Факултет по Математика и Информатика

Евгени Христов Христов

ЗАПИСКИ

по Математически модели във физиката

София, 2003 г.

Анотация. *Основната цел на курса е да запознае студентите с някои важни физически задачи, които допускат изчерпателно (и не много сложно) математическо решение. Курсът започва с формулиране на основите на класическата механика, изхождайки от вариационните принципи на Хамилтон и Лагранж с последващо извеждане на съответните уравнения. В частноскт, разглеждат се моделите на планетарното движение, хармоничния осцилатор, задачата за брахистохроната и др. На тази база се изграждат принципите на квантовата механика, като в основата и се поставя уравнението на Шрьодингер. Детайлно са разгледани моделите на атома на водорода, квантово-механичния осцилатор, разсейване на потенциална яма, различни комутационни съотношения и др. Като едно сравнително ново приложение на използвания тук математически апарат, се извеждат и някои свойства на нелинейните уравнения от солитонен тип. Централно място играе уравнението на Кортевег - де Фриз. Паралелно с разглежданите по–горе въпроси се излагат и необходимите сведения от спектралната теория на линейните оператори в хилбертово пространство. Необходимата математическа подготовка е в рамките на първите два курса на ФМИ.*

Предговор

1. КЛАСИЧЕСКА МЕХАНИКА

1. Някои основни понятия от класическата механика. Закони на Нютон. Абсолютност на времето.

2. Теореми за импулса, момента на импулса и енергията.

3. Движение на тежка материална точка.

4. Правилинейно движение на материална точка. Едномерни колебания.

5. Уравнение на Нютон в криволинейни координати. Полярни, цилиндрични и сферични координати.

6. Движение под действие на централни сили. Задача на Кеплер.

6а. Теорема на Якоби за планетарното движение.

7. Задача на Бернули за брахистохроната, като пример на функционал, където променливата е крива с фиксирани краища.

8.Нелинеен функционал. Производна на Фреше. Уравнения на Ойлер-Лагранж.

8а. Инвариантност на уравненията на Лагранж.

9. Обобщени коодинати и обобщени скорости. Принцип на Хамилтон. Уравнения на Лагранж от втори род.

10.а. Преобразование на Лежандър.

10 б. Уравнения на Хамилтон. Консервативна система- закон за запазване на енергията.

10 в. Вариационен принцип: уравненията на Хамилтон са уравнения на Лагранж за функционала

$$S[p,q] = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t))\, dt.$$

11. Примери за функции на Лагранж и Хамилтон.

12. Класическа скобка на Поасон. Теорема на Якоби– Поасон.

13.а. Уравнение на Хамилтон–Якоби. Пълен интеграл, теорема на Хамилтон–Якоби.

14. Методи за решаване на уравнението на Хамилтон–Якоби: циклични координати, разделяне на променливите. Примери: хармоничен осцилатор, математическо махало.

15. Канонически преобразования. Уравнението на Хамилтон–Якоби като каноническо преобразование.

16. Теорема на Лиувил. Напълно интегрируема хамилтонова система.

17. Инвариантни функционали. Теорема на Ньотер за първи интеграли на уравненията на Лагранж.

2. КВАНТОВА МЕХАНИКА

30. Класическа и квантова механика. Основни правила за квантоване - принцип на съответствието. Оператори на координатата, импулса и енергията.

31. Състояние на квантово- механична система. Еволюция по t на състоянието на квантово- механичната система. Статистическа интерпретация на твърденията в квантовата механика. Основен постулат за комутиращи оператори.

32. Квантово-механична скобка на Поасон. Основни комутационни съотношения.

33. Некомутиращи оператори. Съотношения за неопределеност на Хайзенберг.

34. Квантово-механичен осцилатор. Собствени числа и собствени значения.

35. Момент на импулса.

36. Тримерно уравнение на Шрьодингер. Лапласиан в сферически координати.

37. Разделяне на променливите при сферически симетричен потенциал.

38. Примери– Правоъгълни потенциали.

39. Водороден атом. Изследване на отрицателния спектър.

40. Радиално уравнение на Шрьодингер. Задача за разсейване.

41. Функция на Гриин за оператора на Шрьодингер.

43. Задача за разсейването за уравнението на Шрьодингер на цялата ос

44. Равенство на Парсевал.

45. Обратна задача на разсейването на цялата ос.

46. Оператори на преобразуване.

47. Безотражателни потенциали.

3. НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

51.Метод на характеристиките за уравнението $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$.

52. Уравнение на Бюргерс. Смяна на Коул - Хопф. (Граничен преход. Метод на Лаплас.)

53. Уравнение на Кортевег- де Фриз.

а. Скобка на Поасон- Гарднер.

б. Теорема за единственост.

54. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег - де Фриз.

55. Метод на обратната задача -основна идея.

56. N-солитонно решение на уравнението на КдФ.

6. НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ СВЪРЗАНИ С ОПЕРАТОРА НА ДИРАК.

4. ДОПЪЛНЕНИЯ.

61. Унитарни и изометрични оператори.

62. Преобразование на Фурие –унитарен оператор в $L^2(-\infty, \infty)$.

62.1. Пълнота на функциите на Чебишев –Ермит в $L^2(-\infty, \infty)$

62.2. Унитарна еквивалентност на операторите на умножение и диференциране.

65. Класическата формула за ред на Фурие като задача на собствени значения за оператора $y" + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$. Теорема за попълване по норма в $L^2(0, \pi)$.

66. Регулярен оператор на Щурм - Лиувил.

67. Съществуване и асимптотики на собствените числа и собствените функции.

68. Регулярен оператор на Щурм-Лиувил $L = -D^2 + q(x)$.(продължение)

69. Функция на Гриин за задачата на Щурм-Лиувил.

70. Функция на Гриин за задачата на Щурм-Лиувил.(продължение)

71. Функции на Ермит.

72. Функции на Лежандър.

УВОД–НЯКОИ ЗАБЕЛЕЖКИ ПО ПОВОД МАТЕМАТИКАТА ФИЗИКАТА И ЕКСПЕРИМЕНТА

1. Тук накратко ще изложим някои факти, довели до създаването на механиката.

През II век от новата ера Клавдий Птоломей написва книгата "Алмагест"т.е. "Най великата от книгите". Тук той, изхождайки от известни съображения за хармония–окръжност и равномерно движение, създава теория на епициклите, описващи движението на планетите около Земята посредством система от окръжности, където центърът на всяка следваща се движи по предхождащата окръжност. С нарастване точността на наблюденията системата става все по–сложна. През тринадесетия век Алфонс–III, крал на Кастилия, признава, че ако му искат съвет в момента на създаването на света, той би го създал по по–хубав и прост начин.

Като основоположник на хелиоцентричната система тук ще отбележим Коперник (1473 г.), който полага Слънцето в центъра на Вселената, , предполагайки, че Земята се върти около оста си и се движи около Слънцето. Благодарение на 20–годишните удивително точни наблюдения на Тихо Брахе (1546 г.), се вижда че системата на Коперник е твърде груба. По–точно траекториите, по които се движат планетите не са окръжности. Грешката не превишава 1/15 от градуса.

Кеплер (1571 г.) е теоретик, увлечен от моща на математиката, изучава астрономията и иска да намери закона, по който се движат планетите. Изследвайки движението на Марс, той стига до известните три закона за движението на планетите, които ще споменем малко по–късно. Ето неговата оценка за това, което е направил:

Това което преди 16 години реших да търся и заради което отидох при Тихо Брахе е намерено и това откритие надмина всички мои най–смели очаквания. Жребият е хвърлен, книгата е завършена и мене не ме вълнува дали ще я прочетат сега или в бъдещето нашите потомци. Тя може да чака своя читател в продължение на столетия подобно на това както Всевишният чакаше наблюдателя на своите творения в продължение на шест хиляди години!"

По–точно Кеплер устанавява следните закони:

I Планетите се движат по елиптични орбити, в един от фокусите на които е Слънцето.

II Планетите се движат с постоянна площна скорост, т.е. радиус–вектора на планетата за равни интервали от време замита равни площи.

III Нека с T означим периода на въртене, т.е. времето, за което планетата обикаля орбитата си и с R–нейния радиус (радиус на елипса наричаме 1/2 от голямата ѝ полуос), тогава

$$\frac{T^2}{R^3} = C., \tag{1}$$

където постоянната C е една и съща за всички планети.

Нютон (1687 г.) поставя вместо въпроса как се движат планетите, въпроса защо се движат по описания от Кеплер начин? Така той стига до закона за всемирното привличане.

