Будем рассматривать семейство схем, для которых выполнены условия (5), (6), (9). Нас интересуют схемы, сходящиеся в случае разрывных $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$.

В следующем параграфе приводится пример, показывающий, что не всякая однородная схема вида (4), удовлетворяющая условиям аппроксимации (5) (в случае гладких коэффициентов) и условиям разрешимости (6), сходится в классе разрывных $k(x)$.

§ 2. Консервативные схемы

1. Пример схемы, расходящейся в случае разрывных коэффициентов. Рассмотрим задачу (1) из § 1 при $q \equiv 0$, $f \equiv 0$:

$$(ku')' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0. \tag{1}$$

Представим $(ku')'$ в виде $ku'' + k'u'$. Естественно, на первый взгляд, для получения аппроксимации второго порядка провести замену

$$u'' \sim u_{\bar{x}x}, \quad k' \sim k_{\overset{\circ}{x}} = \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h}, \quad u' \sim u_{\overset{\circ}{x}} = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}.$$

Тогда получим схему

$$k_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = 0, \tag{2}$$

$$0 < i < N, \quad y_0 = 1, \quad y_N = 0.$$

Преобразуя (2) к виду (4) из § 1, найдем

$$a_i = k_i - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad b_i = k_i + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4}, \quad d_i = \varphi_i = 0, \tag{3}$$

т. е. схема (2) принадлежит семейству (4) из § 1.

Условия (5) и (6) из § 1 выполнены, так как на участках гладкости функции $k(x)$ имеем:

$$a_i = k_i - 0{,}5hk_i' + O(h^2), \quad b_i = k_i + 0{,}5hk_i' + O(h^2),$$
$$0{,}5(a_i + b_i) = k_i, \quad b_i - a_i = 0{,}5(k_{i+1} - k_{i-1}) = hk_i' + O(h^3),$$

так что $a_i > 0$, $b_i > 0$ при достаточно малом h.

Покажем, что схема (2) расходится даже в классе кусочно-постоянных коэффициентов

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 < x < \xi, \\ k_2, & \xi < x < 1, \end{cases} \tag{4}$$

где ξ — иррациональное число, $\xi = x_n + \theta h$, $x_n = nh$, $0 < \theta < 1$.

Точное решение задачи (1), (4), удовлетворяющее условиям сопряжения, имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \alpha_0 x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \quad \alpha_0 = (\varkappa + (1-\varkappa)\xi)^{-1}, \\ \beta_0(1 - x), & \xi \leqslant x \leqslant 1, \quad \beta_0 = \varkappa\alpha_0, \quad \varkappa = k_1/k_2. \end{cases} \tag{5}$$

Найдем решение разностной задачи (2), (4). Так как $a_i = b_i = k_1$ при $0 < i < n$, $a_i = b_i = k_2$ при $n+1 < i < N$, то уравнение (2) принимает вид $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = 0$ при $i \neq n$ и $i \neq n+1$. Отсюда находим

$$y_i = y(x_i) = \begin{cases} 1 - \alpha x_i, & 0 \leqslant x \leqslant x_n, \\ \beta(1 - x_i), & x_{n+1} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{6}$$

Коэффициенты α и β определим из уравнений при $i = n$, $i = n+1$:

$$b_n[\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] + a_n\alpha h = 0,$$
$$b_{n+1}\beta h + a_{n+1}[\beta(1 - x_{n+1}) - (1 - \alpha x_n)] = 0. \tag{7}$$

Из (3) и (4) находим $a_n = (5k_1 - k_2)/4$, $a_{n+1} = (k_1 + 3k_2)/4$, $b_n = (3k_1 + k_2)/4$, $b_{n+1} = (5k_2 - k_1)/4$. Решая уравнения (7) относительно α, β и учитывая, что $x_n = \xi - \theta h$, $x_{n+1} = \xi + (1-\theta)h$, определим $\beta = \mu\alpha$,

$$\alpha = \frac{1}{\mu + (1-\mu)\xi + h(\lambda - \theta - (1-\theta)\mu)}, \quad \mu = \frac{3+\varkappa}{5-\varkappa}\lambda, \quad \lambda = \frac{5\varkappa - 1}{3\varkappa + 1}. \tag{8}$$

Предельный переход при $h \to 0$ дает

$$\lim_{h \to 0} \alpha = \bar{\alpha}_0, \quad \lim_{h \to 0} \beta = \bar{\beta}_0,$$

где

$$\bar{\alpha}_0 = (\mu + (1-\mu)\xi)^{-1}, \quad \bar{\beta}_0 = \mu\bar{\alpha}_0. \tag{9}$$

Функции (6) доопределим на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ (при помощи линейной интерполяции), получим функцию $\tilde{y}(x, h)$, $x \in [0, 1]$, совпадающую с y_i в узлах $x_i = ih$. Найдем предел $\tilde{y}(x, h)$ при $h \to 0$:

$$\bar{u}(x) = \lim_{h \to 0} \tilde{y}(x, h) = \begin{cases} 1 - \bar{\alpha}_0 x, & 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \bar{\beta}_0(1 - x), & \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

Сравним предельную функцию $\bar{u}(x)$ с точным решением $u(x)$, определяемым формулой (5). Из (5), (9) и (10) видно, что $\bar{u}(x) = u(x)$ при $\bar{\alpha}_0 = \alpha_0$, $\bar{\beta}_0 = \beta_0$, а это возможно лишь при $\varkappa = 1$ или $k_1 = k_2$.

Итак, решение (6) разностной задачи (2), (5) при $h \to 0$ стремится к функции $\bar{u}(x)$, которая в случае $k_1 \neq k_2$ отлична от точного решения $u(x)$ задачи (1). Следовательно, схема (2) расходится.

Нетрудно установить физический смысл функции $\bar{u}(x)$. Функция $\bar{u}(x)$ есть решение задачи (1), удовлетворяющее при $x = \xi$ условиям $[\bar{u}] = 0$, $[ku'] = -\bar{\alpha}_0(\mu - \varkappa)k_2 = q$, где q есть мощность со-