

1 Размерност

Физичните величини се изразяват чрез числа, които се получават чрез измерване - чрез пряко или косвено сравняване със съответните *мерни единици*. Мерните единици са *основни* и *производни*. *Основните* единици се задават произволно чрез едни или други еталони. *Производните* (изкуствени или природни) единици се получават от основните. Например скоростта по определение представлява отношението на разстоянието, изминато за определен интервал от време, към големината на този интервал от време. Затова за единица скорост може да се приеме отношението на единица дължина към единица време в дадена система. Също така плътността по определение е отношението на някаква маса към затворения в нея обем. Следователно за единица плътност може да се приеме отношението на единица маса към единица обем, т.е. към куба на единица дължина.

Множеството от основни мерни единици, достатъчни за измерване характеристиките на разглеждан клас явления, се нарича *система от мерни единици*. Например в механиката често се използва системата СГС, в която за единица маса се приема 1 грам (г) (1/1000 от масата на еталон), за единица дължина - 1 сантиметър (см) (1/1000 от еталон с дължина, определена чрез дължината на вълна от спектъра на криптон - 86); за единица време - 1 секунда (с) (дефинирана чрез една от честотите в спектъра на цезия). В тази система единицата за скорост е 1 см/с, за ускорение - 1 см/с², за сила - 1 г см/с².

Клас от системи мерни единици се нарича множеството от системи мерни единици, различаващи се помежду си само по величините на основните мерни единици. Системата СГС влиза в класа, в който основни единици са

$$MLT : \frac{г}{M}, \frac{см}{L}, \frac{с}{T}$$

където M, L, T са числа, показващи колко пъти се намаляват основните единици за маса, дължина и време при прехода от СГС към друга система от класа. Този клас се означава с MLT (M - mass, L - lenght, T - time, т.е. чрез последователно изписване на символите на величините, чиито мерни единици са приети за основни). Да отбележим, че M, L, T имат двояк смисъл. Към класа MLT влиза системата СИ: (кг, м, с). При прехода от СГС към СИ: $M = 1 : 1000, L = 1 : 100, T = 1$.

Често употребяван клас е и FLT (F - force:)

$$FLT : \frac{кгс}{F}, \frac{см}{L}, \frac{с}{T}$$

Единицата за сила е кгс (килограм-сила)=силата, съобщаваща на маса 1 кг. ускорение, равно на 9,80665 м/с².

Размерност на физичната величина се нарича функция, определяща колко пъти ще се измени числената стойност на тази физична величина при прехода от изходната система мерни единици към друга система вътре в даден клас. Максвел е предложил означението $[\varphi]$ за размерността на величината φ . Размерността зависи от *класа* системи мерни единици!!!

Величина, чиято числена стойност е една и съща във всички системи от даден клас, се нарича *безразмерна*. Размерността на безразмерната величина е равна на 1.

Пример 1. Ако намалим единицата за маса M пъти, за дължината - L пъти, за време - T пъти, то числената стойност на всяка измервана сила ще нарасне MLT^{-2} пъти. Следователно за размерността на силата f в класа MLT имаме:

$$[f] = MLT^{-2}.$$

Размерността можем да определим и като използваме известните зависимости между физичните величини. Тъй като **размерностите на двете страни на едно физическо смислено уравнение трябва да са равни**, за размерността на силата f от уравнението $f = ma$ получаваме $[f] = [m][a] = MLT^{-2}$.

Пример 2. Размерността на масата m в класа FLT е $[m] = FT^2L^{-1}$.

Пример 3. Размерността на енергията e в класа MLT е $[e] = ML^2T^{-2}$.

Във всички тези случаи размерността е степенен едночлен, а така е и в общия случай. Това следва от естественото, но дълбоко по смисъл твърдение (което е следствие от фундаменталния общофизически принцип за ковариантността):

Вътре в даден клас всички системи са равнопоставени.

Следователно изборът на изходната система за характеристика на даден клас е без значение.

Величините $q_1, q_2, \dots, q_m$ имат *независими размерности*, ако размерността на нито една от тях не може да се представи във вид на произведение от степени на размерностите на останалите. Например, размерностите на дължината L , скоростта LT^{-1} и енергията ML^2T^{-2} са независими; размерностите на дължината L , скоростта LT^{-1} и ускорението LT^{-2} са зависими.

Безразмерните величини $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ са *независими*, ако представянето на нито една от тях чрез съответните размерни величини не може да се изрази във вид на произведение от степени на представянията на останалите.

