

10+. Общо квазилинейно вълново уравнение от I ред.

Нека

$$(1) \quad a(x, t, u)u_x + b(x, t, u)u_t = c(x, t, u)$$

е частно диференциално уравнение от първи ред за функцията $u = u(x, t)$.

За да получим общото му решение, подходяме геометрично: записваме (1) във вид на скалярно произведение на 2 вектора:

$$(2) \quad \langle a, b, c \rangle \cdot \langle u_x, u_t, -1 \rangle = 0.$$

Ако $u = u(x, t)$ е интегрална повърхнина (решение на (1)), то (2) означава, че нормалният вектор $\langle u_x, u_t, -1 \rangle$ към тази повърхнина в дадена точка е перпендикулярен на вектора $\langle a, b, c \rangle$. Следователно $\langle a, b, c \rangle$ е тангентен към повърхнината $u(x, t)$ и следователно интегралните повърхнини трябва да се формират от интегралните криви на векторното поле $\langle a, b, c \rangle$. Интегралните криви са решения на СОДУ

$$(3) \quad \frac{dx}{d\xi} = a(x, t, u), \quad \frac{dt}{d\xi} = b(x, t, u), \quad \frac{du}{d\xi} = c(x, t, u),$$

където ξ е параметър по кривите. Параметърът ξ може да бъде изключен от системата (3) и тя може да бъде записана като

$$(4) \quad \frac{dx}{a(x, t, u)} = \frac{dt}{b(x, t, u)} = \frac{du}{c(x, t, u)}.$$

Системата (3) или (4) се нарича **характеристична система** за уравнението (1).

Релация от вида $\Phi(x, t, u) = \text{const}$ се нарича **първ интеграл** на системата (4), ако $\phi(x, t, u)$ е константа върху всяка интегрална крива на (4). Следната Лема ни дава, че общото решение на системата (4) се състои от кои да е два нейни независими първи интеграла.

Лема 1. Нека $\phi, \psi \in C^1$ и да предположим, че

$$(5) \quad \phi(x, t, u) = c_1, \quad \psi(x, t, u) = c_2,$$

са два първи интеграла на (4), удовлетворяващи условието за независимост

$$\nabla \phi \times \nabla \psi \neq 0.$$

Ако C е някаква интегрална крива на (4), то има стойности на c_1 и c_2 такива, че сечението на двете повърхнини (5) е крива, която съвпада с C .

Лема 2. Ако $\phi(x, t, u) \in C^1$ е пръв интеграл на (4), то

$$(6) \quad a\phi_x + b\phi_t + c\phi_u = 0.$$

Нещо повече, ако $\phi_u \neq 0$, то $u = u(x, t)$, определено от $\phi(x, t, u) = 0$, е решение на (1).

Теорема. Нека $\phi(x, t, u) \in C^1$, $\psi(x, t, u) \in C^1$ са два независими първи интеграла на характеристичната система (4) с $\phi_u^2 + \psi_u^2 \neq 0$. Тогава общото решение на (1) се дава с

$$H(\phi(x, t, u), \psi(x, t, u)) = 0,$$

където H е произволна функция.