Ето накратко неговият извод. Ще предполагаме, че орбитата е окръжност. Имаме втория закон (на Нютон), че масата по ускорението е равна на силата:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}. \tag{2}$$

За ускорението, при движение по окръжност, имаме

$$\mathbf{w} = \frac{v^2}{R}. \tag{3}$$

и е насочено към центъра на окръжността. Следователно от (2) имаме за силата

$$\mathbf{F} = M_{pl}\frac{v^2}{R}. \tag{4}$$

Но скоростта $v =$ пътя/времето, т.е.

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{5}$$

От (4) имаме

$$\mathbf{F} = M_{pl}\frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{6}$$

Сега отчитайки (1), т.е. $T^{-2} = CR^{-3}$, получаваме

$$\mathbf{F} = \frac{4\pi^2}{C}\frac{M_{pl}}{R^2}. \tag{7}$$

От тук Нютон полага, че всеки две тела с маси M_1, M_2 се привличат със сила

$$\mathbf{F} = -G\frac{M_1 M_2}{R^2}, \tag{8}$$

където G е универсална гравитационна константа. В последствие ние ще дадеме точен извод на законите на Кеплер, изхождайки от (8) (вж. §4).

Сега малко за математиката и физиката. Майкъл Фарадей–син на ковач, учил за подвързвач на книги, бил "открит"от физика Хъмпри Деви (известен с това, че най–голямото му откритие е Фарадей.) Фарадей обяснявал (като човек не особено знаещ математиката) своите мисли, които особено дразнели математиците. След време се оказало, че със своите жалки картинки той надминал всички математици от своето поколение. Той пише"За мое успокоение, аз открих, че експеримента може да не се бои от математиката, а успешно да съперничи с нея в процеса на откритията."

А сега и за Лагранж (1811), който започва своята "Аналинична механика"със следния увод.

"Съществуват няколко трактата по механика, но този трактат е построен по съвършено нов план. Аз си поставих за цел да сведа както теорията на тази Наука, така и изкуството да се решават отнасящите се към нея задачи към общи формули, чието просто развитие дава всички уравнения , необходими за решаването на всяка задача. В тази книга няма нито една рисунка. Методите, които предлагам тук не изискват геометрически построения и разсъждения, трябва сама последователно да се правят еднообразни пресмятания.

Всички обичащи анализа с удоволствие ще видят, че Механиката е станала един от неговите нови раздели и ще бъдат благодарни за това разширение на областта на неговите приложения."

За да добием известна представа за причините, поради които са толкова различни начините на описване на явленията в класическата и квантовата механика тук привеждаме

някои основни физически константи.

скорост на светлината	$c = 2.997925 \times 10^8$ м/сек.
гравитационна константа	$G = 6.670 \times 10^{-11}$м/кг. сек.
константа на Планк	$h = 1.0545 \times 10^{-27}$см. см/сек.
маса на електрона	$m_e = 9.1091 \times 10^{-31}$ кг.
маса на протона	$m_p = 1.67252 \times 10^{-27}$ кг.
маса на Земята	$M_Z = 5.974 \times 10^{24}$ кг.
радиус на Земята	$R_Z = 6.371 \times 10^6$ м.
разстояние до Слънцето	$R(Z, S) = 1.495985 \times 10^{11}$ м.
разстояние до Луната	$R(Z, L) = 3.84 \times 10^8$ м.
маса на Сънцето	$M_S = 1.989 \times 10^{30}$ кг.
радиус на Слънцето	$R_S = 6.9598 \times 10^8$ м.

1. Някои основни понятия от класическата механика. Закони на Нютон.

Нека имаме инерциална координатна система и нека имаме материална точка с маса m. Тогава е в сила втория закон на Нютон, че масата по ускорението е равна на силата:

$$m\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \tag{1.1}$$

където $\mathbf{r}$ е радиус–вектора на точката:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \tag{1.2}$$

а скоростта

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k}. \tag{1.3}$$

Тук движението (1.1) разглеждаме спрямо инерциалната система $Oxyz$, съществуването на която определя първия закон на Нютон. По–точно, инерциална система е тази, спрямо която точка на която не действуват сили е в покой или се движи равномерно и праволинейно.

В общия случай силата е функция на положението, скоростта и времето.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \tag{1.4}$$

или в координатен запис имаме системата от диференциални уравнения

$$m\ddot{x} = X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{1.4_x}$$

$$m\ddot{y} = Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{1.4_y}$$

$$m\ddot{z} = Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \tag{1.4_z}$$

Тук ще приведем няколко физически важни примера на сили.

1. Сила на тегло:

$$\mathbf{P} = -m\mathbf{g}, \tag{1.5}$$

където $\mathbf{g}$ е постоянен вектор, наричан земно ускорение.

1. Еластична сила:

$$\mathbf{P} = -k\mathbf{r}, \tag{1.6}$$

имаме точка, привързана на еластична нишка, дължината на която в неразтегнато състояние е нула.

3. Сила на триене:

$$\mathbf{F} = -c\mathbf{v}, \tag{1.7}$$

4. Сила на Лоренц:

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right), \tag{1.8}$$

действуваща на заряд q в електромагнитно поле с електрическо напрежение $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитна индукция $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, c е скоростта на светлината.

5. Гравитационната сила на Нютон:

$$\mathbf{F} = -f\frac{Mm}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.9}$$

силата с която маса M, разположена в началото на координатната система $Oxyz$ действува на точка с маса m с радиус–вектор $\mathbf{r}$.

6. Електростатично взаимодействие (сила на Кулон):

$$\mathbf{F} = k\frac{qQ}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{1.10}$$

където материалната точка има електрически заряд q, който може да бъде положителен или отрицателен, Q е заряда на друга точка, при това и двата заряда предполагаме неподвижни, ако $Qq > 0$, то силата е отблъскваща.

Нека отбележим, че формалната структура на полето на гравитационната сила и това на електростатическото поле е една и съща.

Сега ще дадем една важна дефиниция за

ПОТЕНЦИАЛНА СИЛА Силата $\mathbf{F}$ ще наричаме потенциална, ако съществува $V(x, y, z) = V(\mathbf{r})$, такава, че

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right), \tag{1.11}$$

където знака $-$ е въведен за удобство на означенията, оператора набла

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{1.12}$$

В частност, гравитационната сила (1.9) е потенциална, с потенциал

$$V(x, y, z) = -C\frac{1}{r}, \quad C = fMm. \tag{1.13}$$

Действително

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \ldots, \Rightarrow \frac{\partial r^{-1}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{1.14}$$

Ще отбележим още, че потенциала на теглото (1.5) е

$$V(x, y, z) = m\mathbf{g}.\mathbf{r}, \tag{1.15}$$

а потенциала на еластичната сила (1.6) е

$$V(x, y, z) = \frac{kr^2}{2}. \tag{1.16}$$

2. Теореми за импулса, момента на импулса и енергията.

Нека напомним дефиницията на пръв интеграл за уравненията на движение (1.1), т.е. (1.4). В общия случай това е функция

$$\Phi(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t), \tag{2.1}$$

такава, че ако $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ е произволно решение на уравнението (1.1), то сложната функция на времето

$$\Phi(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t), x(t), y(t), z(t), t) = Const., \tag{2.2}$$

където константата $Const.$ е, изобщо, различна за различни движения.

Сега ще докажем следната важна

Теорема за запазване на енергията. Ако силата е потенциална, т.е. имаме (1.11) то е в сила първия интеграл

$$\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r}) = h. \tag{2.3}$$

Доказателство Нека умножим скаларно (1.4) на $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Отчитайки (1.11), имаме

$$m\mathbf{v}\mathbf{w} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v} = 0. \tag{2.4}$$

Но

$$\frac{dv^2(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{t})}{dt} = 2\mathbf{v}(\mathbf{t})\mathbf{w}(\mathbf{t}), \quad \frac{dV(\mathbf{r}(t))}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{v}.$$

Следователно

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + V(\mathbf{r})\right) = \left(m\mathbf{w} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}, \tag{2.5}$$

с което теоремата е доказана.

3. Движение на тежка материална точка.

Ще разглеждаме движението на свободна, тежка, материална точка, т.е. силата $\mathbf{F}$ в уравнението на Нютон

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}, \tag{3.1}$$

е теглото

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}. \tag{3.2}$$

Избираме правоъгълната координатна система O, x, y, z, така, че оста z да бъде насочена вертикално нагоре, т.е. успоредно и в обратна посока на земното ускорение $\mathbf{g}$. Проектирайки уравнението

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g}, \tag{3.3}$$

на осите x, y и z, получаваме системата скаларни уравнения

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Интегрирайки един път, получаваме

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= c_1, \\ \dot{y} &= c_2, \\ \dot{z} &= -gt + c_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Следователно общото решение се дава с формулите

$$\left.\begin{aligned} x &= c_1t + c_4, \\ y &= c_2t + c_5, \\ z &= -\tfrac{gt^2}{2} + c_3t + c_6. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Константите $c_1, c_2, \ldots, c_6$ се определят от началното положение и началната скорост. Това ще проилюстрираме на два примера.

