нелинейна едномерна среда. При $x > 0$ температурата $u(x, t)$ на средата се определя от следната нелинейна гранична задача

$$uu_t - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0 \tag{19}$$

$$u(x,0)=0, \qquad x>0 \tag{20}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t)=0, \quad t>0 \tag{21}$$

и

$$u_x(0,t)=-Q, \quad t>0, \tag{22}$$

където $Q>0$ е фиксирана константа. Предполагаме, че задачата (19)-(22) е обезразмерена. Условията (20) и (21) са съответно начално условие и гранично условие на безкрайност. Граничното условие (22) означава, че в точката $x=0$ с постоянна скорост се отделя топлинна енергия; да отбележим, че производната u_x е пропорционална на потока. Частното диференциално уравнение (19) моделира ситуация, в която специфичната топлоемкост на средата се повишава с температурата.

Разглеждаме трансформацията на разтягане

$$\bar{x}=\varepsilon^a x, \quad \bar{t}=\varepsilon^b t, \quad \bar{u}=\varepsilon^c u.$$

Тогава

$$\bar{u}\bar{u}_{\bar{t}}-\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}}=\varepsilon^{2c-b}uu_t-\varepsilon^{c-2a}u_{xx}=\varepsilon^{2c-b}(uu_t-u_{xx})$$

при условие $2c-b=c-2a$ или $c=b-2a$. Следователно частното диференциално уравнение е инвариантно относно трансформацията

$$\bar{x}=\varepsilon^a x, \quad \bar{t}=\varepsilon^b t, \quad \bar{u}=\varepsilon^{b-2a} u.$$

Условието за инвариантност на повърхнината е

$$axu_x+btu_t=(b-2a)u.$$

Характеристичната система е

$$\frac{dx}{ax}=\frac{dt}{bt}=\frac{du}{(b-2a)u},$$

а първите интеграли са x^b/t^a и $ut^{2a/b-1}$. Тогава ако $s=x^b/t^a$, инвариантните повърхнини се задават чрез

$$u(x,t)=t^{1-2a/b}f(x^b/t^a).$$

До сега не избирахме конкретни стойности за a, b, и c заради началните и граничните условия, които ще наложат допълнителни ограничения. От граничното условие (22) имаме, че $u_x(x,t)=-Q$ за $x=0$ или

$$t^{1-(2a/b)-a}bx^{b-1}f'(x^b/t^a)=-Q \ \ , \ \ x=0.$$

При $b = 1$ получаваме

$$t^{1-3a} f'(x/t^a) = -Q \quad , \quad x = 0.$$

Но лявата страна не може да зависи от t и следователно $a = \frac{1}{3}$. Така условието за потока в $x = 0$ напълно определи стойностите на $a, b,$ и c. И така, трансформацията на разтягане е

$$\bar{x} = \varepsilon^{1/3} x, \quad \bar{t} = \varepsilon t, \quad \bar{u} = \varepsilon^{1/3} u.$$

Автомоделната променлива е

$$s = x/(\sqrt{3} t^{1/3}), \tag{23}$$

(умножили сме с константата $\sqrt{3}$, за да опростим изчисленията) и едно възможно автомоделно решение е

$$u(x,t) = t^{1/3} f(s) \tag{24}$$

След заместване на (24) в частното диференциално уравнение (19), получаваме обикновено диференциално уравнение за функцията f

$$f'' - f(f - sf') = 0, \quad 0 < s < \infty. \tag{25}$$

Условието за потока (22) при $x = 0$ води до

$$f'(0) = -\sqrt{3} Q. \tag{26}$$

Остана да проверим условията (20) и (21). Да отбележим че при $t \to 0$ имаме $s \to +\infty$ за фиксирана стойност на x. Следователно (20) става

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x > 0}} u(x,t) = \lim_{s \to +\infty} t^{1/3} f(s) = \lim_{\substack{s \to +\infty \\ x > 0}} \frac{x}{\sqrt{3} s} f(s) = 0,$$

а оттам

$$\lim_{s \to +\infty} f(s) = 0. \tag{27}$$

Условието (21) става

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ t > 0}} u(x,t) = \lim_{\substack{x \to \infty \\ t > 0}} t^{1/3} f(s) = 0,$$

което води отново до условие (27). Очевидно трите условия (20), (21) и (22) се обединяват в две -(22) и (23) за f. Този вид обединение се получи, защото f удовлетворява обикновено диференциално уравнение от втори ред. Така ние приключихме с опростяването; граничната задача (19)-(22) беше сведена до решаването на обикновеното диференциално уравнение (25) с гранични условия (26) и (27). Тогава автомоделното решение може да се представи с формулата (24).

Обикновеното диференциално уравнение, до което сведохме нелинейната дифузионна задача (19), не може да се реши аналитично. Една възможност е граничната задача (25), (26),(27) да бъде решавана с подходящ числен метод.

