

Метод на крайните елементи – 1

Лист с формули и твърдения за финалния ИЗПИТ

- Интегриране по части

$$\iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} v d\Omega = - \iint_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) v ds.$$

- Смяната на променливите към стандартния триъгълен елемент

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_l - x_k & x_m - x_k \\ y_l - y_k & y_m - y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Нека E е образът на дадена област Ω при трансформацията $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Нека

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Тогава

$$\iint_{\Omega} u d\Omega = \iint_E u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta.$$

- Квадратурни формули върху стандартния триъгълен елемент:

Възли	Тегла	Алгебрична степен на точност
$(1/2, 1/2)$	$1/2$	1
$(0,0), (1,0), (0,1)$	$1/6, 1/6, 1/6$	1
$(1/2,0), (1/2,1/2), (0,1/2)$	$1/6, 1/6, 1/6$	2
$(0,0), (1,0), (0,1)$	$3/120, 3/120, 3/120$	3
$(1/2,0), (1/2,1/2), (0,1/2)$	$8/120, 8/120, 8/120$	
$(1/3, 1/3)$	$27/120$	

- (Лема на Bramble–Hilbert) Нека τ е референтна единична област в $\mathbb{R}^n$. Нека $q(u)$ е функционал в $H^{k+1}(\tau)$, за който:

$$(i) \quad q(u+v) \leq q(u) + q(v) \quad (\text{sublinearity});$$

$$(ii) \quad |q(u)| \leq C \|u\|_{H^{k+1}(\tau)} \quad (\text{ограниченост});$$

$$(iii) \quad q(u) = 0, \text{ ако } u \in P_k.$$

Тогава съществува константа C_B такава, че

$$|q(u)| \leq C_B |u|_{H^{k+1}(\tau)}.$$

- Неравенства на Poincaré–Friedrichs:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u^2 ds &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \\ \iint_{\Omega} u^2 d\Omega &\leq C \left\{ \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} u^2 ds \right\} \\ \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 &\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \\ \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C (\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2), \\ \|u\|_{L_2(\partial\Omega)}^2 &\leq C (\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

- (Лема на Соболев) Нека $n = 1, 2, 3$ е размерността на дадена задача. Ако $u \in H^k(\Omega)$ и $k > n/2$, тогава u е непрекъсната и

$$\max_{x \in \Omega} |u(x_1, \dots, x_n)| \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)}.$$