3.1. Движение на тежка точка, хвърлена вертикално нагоре. Нека в началния момент $t_0 = 0$ точката се намира в началото на координатната система и има начална скорост $\mathbf{v}_0$, насочена вертикално нагоре. Имаме началните условия

$$\left.\begin{aligned} x = y = z &= 0, \\ \dot{x} = \dot{y} = 0, &\quad \dot{z} = v_0, \end{aligned}\right\} \quad (t = 0).$$

Подставяйки тези значения в уравненията (3.5), (3.6), получаваме

$$c_1 = c_2 = 0, \quad c_3 = v_0,$$

$$c_4 = c_5 = c_6 = 0,$$

и следователно законът на движение е

$$\left.\begin{array}{c} x = 0, \\ y = 0, \\ z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

От тук се вижда, че движението е праволинейно, със скорост $\dot{z} = v_0 - gt$, равномерно закъснително до момента $t = v_0/g$, когато скоростта $\dot{z} = 0$, след което е равномерно ускорително.

3.2. Движение на тежка точка, хвърлена под ъгъл към хоризонта. Нека при $t = 0$ точката е в началото на координатната система и има начална скорост $\mathbf{v}_0$, която лежи в равнината Oxz и сключва ъгъл α с хоризонта (оста Ox). (Ъгълът α се нарича ъгъл на хвърляне.) Имаме началните условия

$$\left.\begin{array}{c} x = y = z = 0, \\ \dot{x} = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = v_0 \sin\alpha, \end{array}\right\} \quad (t = 0). \qquad (3.8)$$

Подставяйки тези значения в уравненията (3.5), (3.6), получаваме

$$c_1 = v_0 \cos\alpha, \quad c_3 = v_0 \sin\alpha,$$

$$c_2 = c_4 = c_5 = c_6 = 0,$$

и следователно в този случай законът на движение е

$$\left.\begin{array}{c} x = v_0 t \cos\alpha, \\ y = 0, \\ z = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{array}\right\} \qquad (3.9)$$

От тук се вижда, че траекторията е крива в равнината Oxz. За да намерим вида ѝ ще изключим t от (3.9). Получаваме от първото уравнение $t = x/v_0 \cos\alpha$, което заместено в третото дава траекторията

$$z = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}, \qquad (3.10)$$

която е парабола с ос успоредна на оста z и минаваща през началото O. Накратко ще изложим някои свойства на разглежданото движение.

а. Хоризонтална дължина на полета OA. Търсим точката A, в която параболата (3.10) пресича оста Ox. Полагаме $z = 0$ в (3.10):

$$x(\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2\alpha}) = 0.$$

Очевидно, имаме две точки $x_1 = 0$ и

$$x_2 = OA = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha\mathrm{tg}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (3.11)$$

Най – голяма дължина на полета получаваме при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. $\alpha = \pi/4$. Отчитайки равенството

$$\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha),$$

получаваме, че при α и $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ имаме една и съща далечина на полета.

б. Максимална височина при даден ъгъл на хвърляне α. Решаваме уравнението

$$\frac{dz}{dx} = 0 \quad : \quad \mathrm{tg}\alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

откъдето получаваме, че максималната височина H се получава при

$$x_0 = \frac{v_0^2 \mathrm{tg}\alpha \cos^2 \alpha}{g} \tag{3.12}$$

и е равна на

$$z_{max} = H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \tag{3.13}$$

Най– голяма височина получаваме при $\alpha = \pi/2$:

$$z_{max} = H = \frac{v_0^2}{2g}. \tag{3.14}$$

в. Времето T за движение от началото O до точката A. Поставяйки в първото уравнение в (3.9) ($x = v_0 t \cos \alpha$) x_2 от (3.11), получаваме

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \tag{3.15}$$

г. Парабола на безопасността. Тук ще намерим обвивката на кривите (3.10) като функции на параметъра $\alpha \in [0, \pi/2]$. По този начин ще намерим крива, която огражда в квадранта Oxz, $x, z \geq 0$ множеството, където може да попадне точката, когато меним ъгъла α, при постоянна големина v_0 на началната скорост $\mathbf{v}_0$. Ще напомним, че за да намерим обвивката на семейството от криви $z = f(x, \alpha)$ следва да изключим параметъра α от уравненията

$$z = f(x, \alpha), \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = f'(x, \alpha) = 0. \tag{3.16}$$

Нека положим в (3.10)

$$p = \mathrm{tg}\alpha, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = 1 + p^2. \tag{3.17}$$

Тогава системата (3.16) дава

$$z = px - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + p^2), \quad \frac{\partial z}{\partial p} = x - \frac{pgx^2}{v_0^2} = 0. \tag{3.18}$$

От последното уравнение получаваме

$$p = \frac{v_0^2}{gx}, \tag{3.19}$$

което подставено в първото дава търсеното уравнение на обвивката

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2. \tag{3.20}$$

Забележка. Кривата (3.20) можем да получим, решавайки следната задача: да се намери ъгълът α, под който трябва да хвърлим материалната точка, за да попаднем в дадена точка η, ζ в равнината O, x, z. Полагайки в първото уравнение от (3.18) $z = \zeta, x = \eta$ получаваме

$$p^2\frac{g\eta^2}{2v_0^2} - p\eta + (\zeta + \frac{g\eta^2}{2v_0^2}) = 0. \tag{3.21}$$

Решението на това уравнение относно p се дава с формулата

$$p = \frac{v_0^2}{g\eta} \pm \frac{1}{g\eta}\sqrt{-2gv_0^2\left(\zeta + \frac{g\eta^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g}\right)}. \tag{3.22}$$

За да имаме реално решение $p = \mathrm{tg}\alpha$ точката η, ζ трябва да удовлетворява неравенството

$$\zeta + \frac{g\eta^2}{2v_0^2} - \frac{v_0^2}{2g} \leq 0, \tag{3.23}$$

което е еквивалентно на (3.20).

4. Праволинейно движение на материална точка. Едномерни колебания.

Имаме уравнението

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \tag{4.1}$$

Тук ще разгледаме някои прости задачи, в които движението е праволинейно. За определеност ще предполагаме че траекторията е по оста Ox. Ще отбележим, че необходимо и достатъчно условие за праволинейност на движението е:

а. силата има постоянна посока,

б. началната скорост има посоката на силата или е нула.

4.1. Хармонични колебания.(Осцилатор.) Имаме уравнението

$$m\ddot{x} = -cx, \tag{4.2}$$

където $c > 0$ се нарича коефициент на еластичност. Полагаме

$$\frac{c}{m} = k^2. \tag{4.3}$$

Тогава за (4.2) получаваме

$$\ddot{x} - k^2 x = 0, \tag{4.4}$$

чието общо решение се дава с формулата

$$x = A\cos kt + B\sin kt. \tag{4.5}$$

Полагайки

$$A = a\sin\alpha, \quad B = a\cos\alpha, \tag{4.6}$$

получаваме за закона на движението формулата

$$x = a\sin(kt + \alpha). \tag{4.7}$$

Очевидно скоростта се дава с формулата

$$v = \dot{x} = ak\cos(kt + \alpha). \tag{4.8}$$

Това решение се нарича просто хармонично колебание, числото а определя амплитудата, а $kt + \alpha$ - фаза на колебанието. Периодът Т се определя от условията

$$a\sin(k(t+T) + \alpha) = a\sin(kt + \alpha), \quad ak\cos(k(t+T) + \alpha) = ak\cos(kt + \alpha), \tag{4.9}$$

което дава

$$T = \frac{2\pi}{k}. \tag{4.10}$$

От тук за честотата (броя на колебанията за единица време)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \tag{4.11}$$

Ще отбележим, че честотата не зависи от началното положение и началната скорост на точката. От уравненията

$$x_0 = a\sin\alpha, \quad v_0 = ka\cos\alpha \tag{4.12}$$

получаваме

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{kx_0}{v_0}. \tag{4.13}$$

От (4.5) се вижда, че закона на движение можем да запишем във вида

$$x = x_0\cos kt + \frac{v_0}{k}\sin kt. \tag{4.14}$$

4.2. Свободни затихващи колебания при съпротивление, пропорционално на скоростта.

