Метод на крайните елементи – 1

2018/2019 академична година, зимен семестър

КОНСПЕКТ

1. По части линейни полиноми на една променлива

Теория: Дефинирайте пространството P_1, мотивирайте въвеждането на интерполационен базис и го дефинирайте. Дефинирайте пространството V_h на по части линейни полиноми и въведете интерполационен базис за това пространство. Приведете (без доказателство) априорни оценки в L_2-норма за грешката при интерполация в P_1. Изведете априорни оценки на грешката при интерполация с функции от V_h. Напишете (без доказателство) общия вид на линейната система за коефициентите на ортогоналната проекция на дадена функция по отношение на дадено скаларно произведение. Приведете (без доказателство) априорни оценки на грешката при L_2-проекцията. Приведете алгоритъма за намиране на L_2-проекция.

2. МКЕ за 1D гранични задачи за ОДУ от втори ред

Задача: по дадена гранична задача за ОДУ от втори ред, да се формулира МКЕ с 1D линейни елементи и да се запише във векторно-матрична форма линейната алгебрична система за възловите неизвестни ***q*.**

3. Априорни оценки на грешката за 1D гранични задачи за ОДУ от втори ред

Теория: Докажете неравенството на Poincarè в 1D. Обяснете накратко (без подробни доказателства) каква е идеята на трика на Nitsche и какъв е крайният резултат, който получаваме.

Задача: Като се използва лемата на Cèa, да се изведе априорна оценка за грешката (в H_1 или в енергетична норма) при апроксимиране на решението на дадена вариационна задача със съответното решение по МКЕ. За целта да се провери, че условията на лемата на Cèa се изпълняват за конкретната билинейна форма.

4. По части линейни полиноми на две променливи

Теория: Дайте дефиниция за триангулация. Обяснете как може да се представи в компютъра дадена триангулация. Дефинирайте пространството на линейните полиноми в 2D и въведете интерполационен базис за него. Дефинирайте пространството на по части линейните полиноми. Приведете (без доказателство) априорни оценки за грешката при интерполация с линейни полиноми. Изведете априорни оценки за грешката при интерполация с по части линейни полиноми. Приведете алгоритъма за намиране на L_2-проекция.

Задача: по дадена триангулация и индекс на базисна функция, определете нейния носител

5. МКЕ за 2D стационарни задачи

*Задача: по дадена гранична задача за стационарно (елиптично) ЧДУ от втори ред, да се формулира МКЕ с 2D линейни елементи и да се запише във векторно-матрична форма линейната алгебрична система за възловите неизвестни **q**.*

Задача: Като се използва лемата на Сèа, да се изведе априорна оценка за грешката (в H_1 или в енергетична норма) при апроксимиране на решението на дадена вариационна задача със съответното решение по МКЕ. За целта да се провери, че условията на лемата на Сеа се изпълняват за конкретната билинейна форма.

6. Поелементни пресмятания

Задача: Да се изведе алгоритъм за асемблиране на дадена глобална матрица (на коравина, на маса и т.н.) или глобален вектор на натоварванията. Вкл. да се апроксимират участващите интеграли с подходящо избрана квадратурна формула.

7. МКЕ за нестационарни задачи

Теория: За диференциалната задача в параграф 4.1 от записките (линейно уравнение на топлопроводността), като се използва наготово резултатът за устойчивост, да се изведе априорна оценка на грешката за полу-дискретното решение.

*Задача: по дадена начално-гранична задача за нестационарно ЧДУ от втори ред, да се формулира МКЕ с 2D линейни елементи и да се запише във векторно-матрична форма системата ОДУ за възловите неизвестни **q**(t).*

8. Съществуване и единственост на решението на вариационната задача

Теория: Да се формулира абстрактната вариационна задача. Да се формулира и да се приведе идея на доказателството на теоремата на Lax-Milgram.

Задача: като се използва теоремата на Lax-Milgram, да се докаже съществуването и единствеността на дадена вариационна задача

9. Обща теория за грешката при приближение по МКЕ

Теория: Да се формулира и докаже ортогоналността по Гальоркин. Да се изведе лемата на Сèа. Да се изведе оценка за $\|u - u_I\|$. Да се приведе (без доказателство) оценка за $\|\nabla(u - u_I)\|$ и да се обясни в какво се състои разликата.

10. Обща елиптична задача

Теория: За общата елиптична задача (ще бъде дадена!) изведете съответната вариационна задача. При предположение за положителна определеност на K(x) изведете достатъчно условие за коерцитивност и непрекъснатост на билинейната форма. Какви изводи можем да направим в този случай за решението на вариационната задача и приближеното решение по МКЕ във вид на по части полином от степен k?

11. Елементи от теорията на Соболевите пространства

Теория: Да се даде дефиниция на Банахово пространство. Да се даде дефиниция на Хилбертово пространство. Да се даде дефиниция на слаба производна. Какво налага въвеждането на това понятие? Да се даде дефиниция на Соболево пространство. Какви специални свойства имат пространствата H^k*?*

12. МКЕ и граничните условия

Каква е разликата между главни и естествени гранични условия? Покажете, че в H^1 *условията на Дирихле се запазват при граничен преход, а тези на Нойман – не. Какви са последствията от този факт за вариационната формулировка?*