Преди да формулираме основният резултат в размерностния анализ (РА) - П-теоремата, ще дадем един пример за прилагането ѝ. Смисълът ѝ е, че ако имаме физичен закон, който свързва известен брой физични величини, то съществува еквивалентен закон, който свързва независимите безразмерни величини, които могат да се формират от изходните размерни. Името на теоремата идва от означенията $\Pi_1, \Pi_2, \dots$, които се използват за безразмерните величини. Тя за първи път е формулирана от А. Vashy през 1892 г. През 1914 г. Е. Buckingham я доказва в някои специални случаи и често тя носи неговото име.

И така, да разгледаме следния пример. Той илюстрира пресмятанията, които е направил Г. I. Taylor, за да изчисли енергията на първия атомен взрив, след като е обработил филма на Дж. Мак за разпространението на огненото кълбо (филмът е бил заснет по време на американските ядрени опити през 40-те години). При такъв взрив за кратко време в достатъчно малка област, която може да бъде разглеждана като точка, се освобождава голямо количество енергия e . От центъра на взрива се разпространява мощна ударна вълна; налягането зад нея е от порядъка на стотици хиляди атмосфери, затова началното налягане на въздуха може да бъде пренебрегнато в ранния стадий на взрива.

Естествено е да има връзка между радиуса r на фронта на вълната, времето t , началната плътност на въздуха ρ и отделената (освободената) енергия e . Следователно ние предполагаме физичен закон от вида

$$g(t, r, \rho, e) = 0. \quad (1.1)$$

П-теоремата на Бъкингъм твърди, че има еквивалентен физичен закон, свързващ независимите безразмерни величини, които могат да бъдат формирани от t, r, ρ и e . Знаем, че $[t] = T, [r] = L, [e] = ML^2T^{-2}, \rho = ML^{-3}$. Следователно една безразмерна величина е $r^5\rho/t^2e$ и лесно се вижда, че други независими безразмерни величини не могат да се получат от t, r, ρ и e . П-теоремата гарантира, че физичният закон (1.1) е еквивалентен на физичен закон, съдържащ само безразмерните величини, следователно в този случай (1.1) е еквивалентен на

$$f\left(\frac{r^5\rho}{t^2e}\right) = 0. \quad (1.2)$$

От (1.2) следва, че физичният закон трябва да има вида

$$\frac{r^5\rho}{t^2e} = \text{const},$$

или

$$r = C \left(\frac{et^2}{\rho}\right)^{1/5}, C = \text{const} \quad (1.3)$$

Следователно само от размерностни съображения получаваме, че радиусът на вълновия фронт зависи от $t^{2/5}$. Експериментите и фотографите на експлозиите потвърждават тази зависимост. Константата C зависи от отношението на специфичната топлина при постоянно налягане и специфичната топлина при постоянен обем. Тя може да бъде определена като се използват уравненията на газовата динамика ($C \approx 1$). Като се наложи кривата (1.3) върху

експерименталните данни за r в зависимост от t , началната енергия e може да бъде пресметната, тъй като C и ρ са известни - Taylor е получил $e \sim 10^{20}$ ерг (число, което се е считало секретно). Макар горните пресмятания да са само опростена версия на оригиналното доказателство на Taylor, те показват, че евристичните размерностни съображения могат да дадат една реална картина за естеството на физическия процес и е едно безценно средство за приложния математик, физик или инженер.

2 П-Теорема на Бъкингам

Нека

$$f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0 \quad (2.1)$$

е физичен закон, свързващ m величини $q_1, q_2, \dots, q_m$, които са размерни. В даден клас $L_1, L_2, \dots, L_n$, $n < m$, подходящ за задачата, размерностите на q_i се определят така:

$$[q_i] = L_1^{a_{1i}} L_2^{a_{2i}} \dots L_n^{a_{ni}} \quad (2.2)$$

с някакви числа $a_{1i}, \dots, a_{ni}$. Числените стойности на q_i обаче ще зависят от конкретната система мерни единици от класа $L_1, \dots, L_n$. Нека $l_1, l_2, \dots, l_n$ и $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$ са две системи единици в класа $L_1, \dots, L_n$ и нека

$$l_i = \lambda_i \bar{l}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3)$$

Ако $q_1, q_2, \dots, q_m$ от (2.1) са измерени в системата $l_1, l_2, \dots, l_n$, а $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m$ - в $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$, то

$$\bar{q}_i = \lambda_1^{a_{1i}} \lambda_2^{a_{2i}} \dots \lambda_n^{a_{ni}} q_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.4)$$

Дефиниция. Физичният закон (2.1) е независим от мерните единици (unit free), ако за всеки избор на реалните числа $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ имаме $f(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_m) = 0$ тогава и само тогава, когато $f(q_1, q_2, \dots, q_m) = 0$.