Нека, наред със силата $\mathbf{F} = -c\mathbf{r}$, на точката действува съпротивителна сила

$$\mathbf{R} = -\mu\mathbf{v}, \quad \mu > 0. \tag{4.15}$$

Имаме уравнението

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}. \tag{4.16}$$

Полагаме

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2b > 0. \tag{4.17}$$

Имаме уравнението

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0. \tag{4.18}$$

Решението му се дава с формулата

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{4.19}$$

където $\lambda_{1,2}$ са корени на уравнението

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0, \tag{4.20}$$

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}. \tag{4.21}$$

При $b < k$ имаме

$$\lambda_1 = -b + ik_1, \quad \lambda_2 = -b - ik_1, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}. \tag{4.22}$$

От (4.19) получаваме, че решението можем да запишем във вида

$$x = e^{-bt} a\sin(k_1 t + \alpha). \tag{4.23}$$

Вследствие на множителя e^{-bt} имаме затихващо колебание с период

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}. \tag{4.24}$$

Нека имаме два последователни максимума x_i и x_{i+1}, съответствуващи на моментите t_i и $t_i + T_1$:

$$x_i = e^{-bt_i} a \sin(k_1 t_i + \alpha), \quad x_{i+1} = e^{-b(t_i+T_1)} a \sin(k_1 t_i + \alpha). \tag{4.25}$$

Величината

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-bT_1}, \tag{4.26}$$

наричана декремент на колебанието, показва, че амплитудата намалява като геометрична прогресия.

При $b > k$ имаме $n = \sqrt{b^2 - k^2} > 0$. Следователно

$$\lambda_1 = -b + n, \quad \lambda_2 = -b - n \tag{4.27}$$

и общото решение се дава с формулата

$$x = e^{-bt}(c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}). \tag{4.28}$$

Тъй като $n < b$, то $x(t)$ с течение на времето неограничено намалява, клонейки към нула, т.е. точката асимптотически се приближава към привличащия център O.

При $b = k$ характеристическото уравнение (4.20) има кратен корен

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -b \tag{4.29}$$

и общото решение има вида

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t). \tag{4.30}$$

Качествено и в този случай решението е както и в случая $b > k$, защото e^{-bt} намалява по–бързо, отколкото расте t.

4.3 Принудени колебания. Резонанс. Имаме, наред със силата $F = -cx$, и външна сила от вида

$$\mathbf{Q} = Q_0 \sin pt. \tag{4.31}$$

Уравнението на движение има вида

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt. \tag{4.32}$$

Полагаме

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{Q_0}{m} = P \tag{4.33}$$

тогава за (4.32) получаваме

$$\ddot{x} + k^2 x = P \sin pt. \tag{4.34}$$

Общото решение се дава с формулата

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \xi(t), \tag{4.35}$$

където $\xi(t)$ е частно решение на уравнението (4.34), което търсим във вида

$$\xi(t) = A \sin pt. \tag{4.36}$$

От (4.34) получаваме за A уравнението

$$A(p^2 - k^2) = P. \tag{4.37}$$

Следователно

$$\xi(t) = \frac{P}{k^2 - p^2} \sin pt, \tag{4.38}$$

$$x = A \cos kt + B \sin kt + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{4.39}$$

При $k = p$ полагаме

$$\xi_1(t) = \frac{P}{k^2 - p^2} (\sin pt - \sin kt), \tag{4.40}$$

от където с граничен преход $k \to p$ имаме

$$\xi_1(t) = -\frac{Pt}{2k} \cos kt. \tag{4.41}$$

Така получаваме за общото решение в този случай

$$x = -\frac{Pt}{2k} \cos kt + a \sin(kt + \alpha). \tag{4.42}$$

5. Уравнение на Нютон в криволинейни координати. Полярни, цилиндрични и сферични координати.

Имаме уравнението

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, \mathbf{t}), \qquad (5.1)$$

където в декартови координати x, y, z радиус- векторът

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \qquad (5.2)$$

Нека въведем криволинейни координати от общ вид

$$q_1 = q_1(x, y, z), \quad q_2 = q_2(x, y, z), \quad q_3 = q_3(x, y, z), \qquad (5.3)$$

където предполагаме, че

$$\frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)} \neq 0 \qquad (5.4)$$

и, следователно, съществува и обратната трансформация

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \qquad (5.5)$$

Основната задача тук е да получим от (5.1) уравнения за $q_i = q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Нека напомним, че координатната линия q_1 определяме като пресечната линия на координатните равнини

$$q_2(x, y, z) = C_2, \quad q_3(x, y, z) = C_3. \qquad (5.6)$$

Аналогично и за q_2, q_3. Единичните вектори, които са допирателени към съответните линии означаваме $\mathbf{q}_i^0$, $i = 1, 2, 3$. Имаме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3)\mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3)\mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3)\mathbf{k} \qquad (5.7)$$

и, следователно,

$$\mathbf{q}_l^0 = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}/|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}|, \quad l = 1, 2, 3, \qquad (5.8)$$

т.е.

$$\mathbf{q}_l^0 = \frac{\frac{\partial x}{\partial q_l}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_l}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_l}\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_l}\right)^2}}. \qquad (5.8a)$$

Криволинейните координати ще наричаме ортогонални, ако

$$(\mathbf{q}_l^0, \mathbf{q}_m^0) = 0, \quad l \neq m. \qquad (5.9)$$

Имаме следните важни тъждества

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_l} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l} \qquad (5.10)$$

и

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_l}. \tag{5.11}$$

Тъждеството (5.10) следва директно от равенството

$$\mathbf{v} = \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\dot{q}_l, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)). \tag{5.12}$$

Нека сега отбележим, че от (5.12) имаме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_l}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_l}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_l}\dot{q}_3. \tag{5.13a}$$

От друга страна директно се пресмята, че

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_1 \partial q_l}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_2 \partial q_l}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_3 \partial q_l}\dot{q}_3. \tag{5.13b}$$

Сравнявайки последните две равенства получаваме (5.11).

Нека сега умножим скаларно (5.1) на $\mathbf{q}_l^0$.Предварително отбелязваме, че от (5.10) и (5.11), имаме

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) == \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) - \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}, \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) =$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_l}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right). \tag{5.14}$$

Да въведем кинетичната енергия

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{5.15}$$

и обобщените сили

$$Q_l = \left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right), \quad l = 1, 2, 3. \tag{5.16}$$

От уравнението (5.1) имаме

$$\frac{m}{|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}|}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) = \frac{m}{|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}|}\left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right). \tag{5.17}$$

Отчитайки (5.14) - (5.16), получаваме окончателно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l, \quad l = 1, 2, 3. \tag{5.18}$$

Силата $\mathbf{F}$ ще наричаме потенциална,ако съществува скаларна функция $U = U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ така, че

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right). \tag{5.19}$$

Аналогично обобщените сили Q_l ще наричаме потенциални, ако съществува функция $V = V(q_1, q_2, q_3)$ така, че

$$Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, 3. \tag{5.20}$$

Нека отбележим, че ако силата $\mathbf{F}$ е потенциална, т.е. изпълнено е представянето (5.19), то имаме и обобщен потенциал $V(q_1, q_2, q_3)$, който се получава от $U(\mathbf{r})$ по формулата

$$V(q_1, q_2, q_3) = U(x(q_1, q_2, q_3), y(q_1, q_2, q_3), z(q_1, q_2, q_3)). \tag{5.21}$$

Действително

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial q_l} &= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_l} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_l} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_l} = \\ &= \left(\mathrm{grad}U, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) = -\left(\mathbf{F}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_l}\right) = -Q_l. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Нека заместим в (5.18) $Q_l = -\frac{\partial V}{\partial q_l}$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = -\frac{\partial V}{\partial q_l}, \quad l = 1, 2, 3. \tag{5.23}$$

Отчитайки, че $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_l} = 0$, последните уравнения можем да запишем в лагранжев вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \tag{5.24}$$

където функцията L, наричана лагранжиан, се дава с формулата:

$$L = T - V. \tag{5.25}$$

Последните уравнения показват, че ако силата в уравнението на Нютон (5.1) е потенциална, то в произволни криволинейни координати това уравнение можем да запишем в лагранжев вид. Както ще видим по–нататък тази форма на запис на уравненията на движение се обобщава и за случаите на холономни системи, когато имаме система от N материални точки, на която са наложени определени геометрични ограничения на възможните движения, наричани връзки.

ПРИМЕРИ.
1. ЦИЛИНДРИЧНИ И ПОЛЯРНИ КООРДИНАТИ.