Друг възможен подход е диференциалното уравнение да се сведе до уравнение от първи ред в така наречените променливи на Ли, като се възползваме от неговата инвариантност по същия начин, по който подходихме и при частното диференциално уравнение.

11. Инвариантни обикновени диференциални уравнения.

Дефиниция. *Обикновено диференциално уравнение от втори ред, записано във вида*

$$f'' - G(s, f, f') = 0 \tag{28}$$

се нарича инвариантно относно трансформацията на разтягане

$$\bar{s} = \varepsilon s, \quad \bar{f} = \varepsilon^b f, \quad \varepsilon \in I, \tag{29}$$

ако

$$\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{s}^2} - G(\bar{s}, \bar{f}, d\bar{f}/d\bar{s}) = A(\varepsilon)(f'' - G(s, f, f')) \tag{30}$$

за някаква функция A за $\forall \varepsilon \in I$.

Теорема. *Ако обикновеното диференциално уравнение от втори ред (28) е с точност до константа инвариантно относно трансформацията на разтягане, дефинирана чрез (29), тогава (28) може да бъде сведено до обикновено диференциално уравнение от първи ред от вида*

$$\frac{dv}{du} = \frac{H(u, v) - (b-1)v}{v - bu}, \tag{31}$$

където $u = \phi(s, f)$ и $v = \psi(s, f, f')$ са първи интеграли на характеристичната система

$$\frac{ds}{s} = \frac{df}{bf} = \frac{df'}{(b-1)f'} \tag{32}$$

и H е някаква фиксирана функция, зависеща от G. u и v се наричат променливи на Ли.

Доказателство. Доказателството е подобно на доказателството на Теорема 2. от Лекция 10. Понеже

$$\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{s}^2} - G(\bar{s}, \bar{f}, d\bar{f}/d\bar{s}) = \varepsilon^{b-2}f'' - G(\varepsilon s, \varepsilon^b f, \varepsilon^{b-1}f'),$$

за инвариантност е необходимо

$$\varepsilon^{2-b}G(\varepsilon s, \varepsilon^b f, \varepsilon^{b-1}f') = G(s, f, f')$$

за $\forall \varepsilon \in I$. Диференцираме по ε и за $\varepsilon = 1$ получаваме частно диференциално уравнение за G

$$sG_s + bfG_f + (b-1)f'G_{f'} = (b-2)G.$$

Характеристичната система е

$$\frac{ds}{s} = \frac{df}{bf} = \frac{df'}{(b-1)f'} = \frac{dG}{(b-2)G}$$

с първи интеграли

$$u \equiv \frac{f}{s^b}, \quad v \equiv \frac{f'}{s^{b-1}}, \quad \frac{G}{s^{b-2}}.$$

Следователно

$$G = s^{b-2}H(u, v)$$

за някаква функция H (да отбележим, че H е известна, ако G е известна). По-нататъшни изчисления на du и dv показват, че (31) е в сила винаги, когато е в сила (28).

Пример. Да разгледаме граничната задача за $f(s)$, получена в *Пример 4* на Лекция 10. и зададена чрез (25)-(27)

$$f'' - f(f - sf') = 0, \quad 0 < s < \infty \tag{33}$$

$$f'(0) = -\sqrt{3}Q \tag{34}$$

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0. \tag{35}$$

Ако направим разтягащата трансформация

$$\bar{s} = \varepsilon s, \quad \bar{f} = \varepsilon^b f,$$

то

$$\frac{d^2\bar{f}}{d\bar{s}^2} - \bar{f}(\bar{f} - \bar{s}\frac{d\bar{f}}{d\bar{s}}) = \varepsilon^{b-2}f'' - \varepsilon^{2b}f(f - sf').$$

За инвариантност е необходимо $b - 2 = 2b$ или $b = -2$. Според Теорема 3 променливите на Ли u и v са

$$u = s^2 f, \quad v = s^3 f'. \tag{36}$$

Тогава

$$\frac{du}{ds} = \frac{v}{s} + \frac{2u}{s}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{u^2}{s} - \frac{uv}{s} + \frac{3v}{s}$$

и полученото уравнение от първи ред е

$$\frac{dv}{du} = \frac{u^2 - uv + 3v}{v + 2u}.$$

Всъщност (36) не е най-добрият избор на променливи на Ли . Теорема 3 предполага само, че сме ги избрали като първи интеграли на характеристичната система (32). Изборът

$$u_1 = s^2 f = u, \quad v_1 = s^2(f - sf') = u - v \tag{37}$$

води до по-простото уравнение

$$\frac{dv_1}{du_1} = \frac{v_1(2 - u_1)}{3u_1 - v_1}. \tag{38}$$

Сведохме обикновеното диференциално уравнение от втори ред (33) до обикновеното диференциално уравнение от първи ред (38) в равнината uv (наричана *равнина на Ли*) по отношение на променливите u и v дефинирани чрез (36) или(37).