Матрицата $A[n \times m]$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2m} \\ \vdots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

се нарича размерностна матрица.

Пример 1. Физичният закон (закон на Галилей)

$$f(x, t, g) \equiv x - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (2.6)$$

свързва разстоянието x и времето t при свободно падане на тяло в постоянно гравитационно поле g . В системата СГС x се измерва в см., t - в с., g - в см/с². Ако сменим мерните единици на основните величини x и t с м. и мин., то в новата система $\bar{x} = \lambda_1 x$, $\bar{t} = \lambda_2 t$, $\lambda_1 = \frac{1}{100}$, $\lambda_2 = \frac{1}{60}$. Понеже $[g] = LT^{-2}$, то $\bar{g} = \lambda_1 \lambda_2^{-2} g$. Тогава

$$f(\bar{x}, \bar{t}, \bar{g}) = \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{g}\bar{t}^2 = \lambda_1 x - \frac{1}{2}\lambda_1 \lambda_2^{-2} g (\lambda_2 t)^2 = \lambda_1 (x - \frac{1}{2}gt^2) = 0.$$

Следователно (2.6) е независим от мерните единици.

П-теорема (на Бъкингам). Нека (2.1) е независим от мерните единици физичен закон, който свързва размерните величини $q_1, q_2, \dots, q_m$. Нека $L_1, \dots, L_n$, $n < m$ са основни размерности и

$$[q_i] = L_1^{a_{1i}} L_2^{a_{2i}} \dots L_n^{a_{ni}}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

и нека $r = \text{rank} A$, A е матрицата (2.5). Тогава съществуват $m - r$ независими безразмерни величини $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}$, които могат да бъдат формирани от $q_1, \dots, q_m$, и физичният закон (2.1) е еквивалентен на

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = 0, \quad (2.7)$$

изразен в термините само на тези безразмерни величини.

Пример 2. В момента $t = 0$ количество топлинна енергия e , концентрирано в точка от пространството, се освобождава и разпространява в област с нулева температура. Ако r е радиалното разстояние от източника, а t е времето, задачата е да се определи температурата u като функция на r и t . Разбира се задачата може да се формулира като начално-гранична задача за уравнението на топлопроводността (дифузията), но ние ще искаме да видим какво ще ни даде РА.

1. Първата стъпка е да определим от какво зависи температурата u . Освен от e, r и t естествено е да зависи от топлемостта c_v на средата ($E\Theta^{-1}L^{-3}$) и от температуропроводността κ (L^2T^{-1}). Следователно ние предполагаме физичен закон от вида:

$$f(t, r, u, e, \kappa, c_v) = 0 \quad (2.8)$$

2. Втората стъпка е да определим основните размерности $L_1, L_2 \dots L_n$, чрез които да определим шестте размерни величини. Подходящ избор е T, L, Θ, E . Тогава

$$[t] = T, [r] = L, [u] = \Theta, [e] = E, [\kappa] = L^2T^{-1}, [c_v] = E\Theta^{-1}L^{-3}$$

$$A = \begin{matrix} & T & L & \Theta & E \\ \begin{matrix} t \\ r \\ u \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \kappa \\ c_v \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, r = \text{rank} A = 4$$

следователно $m - r = 6 - 4 = 2$. За да намерим двете безразмерни величини, постъпваме така:

Ако Π е безразмерна величина, то

$$\begin{aligned} 1 = [\Pi] &= [t^{\alpha_1} r^{\alpha_2} u^{\alpha_3} e^{\alpha_4} \kappa^{\alpha_5} c_v^{\alpha_6}] = \\ &= T^{\alpha_1} L^{\alpha_2} \Theta^{\alpha_3} E^{\alpha_4} L^{2\alpha_5} T^{-\alpha_5} E^{\alpha_6} \Theta^{-\alpha_6} L^{-3\alpha_6} = \\ &= T^{\alpha_1 - \alpha_5} L^{\alpha_2 + 2\alpha_5 - 3\alpha_6} \Theta^{\alpha_3 - \alpha_6} E^{\alpha_4 + \alpha_6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_5 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_5 - 3\alpha_6 &= 0 \\ \alpha_3 - \alpha_6 &= 0 \\ \alpha_4 + \alpha_6 &= 0 \end{aligned}$$

Матрицата на тази хомогенна система е A , $\text{rank} A = 4$, неизвестните са 6, следователно имаме $6-4=2$ линейно независими решения. Такива са:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_6 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1, \quad \alpha_5 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_6 = 1$$

Това дава 2 безразмерни величини

$$\Pi_1 = \frac{r}{\sqrt{\kappa t}}, \quad \Pi_2 = \frac{uc_v}{e}(\kappa t)^{3/2}.$$

Π -теоремата гарантира, че физичният закон (2.8) е еквивалентен на

$$F(\Pi_1, \Pi_2) = 0,$$

или $\Pi_2 = g(\Pi_1)$ за някаква функция g , и следователно

$$u = \frac{e}{c_v} (\kappa t)^{-3/2} g\left(\frac{r}{\sqrt{\kappa t}}\right)$$

Без да формулираме диференциалната задача, успяхме да определим зависимостта на u от t .