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \tag{5.26a}$$

$$\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{5.26b}$$

От (5.15) и ортоголността на $\mathbf{q}_l^0$ (която ще докажем малко по–надолу) имаме

$$v^2 = \sum_{l=1}^{3}\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}\right)^2 \dot{q}_l^2. \tag{5.27}$$

Обобщените координати тук са

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z. \tag{5.28}$$

От (5.26b) имаме

$$+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho} = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}, \quad |\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}| = 1, \tag{5.29a}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi\mathbf{i} + \rho\cos\varphi\mathbf{j}, \quad |\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}| = \rho, \tag{5.29b}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{k}. \tag{5.29c}$$

Следователно

$$\rho^0 = \cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j}, \quad \varphi^0 = -\sin\varphi\mathbf{i} + \cos\varphi\mathbf{j}, \quad \mathbf{z}^0 = \mathbf{k}. \tag{5.30}$$

Имаме

$$\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\rho}\right)^2 = 1, \quad \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right)^2 = \rho^2, \quad \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}\right)^2 = 1. \tag{5.31}$$

Следователно от (5.27) получаваме

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2. \tag{5.32}$$

Отчитайки (5.7), имаме

$$v_{q_l} = \left(\mathbf{v}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}\right)/|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}| = \left(\mathbf{v}, \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\dot{q}_l}\right)/|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}| =$$

$$\frac{1}{|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}|}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_l}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}|}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_l}, \quad (m=1). \tag{5.33}$$

От тук, отчитайки (5.32), получаваме

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}. \tag{5.33a}$$

Ускорението пресмятаме, отчитайки (5.14):

$$w_{q_l} = \frac{1}{|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}|}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}\right) = \frac{1}{|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_l}|}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\right\}. \tag{5.34}$$

Полагайки в горната формула израза за v^2 от (5.32), получаваме

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}), \quad w_z = \ddot{z}. \tag{5.35}$$

Скоростта и ускорението в полярни координати:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \tag{5.36a}$$

$$\mathbf{r} = \rho\cos\varphi\mathbf{i} + \rho\sin\varphi\mathbf{j} \tag{5.36b}$$

се получават непосредствено от (5.33а) и (5.35), полагайки $z \equiv 0$. Имаме

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \tag{5.68c}$$

и

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi}) = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}. \tag{5.68d}$$

2. СФЕРИЧНИ КООРДИНАТИ.

$$\left.\begin{array}{c} x = r\cos\psi\cos\varphi, \\ y = r\cos\psi\sin\varphi, \\ z = r\sin\psi, \\ (-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \varphi < 2\pi) \end{array}\right\}, \tag{5.37a}$$

$$\mathbf{r} = r\cos\psi\cos\varphi\mathbf{i} + r\cos\psi\sin\varphi\mathbf{j} + r\sin\psi\mathbf{k}. \tag{5.37b}$$

От тук имаме

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r} = \cos\psi\cos\varphi\mathbf{i} + \cos\psi\sin\varphi\mathbf{j} + \sin\psi\mathbf{k}, \quad |\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}| = 1, \tag{5.38a}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi} = -r\cos\psi\sin\varphi\mathbf{i} + r\cos\psi\cos\varphi\mathbf{j}, \quad |\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}| = r\sin\psi \tag{5.38b}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi} = -r\sin\psi\cos\varphi\mathbf{i} + -r\sin\psi\sin\varphi\mathbf{j} + r\cos\psi\mathbf{k}, \quad |\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\psi}| = r. \tag{5.38c}$$

Следователно

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\cos^2\psi\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\psi}^2, \tag{5.39}$$

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\cos\psi\dot{\varphi}, \quad v_\psi = r\dot{\psi}. \tag{5.40}$$

За съответните проекции на ускорението имаме изразите

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\cos^2\psi - r\dot{\psi}^2, \tag{5.41a}$$

$$w_\varphi = \ddot{\varphi}r\cos\psi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\psi - 2r\dot{\psi}\dot{\varphi}\sin\psi, \tag{5.41b}$$

$$w_\psi = r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} + r\dot{\varphi}^2\sin\psi\cos\psi. \tag{5.41c}$$

6. Движение под действие на централни сили. Задача на Кеплер.

Задача за двете тела.

Класическата задача за две тела , които си взаимодействуват по закона за гравитацията, се свежда до следната система

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{f m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \tag{6.1}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{f m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \tag{6.2}$$

Тя се свежда до задачата за движение на една точка в гравитационното поле на неподвижен център по следните два начина:

Първи начин. Разделяме уравненията (6.1-2) сьответно на m_1, m_2 и ги изваждаме; получаваме

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1 + m_2)}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \tag{6.3}$$

Последното уравнение е уравнението на движение на точка с единична маса в гравитационното поле на точка с маса $M = m_1 + m_2$.

Втори начин. Преминаваме в координатна система с начало в масовия център

$$S : \mathbf{r}_S = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.4}$$

От (6.1-2) следва, че тази координатна система се движи равномерно и праволинейно относно изходната, т. е. тя е инерциална и следователно в нея са в сила уравненията (6.1-2), където заменяме $\mathbf{r}_i$ с $\vec{\rho}_i$ ($\vec{\rho}_i$ са радиус - векторите на точките относно масовия център); при това

$$m_1 \vec{\rho}_i + m_2 \vec{\rho}_2 = 0. \tag{6.5}$$

Полагайки

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \tag{6.5a}$$

от (6.5) получаваме

$$\vec{\rho}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{\rho}, \quad \vec{\rho}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{\rho}\ . \tag{6.6}$$

От тук следва, че ако знаем кривата $\vec{\rho}\ (t)$ то $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ са подобни криви. Понататък за уравненията (6.1), (6.2) имаме

$$m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = -f\frac{m_1 m_2}{\rho^3}\vec{\rho}, \quad m_2 \ddot{\vec{\rho}}_2 = f\frac{m_1 m_2}{\rho^3}\vec{\rho}, \quad (\rho = |\ \vec{\rho}\ |) \tag{6.7}$$

и следователно

$$m\,\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{fm_1m_2}{|\vec{\rho}|^3}\vec{\rho} = \mathrm{grad}\frac{fm_1m_2}{\rho}. \tag{6.7a}$$

Последното уравнение е аналогично на (6.3). Величината

$$m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{6.8}$$

се нарича приведена маса на системата. Нека сега отбележим, че (6.3) може да запишем във вида

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r} = \mathrm{grad}\frac{fm_1m_2}{r}, \quad (r = |\mathbf{r}|). \tag{6.9}$$

Напомняме, че за гравитационното поле имаме

$$\mathbf{F} = -\frac{fm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}, \quad \mathbf{F} = -\mathrm{grad}V \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad V = -\frac{fm_1m_2}{r}. \tag{6.10}$$

Следователно горните построения можем да обобщим за случая на движение на две материални точки с галилеево инвариантен потенциал

$$V = V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \tag{6.11}$$

Посредством интеграла на импулса (количеството на движение) тази задача се свежда до задачата за движение на материална точка, имаща приведена маса m в поле с потенциал $V = V(|\mathbf{r}|)$. Така стигаме до задачата за

Движение под действието на централна потенциална сила:

$$m\,\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}V(|\mathbf{r}|). \tag{6.12}$$

Имаме първите интеграла: интеграл за запазване момента на импулса

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c} \tag{6.13}$$

и интеграл за запазване на енергията

$$\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = h. \tag{6.14}$$

Тези интеграли позволяват детайлно да изследваме задачата, без да използваме уравнението (6.12). Отначало ще отбележим следната

Лема 6.1. *Движението под действието на централна сила става в равнина, която е перпендикулярна на постоянния вектор на кинетичния момент* $\mathbf{c}$*, ако* $\mathbf{c} \neq 0$.

Ако $\mathbf{c} = 0$ *движението е по права.*

Действително $(\mathbf{r}(\mathbf{t}), \mathbf{c}) = (\mathbf{r}, [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]) = 0$. При $\mathbf{c} = 0$ началните условия са такива, че $\mathbf{r}_0 \parallel \dot{\mathbf{r}}_0$ и последното твърдение следва от теоремата за единственост на решението: движението може да става по права и, следователно, то е именно такова. По нататък ние ще предполагаме, че $\mathbf{c} \neq 0$. Без ограничение на общността можем да смятаме, че движението става в равнината $O\,x\,y$. Тогава първите интеграли приемат вида

$$(x\dot{y} - y\dot{x}) = c, \tag{6.15}$$

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(\sqrt{x^2 + y^2}) = h. \tag{6.16}$$

Въвеждаме полярни координати

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{6.17}$$

Тогава

$$\dot{x} = \cos\varphi\dot{r} - r\sin\varphi\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \sin\varphi\dot{r} + r\cos\varphi\dot{\varphi}. \tag{6.18}$$

От тук за интегралите (6.15-16) получаваме следната по - удобна форма:

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = h, \tag{6.19}$$

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{6.20}$$

От последния интеграл имаме

$$\dot{\varphi} = c/r^2, \tag{6.21}$$

което заместено в интеграла на енергията дава

$$H = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mc^2}{2r^2} + V(r) = h. \tag{6.22}$$

От тук виждаме, че изменението на $r(t)$ се определя от

приведената потенциална енергия

$$V_c(r) = \frac{mc^2}{2r^2} + V(r) \tag{6.23}$$

се определя по формулите за едномерно движение. Докато $r(t) \neq 0$, радиус - векторът се върти в една и съща посока, замитайки равни лица за равни времена. Действително, от (6.21) имаме $\dot{\varphi} > 0$, т. е. $\varphi(t)$ е монотонна фунция. Известно е, че съответното лице на криволинейния сектор е

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2\dot{\varphi}\,dt \tag{6.24}$$

От тук, отчитайки (6.20), получаваме

$$S = \frac{c}{2}(t_2 - t_1), \tag{6.24a}$$

което и трябваше да покажем. Нека отбележим още, че от формулата

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{dS}{dt} \tag{6.24b}$$

заедно с (6.20), получаваме, че точката се движи с постоянна площна скорост, т.е. **втория закон на Кеплер**.

Директното намиране на $r = r(t)$ от уравнението (6.22) е сложно. Ще постъпим по следния начин:от интеграла (6.20) имаме

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{r}. \tag{6.25}$$

Следователно интеграла на енергията можем да запишем във вида

$$\frac{m}{2}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{c^2}V_c(\frac{1}{\rho})}_{\Pi_c(\rho)} = \frac{h}{c^2}, \quad \rho = \frac{1}{r}. \tag{6.26}$$

Последното равенство позволява да определим в квадратури траекторията $r = r(\varphi)$.

Важен пример тук е

задачата на Кеплер $V = -\dfrac{\mu m}{r}, \quad \mu = f(m_1 + m_2)$**.**

Имаме

$$V_c = \frac{mc^2}{2r^2} - \frac{\mu m}{r}, \quad \Pi_c = \frac{m\rho^2}{2} - \frac{\mu m\rho}{c^2}. \tag{6.27}$$

Тогава

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2h}{mc^2} + \frac{\mu^2}{c^4} - (\rho - \frac{\mu}{c^2})^2, \tag{6.28}$$

$$\pm\frac{mc^2 d\rho}{\sqrt{2hmc^2 + m^2\mu^2 - (mc^2\rho - m\mu)^2}} = d\varphi, \tag{6.29}$$

$$\arccos\frac{mc^2\rho - \mu m}{\sqrt{2hmc^2 + m^2\mu^2}} = \varphi - \varphi_0, \tag{6.30}$$

$$\frac{c^2}{\mu}\rho = 1 + \sqrt{\frac{2hc^2}{m\mu^2} + 1}\cos(\varphi - \varphi_0), \tag{6.31}$$

т.е.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2hc^2}{m\mu^2}}. \tag{6.33}$$

Ще отбележим, че тази формула е уравнението на конично сечение в полярни координати, като при $0 \le e < 1$ имаме елипса, при $e = 1$– парабола, а при $e > 1$ – хипербола. Така, в частност, получихме **първия закон на Кеплер**.

За да намерим закона на движение $\varphi = \varphi(t)$ използваме интеграла на площите

$$r^2 d\,\varphi = c\,dt. \tag{6.34}$$

От тук, отчитайки (6.33), получаваме

$$t - t_0 = \frac{1}{c}\int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\,\varphi = \frac{p^2}{c}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1 + e\cos(\varphi - \varphi_0))^2}. \tag{6.35}$$

Последният интеграл се пресмята със субституцията

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}, \tag{6.36}$$

което дава

$$t - t_0 = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}(E - e\sin E). \tag{6.37}$$

Ще отбележим, че изразяването на $E(t)$ чрез елементарни функции е невъзможно. Нека означим с T периода на въртене, т.е. времето за което точката обикаля елипсата. От формулата (6.24а) имаме

$$S = \frac{cT}{2}. \tag{6.38}$$

От друга страна за лицето на елипсата имаме

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}, \tag{6.39}$$

където голямата полуос

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2} = -\frac{\mu m}{2h}, \tag{6.40}$$

(последното равенство е следствие на (6.33)). Оттук, сравнявайки (6.38) и (6.39), получаваме

$$T = \frac{2\pi}{c}a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{p\mu}}a^2\sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(m_1+m_2)}}, \tag{6.41}$$

което е **третия закон на Кеплер**.

Забележка Нека $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r,\varphi)\mathbf{e}_r$ е централно силово поле (централна сила, $\mathbf{e}_r$ –единичен вектор по $\mathbf{r}$.) То е потенциално тогава и сама тогава, когато $F = F(r)$, т.е. F не зависи явно от φ, попенциала

$$V(x,y) = V(r), \quad V(r) = -\int F(r)\,dr. \tag{6.42}$$

Доказателство Нека $\mathbf{F} = (X,Y) = (F_r, F_\varphi)$. Изразът

$$X\,dx + Y\,dy = F_r\,dr + F_\varphi\,d\varphi \tag{6.43}$$

е пълен диференциал тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial F_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} = 0$$

защото $F_\varphi = 0$, т.е.

$$F = F(r) \Rightarrow V = -\int F(r)\,dr.$$

За да завършим доказателството остава да напомним, че в (6.43) използвахме инвариатнтността на пълния диференциал при смяна на променливите.

Допълнителен пръв интеграл в задачата на Кеплер. Нека имаме движение под действието на централна сила с потенциал (6.10), т.е.

$$V = -\frac{\alpha}{r} \tag{6.44}$$

и нека имаме първия интеграл (6.13):

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{C}. \tag{6.45}$$

Тогава уравнението (6.12):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3} = -\mathrm{grad}V(r) \tag{6.46}$$

има пръв интеграл

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = Const. \tag{6.47}$$

Доказателство

$$\frac{dI}{dt} = \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M} + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = m\dot{\mathbf{v}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} =$$

$$m\mathbf{r}(\dot{\mathbf{v}}.\mathbf{v}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}.\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} =$$

$$\alpha\frac{\mathbf{r}}{r^3}(\mathbf{r}.\mathbf{v}) - \alpha\frac{\mathbf{v}}{r^3}(\mathbf{r}.\mathbf{r}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \alpha\frac{(\mathbf{r}.\mathbf{v})\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Тук използвахме, че $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}.\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}.\mathbf{b})$, също така, че $(\mathbf{r}.\mathbf{r}) = r^2$. □

Задача 1. Пресмятайки интеграла (6.35), да се получи уравнението на Кеплер (6.37).

Задача 2. (пространствен осцилатор) Да се намери траекторията на движение в централно поле

$$V = \frac{kr^2}{2} \tag{6.48}$$

Използвайте, че силата е централна, движението е в равнината Oxy. Следователно

$$V = \frac{k(x^2 + y^2)}{2} \Rightarrow \mathbf{F} = (-kx, -ky). \tag{6.49}$$

Задача 3. Да се докаже, че потенциала

$$V = -\frac{\alpha}{r} \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \tag{6.50}$$

където (x_0, y_0, z_0) са координатите на привличащия център, удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{6.51}$$

6а. Теорема на Якоби за планетарното движение.

Нека имаме $N \geq 3$ точки с маси m_i и радиус-вектори $\mathbf{r}_i$, които си взаимодействуват по закона за всемирното привличане

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i \equiv -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{i\neq j} \mathbf{F}_{ij}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|^{\mathbf{3}}}(\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}), \tag{6a.2}$$

където потенциалната енергия

$$V(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N) = -\sum_{i,j=1}^{N} \gamma \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_j}|}. \tag{6a.3}$$

Имаме закон за запазване на енергията

$$H(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N, \mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N) \equiv T + V = h, \tag{6a.4}$$

където потенциалната енергия V се дава с израза (6а.3), а кинетичната -

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad \mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i. \tag{6a.5}$$

Планетарно движение е това, при което телата не се сблъскват и взаимните разстояния остават ограничени при всяко $0 \leq t < \infty$.

Теорема на Якоби. Планетарното движение е възможно само при отрицателна енергия $h < 0$.

Доказателството се базира на две леми.