- Упражнения: определете тази зависимост, ако енергията e се разпространява само
- върху права през точката, в която е съсредоточена;
 - в равнина през точката, в която е съсредоточена.

Доказателство на Π -теоремата.

Трябва да докажем 2 неща:

- а) От величините $q_1, \dots, q_m$ могат да бъдат формирани $m-r$ независими безразмерни величини, където $r = \text{rank} A$;
- б) Ако $\Pi_1, \dots, \Pi_{m-r}$ са тези $(m-r)$ безразмерни променливи, то (2.1) е еквивалентен на физичен закон от вида $F(\Pi_1, \dots, \Pi_{m-r}) = 0$.

а) Доказателството е точно както в примера. Нека рангът на A е r , Π е безразмерна величина, и нека

$$\Pi = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_m^{\alpha_m} \quad (2.9)$$

за някакви α_i .

В термините на основните размерности $L_1, \dots, L_n$ имаме

$$1 = [\Pi] = \frac{(L_1^{a_{11}} L_2^{a_{21}} \dots L_n^{a_{n1}})^{\alpha_1} (L_1^{a_{12}} L_2^{a_{22}} \dots L_n^{a_{n2}})^{\alpha_2} \dots (L_1^{a_{1m}} L_2^{a_{2m}} \dots L_n^{a_{nm}})^{\alpha_m}}{L_1^{a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m} L_2^{a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2m}\alpha_m} \dots L_n^{a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m}}$$

следователно показателите трябва да се анулират:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1m}\alpha_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nm}\alpha_m = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Матрицата на тази система от n линейни уравнения с m ($m > n$) неизвестни е точно размерностната матрица A с ранг r . От линейната алгебра знаем, че всяка фундаментална система решения на (2.10) има точно $m-r$ линейно независими решения $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Всяко решение определя безразмерна величина (2.9). Понеже решенията са линейно независими, и безразмерните величини ще са независими.

Преди доказателството на б) ще се върнем на Пример 1.: Показахме, че законът

$$f(x, t, g) \equiv x - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad (2.11)$$

е независим от мерните единици. Ако изберем L и T за основни размерности, то $[g] = LT^{-2}$

$$A = \begin{matrix} & L & T \\ \begin{pmatrix} x & t & g \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & , & \text{rank } A = 2, \end{matrix}$$

можем да образуваме $3 - 2 = 1$ безразмерна величина Π .

$$\begin{aligned} 1 = [\Pi] &= [x^{\alpha_1} t^{\alpha_2} g^{\alpha_3}] = L^{\alpha_1} T^{\alpha_2} L^{\alpha_3} T^{-2\alpha_3} = L^{\alpha_1 + \alpha_3} T^{\alpha_2 - 2\alpha_3} \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_3 &= 1, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 2 \\ \Pi_1 &= \frac{t^2}{x} g \rightarrow g = \frac{x\Pi_1}{t^2}, \end{aligned}$$

следователно можем да дефинираме функция $G(x, t, \Pi_1) \equiv f(x, t, \frac{x\Pi_1}{t^2})$.

Законът

$$G(x, t, \Pi_1) = 0 \text{ или } x - \frac{1}{2}(x\Pi_1) = 0 \quad (2.12)$$

е еквивалентен на (2.11) и е независим от мерните единици, понеже (2.11) е независим. Тогава дефинираме F чрез

$$F(\Pi_1) = G(1, 1, \Pi_1) = 1 - \frac{1}{2}\Pi_1 = 0,$$

който очевидно е еквивалентен на (2.11) и (2.12).