Лема 1 (Тъждество на Лагранж) При движение относно масовия център

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i = 0 \tag{6a.6}$$

пълният барицентричен момент

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^2 = \frac{1}{M} \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2, \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{6a.7}$$

Доказателство От (6а.6) имаме

$$MI = MI - (\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i)^2 = (\sum_{j=1}^{N} m_j)(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i^2) - (\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i)^2 =$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} m_j m_i \mathbf{r}_i^2 - \sum_{i,j=1}^{N} m_i m_j \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j. \tag{6a.8}$$

От тук следва, че коефициента пред $m_i m_j$ е $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2$, което и трябваше да докажем.

Лема 2. (Формула на Лагранж) При движението на системата имаме

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -2V + 4h. \tag{6a.9}$$

Доказателство. Имаме

$$\frac{dI}{dt} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i), \tag{6a.10}$$

и отчитайки (6а.3)

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i) + 2\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\mathbf{r}}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) = -2\sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \mathbf{r}_i) + 4T. \tag{6a.11}$$

Сега отчитайки, че потенциала V е еднородна функция от степен -1, за последното равенство получаваме

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2V + 4T = 4h - 2V, \quad (T + V = h). \tag{6a.12}$$

Лемата е доказана.

Доказателство на теоремата ще получим, допускайки противното, т.е. нека движението е планетарно и $h \geq 0$. Тогава, тъй като $V < 0$ то от (6а.12) имаме $\frac{d^2 I}{dt^2} > 4h \geq 0$. Следователно $I = I(t)$ като функция на t е изпъкнала отдолу и $\lim I \to \infty, t \to \infty(-\infty)$, което е в противоречие с допускането че барицентричния момент (6а.7) е ограничен. Теоремата е доказана.

7. Задача на Бернули за брахистохроната, като пример на функционал, където променливата е крива с фиксирани краища.

Тук ще изложим решението на следната важна

Задача на Йохан Бернули (1696). Търси се крива, по която точка с маса m, тръгвайки от началото $O(0,0)$ с начална скорост 0 стига в точка $M(a,b)$ за най–кратко време. (По точно – във вертикалната равнина, където x е хоризонталната ос, а y е насочена надолу, разглеждат се всички криви $y = y(x)$, съединяващи $O(0,0)$ и $M(a,b), a > 0, b > 0$. Между тези криви се търси тази, за която материалната точка под действието на теглото си ще стигне за най–кратко време от O до M, като се предполага, че точката се движи без съпротивление.

Решение. Задачата ще решим в два етапа. Отначало ще намерим времето T, за което точката, движейки се по кривата $y = y(x)$, минава разстоянието от началото O до M. Тъй като теглото $\mathbf{P} = (0, mg)$ е потенциална сила с потенциал $V = -mgy$ и точката се движи без триене то за закона на движението $s = s(t)$: $x = x(t)$, $y(t) = y(x(t))$ по всяка крива $y = y(x)$ енергията се запазва:

$$\frac{mv^2}{2} - mgy = Const. \tag{7.1}$$

Тъй като в началното положение $x = 0, y = 0$ началната скорост $v = 0$, то $Const. = 0$. От тук за $s = s(t)$ имаме диференциалното уравнение

$$v^2 = 2gy, \quad v = \frac{ds}{dt}, \tag{7.2}$$

т.е.

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}, \quad ds = \sqrt{1 + y'^2}dx. \tag{7.3}$$

Следователно времето, за което точката достига M се дава с функционала

$$T(y) = \int_{OM} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx, \quad y(0) = 0, y(a) = b \tag{7.4}$$

където $y(x)$ е уравнението на кривата.

Следващата стъпка е да намерим кривата $y = y(x)$, за която времето T е минимално. Както ще покажем в следващия параграф кривата $y(x)$, минимизираща функционала (7.4), е решение на уравнението на Лагранж

$$\frac{d}{dx}F_{y'} - F_y = 0, \tag{7.5}$$

където

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}. \tag{7.6}$$

Лесно се проверява, че тъй като $F_x = 0$ то уравнението (7.5) има пръв интеграл

$$F - y'F_{y'} = C. \tag{7.7}$$

От (7.6) имаме

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{2gy}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} = C, \tag{7.8}$$

т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}} = C_1. \tag{7.9}$$

Имаме уравнение от вида $y' = f(y)$:

$$y' = \sqrt{\frac{1-y}{y}}, \tag{7.9a}$$

където за краткост сме положили $C_1 = 1$.Лесно се получава, че решението се дава с формулата

$$x = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{y}{1-y}} - \sqrt{y(1-y)}. \tag{7.9b}$$

За по–голяма нагледност ще получим решението в параметричен вид. Полагаме

$$y = \frac{1-\cos t}{2} = \sin^2 t/2. \tag{7.10}$$

Получаваме от (7.9b)

$$x = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t, \tag{7.11}$$

т.е. решението е арка на циклоида, минаваща през началото O и точката M.

Ще разгледаме още два примера, където по естествен начин възникват екстремални задачи за функционали.

Най–късо разстояние между две точки в равнината. Да се намери най–късото разстояние между две точки в равнината.

Решение. Нека напомним, че дължината на кривата $y = y(x)\, a \leq x \leq b$ се дава с функционала

$$I(y) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad y(a) = A, y(b) = B, \tag{7.12}$$

където $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. В случая

$$F = \sqrt{1+y'^2} \tag{7.13}$$

и следователно

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{7.19}$$

Уравнението (7.5) дава

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow \frac{y'^2}{1+y'^2} = c^2 \tag{7.20}$$

Полагаме $y'^2 = u$, тогава от последното равенство имаме

$$u = c^2(1+u) \Rightarrow u = \frac{c^2}{1-c^2} \Rightarrow y' = m = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \Rightarrow y = mx + n, \tag{7.14}$$

където константите m, n определяме от условията $y(a) = A, y(b) = B$. $\square$

Минимална ротационна повърхнина.

Решение. Нека имаме крива $y = y(x)$ $a \le x \le b$. Тогава лицето на повърхнината, образувана от въртенето на $y(x)$ около оста y се дава с функционала

$$I(y) = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad y(a) = A, y(b) = B, \tag{7.15}$$

В случая

$$F = x\sqrt{1+y'^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}. \tag{7.23}$$

В този случай уравнението (7.5) дава

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow y'^2(x^2 - c^2) = c^2. \tag{7.16}$$

От тук

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{c}{\sqrt{x^2-c^2}}\right) \Rightarrow x = c\cosh\frac{y-d}{c}. \tag{7.17}$$

Константите c, d се определят от условията $y(a) = A, y(b) = B$. Така получихме, че уравнението на минималната ротационна повърхнина се дава с уравнението на верижката.

8. Нелинеен функционал. Производна на Фреше. Уравнения на Ойлер-Лагранж.

Основният резултат е следната класическа

Теорема на Ойлер- Лагранж. Нека е даден функционала

$$F[y] = \int_a^b F(y', y, x)\, dx, \quad y(a) = A,\, y(b) = B \tag{8.1}$$

и нека функцията $y = y(x)$, удовлетворяваща граничните условия (8.1), дава екстремум на функционала $F[y]$. Тогава $y(x)$ е решение на уравнението

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{8.2}$$

Изразът в лявата част на това уравнение се нарича производна на Лагранж и се означава

$$\frac{\delta F}{\delta y} = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}. \tag{8.3}$$

За да докажем тази теорема ще напомним следната

Лема на Лагранж. Ако интеграла

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\eta(x)\, dx = 0, \tag{8.4}$$

където $f(x)$ е фиксирана непрекъсната функция, $\eta(x)$ - произволна функция, непрекъсната заедно с производната и $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Доказателство от противното. Нека $f(\xi) > 0$, от непрекъсността имаме $f(x) > 0$, $x \in [\xi_1, \xi_2]$. Нека

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \le x \le \xi_1 \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 & \xi_1 \le x \le \xi_2 \\ 0 & \xi_2 \le x \le x_1 \end{cases} \tag{8.5}$$

Тогава

$$I = \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x)(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\, dx > 0. \tag{8.6}$$

Противоречие. Лемата е доказана.