б) От линейната алгебра знаем как да намерим фундаментална система решения на системата (2.10). Да подредим основните размерности $L_1, L_2, \dots, L_n$ така, че първите r стълба на матрицата A да са линейно независими. Ще изберем такива редове на матрицата A , че матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \dots a_{1r} \\ a_{21}a_{22} \dots a_{2r} \\ \vdots \\ a_{r1}a_{r2} \dots a_{rr} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

да има ранг r . Да разгледаме системата

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1r}\alpha_r = -a_{1,r+1}\alpha_{r+1} - \dots - a_{1m}\alpha_m \\ \vdots \\ a_{r1}\alpha_1 + a_{r2}\alpha_2 + \dots + a_{rr}\alpha_r = -a_{r,r+1}\alpha_{r+1} - \dots - a_{rm}\alpha_m \end{cases} \quad (2.14)$$

Да заместим вектора $(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_m)$ последователно със следните единични вектори:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{m-r} = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

На всеки единичен вектор e_i съответства решение на (2.14), и нека тези $m - r$ решения са:

$$(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1r}), (c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2r}) \dots, (c_{m-r,1}, c_{m-r,2}, \dots, c_{m-r,r})$$

Тогава фундаменталната сиситема решения на (2.10) е

$$(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ir}, e_i), \quad i = 1, 2, \dots, m - r, \quad e_i \in R^{m-r}.$$

Следователно

$$\Pi_i = q_1^{c_{i1}} q_2^{c_{i2}} \dots q_r^{c_{ir}} q_{r+i}, \quad i = 1, 2, \dots, m - r. \quad (2.15)$$

Ще докажем сега еквивалентността на (2.1) и (2.7).

От (2.15) намираме

$$q_{r+i}(\Pi_i) = \Pi_i q_1^{-c_{i1}} q_2^{-c_{i2}} \dots q_r^{-c_{ir}}, \quad i = 1, 2, \dots, m - r.$$

Нека дефинираме функцията:

$$G(q_1, \dots, q_r, \Pi_1, \dots, \Pi_{m-r}) \equiv$$

$$f(q_1, \dots, q_r, \Pi_1 q_1^{-c_{11}} \dots q_r^{-c_{1r}}, \dots, \Pi_{m-r} q_1^{-c_{m-r,1}} \dots q_r^{-c_{m-r,r}})$$

Понеже законът (2.1) е независим от мерните единици, то същото е вярно и за закона

$$G(q_1, q_2, \dots, q_r, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = 0.$$

Следователно, последният е еквивалентен на закона

$$G(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r, \bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_{m-r}) = 0,$$

където $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_r, \bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_{m-r}$ са променливите в друга система мерни единици от класа $L_1, L_2, \dots, L_n$. Щом Π_i са безразмерни, то $\bar{\Pi}_j = \Pi_j$. Ще изберем нова сиситема мерни единици в класа $L_1, L_2, \dots, L_n$, така че $\bar{q}_i = 1, i = 1, 2, \dots, r$. Следователно законът

$$G(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = 0$$

е еквивалентен на закона (2.1). Полагаме

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = G(1, 1, \dots, 1, \Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r})$$

и получаваме желанния закон (2.7):

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{m-r}) = 0$$

За да завършим доказателството, остава да покажем, че винаги е възможно да се избере такава система мерни единици в класа $L_1, L_2, \dots, L_n$, че $\bar{q}_i = 1, i = 1, 2, \dots, r$.

Нека q_i са измерени в системата $l_1, l_2, \dots, l_n$, $\bar{q}_i$ са измерени в системата $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_n$ и нека $l_j = \lambda_j \bar{l}_j, \lambda_j > 0$. Тогава

$$\bar{q}_i = \lambda_1^{a_{1i}} \lambda_2^{a_{2i}} \dots \lambda_r^{a_{ri}} q_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Условието $\bar{q}_i = 1$ дават

$$0 = \ln 1 = \ln \bar{q}_i = a_{1i} \ln \lambda_1 + a_{2i} \ln \lambda_2 + \dots + a_{ri} \ln \lambda_r + \ln q_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Това е система уравнения

$$\begin{cases} a_{11} \ln \lambda_1 + a_{21} \ln \lambda_2 + \dots + a_{r1} \ln \lambda_r = -\ln q_1 \\ \dots \\ a_{1r} \ln \lambda_1 + a_{2r} \ln \lambda_2 + \dots + a_{rr} \ln \lambda_r = -\ln q_r \end{cases},$$

чиято матрица е матрицата (2.13) с ранг r . Следователно тя има единствено решение $(\ln \lambda_1, \ln \lambda_2, \dots, \ln \lambda_r)$, от което числата λ_i могат да бъдат определени така, че да удовлетворяват $\bar{q}_i = 1$. Това завършва доказателството.

Успехът при използването на анализа на размерностите за решаване на даден физичен проблем съществено зависи от началните 2 стъпки:

- изборът на променливите и параметрите, които са съществени за физическия процес;
- изборът на основните размерности.

И едната и другата зависят от опита и от интуицията на изследователя. Получените зависимости трябва да бъдат проверени чрез експерименти - реални и числени.