Доказателство на теоремата на Ойлер-Лагранж Нека $\eta(x)$ е произволна, но фиксирана, функция удовлетворяваща условията на горната лема и нека $F[y]$ има за определеност минимум за $y = y(x)$. Тогава в околност на $\varepsilon = 0$ имаме за функцията

$$\varphi(\varepsilon) \equiv F[y + \varepsilon\eta] \ge \varphi(0). \tag{8.7}$$

Следователно имаме

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\,|_{\varepsilon=0} = 0 = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F(y' + \varepsilon\eta', y + \varepsilon\eta, x)\,dx\,|_{\varepsilon=0} =$$

$$\int_a^b \{F_{y'}(y', y, x)\eta'(x) + F_{y'}(y', y, x)\eta(x)\}\,dx =$$

$$F_{y'}\eta|_{x=a}^b + \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\eta(x)\,dx = \int_a^b (F_y - \frac{d}{dx}F_{y'})\eta(x)\,dx, \tag{8.8}$$

където в слагаемото с $\eta'(x)$ интегрирахме по части и в последното равенство отчетохме, че $\eta(a) = \eta(b) = 0$. От тук, вследствие на лемата на Лагранж, получаваме уравнението (8.2). Теоремата е доказана.

Нека отбележим, че от горното доказателство следва, че за всяка фиксирана функция $y = y(x) \in C^2[a, b]$ и произволна $\eta(x)$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ имаме

$$\frac{d}{d\varepsilon}F[y + \varepsilon\eta]\,|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{\delta F}{\delta y}(x)\eta(x)\,dx. \tag{8.9}$$

Изразът $\delta F/\delta y$ се нарича вариационна производна или производна на Фреше на функционала $F[y]$.

8а. Инвариантност на уравнението на Лагранж Нека имаме уравнението

$$\frac{d}{dt}L_{\dot q} - L_q = 0, \quad L = L(\dot q, q, t). \tag{8.10}$$

Нека направим смяната на променливата

$$q = q(Q,t), \quad \dot q = \frac{\partial q}{\partial Q}\dot Q + \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{8.11}$$

Получаваме

$$\tilde L(\dot Q, Q, t) = L(\frac{\partial q}{\partial Q}\dot Q + \frac{\partial q}{\partial t}, q(Q,t), t). \tag{8.12}$$

Ще докажем, че

$$\frac{d}{dt}\tilde L_{\dot Q} - \tilde L_Q = 0. \tag{8.13}$$

т.е. уравнението (8.10) е инвариантно относно смяната на променливата (8.11).

Доказателство. Имаме от (8.12)

$$\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q} = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial q}{\partial Q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot Q}\right)\frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q} \tag{8.14}$$

и

$$\frac{\partial \tilde L}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial \dot q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q}. \tag{8.15}$$

Отчитайки, че

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial q}{\partial Q} = \frac{\partial \dot q}{\partial Q}, \tag{8.16}$$

получаваме от (8.14) и (8.16)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot Q} - \frac{\partial \tilde L}{\partial Q} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial Q}, \tag{8.17}$$

което и трябваше да докажем.

Обобщение за случая $y = (y_1, ..., y_n)$

в.Инвариантност на уравненията на Лагранж при смяна на променливите $q_i = q_i^*(\xi_1, ..., \xi_n, t)$, $i = 1, ..., n$..

Нека по функцията на Лагранж

$$L = L(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t) \tag{8.18}$$

са построени производните на Лагранж

$$[L]_{q_i} = \frac{d}{dt}L_{\dot q_i} - L_{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{8.19}$$

Нека направим смяната на променливите

$$q_i = q_i^*(\xi_1, \ldots, \xi_n, t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.20}$$

от където имаме

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i^*(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n, \xi_1, \dots, \xi_n, t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial q_i^*}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.21}$$

Така получаваме

$$L = L^*(\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n, \xi_1, \dots, \xi_n, t) = L(\dot{q}_1^*, \dots, \dot{q}_n^*, q_1^*, \dots, q_n^*, t), \tag{8.22}$$

и нека тук означим съответните производни

$$[L^*]_{\xi_i} = \frac{d}{dt} L^*_{\dot{\xi}_i} - L^*_{\xi_i}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.23}$$

Основното твърдение тук е следната

Теорема. Нека имаме смяната на променливите (8.20). Тогава

$$\frac{d}{dt} L^*_{\dot{\xi}_\alpha} - L^*_{\xi_\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} \right)^*. \tag{8.24}$$

Забележка. Можем отначало да направим смяната на променливите (8.20) във функцията на Лагранж L (8.18) и по така получения лагранжиан L^* (8.22) да построим съответните уравнения

$$[L^*]_{\xi_i} = \frac{d}{dt} L^*_{\dot{\xi}_i} - L^*_{\xi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.25}$$

От друга страна можем да направим смяната (8.20-21) директно в уравненията

$$[L]_{q_i} = \frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.26}$$

Полученият резултат означаваме

$$\left(\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} \right)^* = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.27}$$

От формулираната теорема следва, че ако са изпълнени уравненията (8.27) то са в сила и уравненията (8.25), т.е. уравненията на Лагранж (8.26) са инвариантни относно смяната (8.20-21).

Преди да докожем горната теорема ще приведем някои дефиниции и помощни твърдения. Нека отначало отбележим, че от (8.21) имаме

$$\ddot{q}_i = \ddot{q}_i^*(\ddot{\xi}_1, \dots, \ddot{\xi}_n, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_n, \xi_1, \dots, \xi_n, t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha} \ddot{\xi}_\alpha +$$

$$\sum_{\alpha,j=1}^{n} \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_j} \dot{\xi}_\alpha \dot{\xi}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial t \partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial^2 q_i^*}{\partial t^2}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{8.28}$$

Нека имаме функциите

$$f(q,t), \quad F(\dot q,q,t), \quad \Phi(\ddot q,\dot q,q,t). \tag{8.29}$$

При смяната (8.20) получаваме

$$f^*(\xi,t)=f(q^*(\xi,t),t), \quad F^*(\dot\xi,\xi,t)=F(\dot q^*(\dot\xi,\xi,t),q^*(\xi,t),t), \tag{8.30}$$

$$\Phi^*(\ddot\xi,\dot\xi,\xi,t)=\Phi(\ddot q^*(\ddot\xi,\dot\xi,\xi,t),\dot q^*(\dot\xi,\xi,t),q^*(\xi,t),t), \tag{8.31}$$

където за краткост означаваме $q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$, $\dot q=(\dot q_1,\dot q_2,\dots,\dot q_n)\dots$. От (8.21) и (8.28) имаме

Лема 0. В сила са следните равенства

$$\frac{\partial \ddot q_i^*}{\partial \ddot\xi_\alpha}=\frac{\partial \dot q_i^*}{\partial \dot\xi_\alpha}=\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}. \tag{8.32}$$

1. Диференцирайки по ξ_α първото равенство в (8.30), получаваме, че стълбът $\dfrac{\partial f}{\partial q}$ се преобразува в $\dfrac{\partial f^*}{\partial \xi}$ по ковекторното правило:

$$\frac{\partial f^*}{\partial \xi_\alpha}=\sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\right)^*. \tag{8.33}$$

Аналогично, използвайки (8.32), получаваме

$$\frac{\partial F^*}{\partial \dot\xi_\alpha}=\sum_i \frac{\partial \dot q_i^*}{\partial \dot\xi_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*=\sum_i \frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*. \tag{8.34}$$

Имаме още

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^*=\frac{d}{dt}f^*, \quad \left(\frac{dF}{dt}\right)^*=\frac{d}{dt}F^*, \tag{8.35}$$

т.е. можем да пресметнем пълната производна и след това да направим смяната или обратно. Ще отбележим, че

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^*\neq\frac{\partial f^*}{\partial t}. \tag{8.36}$$

Ще докажем (8.24). От (8.34) и (8.35) имаме

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\frac{\partial F^*}{\partial \dot\xi_\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}\right)=\sum_i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\right)\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}= \\ \sum_i\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\right)\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 q_i^*}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_k}\dot\xi_k+\frac{\partial^2 q_i^*}{\partial t\partial\xi_\alpha}\right),\end{gathered} \tag{8.37}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial F^*}{\partial \xi_\alpha}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^*\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\frac{\partial \dot q_i^*}{\partial \xi_\alpha}= \\ \sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right)^*\frac{\partial q_i^*}{\partial \xi_\alpha}+\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial \dot q_i}\right)^*\left(\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2 q_i^*}{\partial\xi_\alpha\partial\xi_k}\dot\xi_k+\frac{\partial^2 q_i^*}{\partial t\partial\xi_\alpha}\right).\end{gathered} \tag{8.38}$$

Изваждайки (8.38) от (8.37) получаваме (8.24).

9. Обобщени коодинати и обобщени скорости. Принцип на Хамилтон. Уравнения на Лагранж от втори род. Първи интеграли на уравненията на Лагранж.

Нека имаме система от N материални точки P_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, N$ с радиус–вектори $\mathbf{r}_\nu = x_\nu \mathbf{i} + y_\nu \mathbf{j} + z_\nu \mathbf{k}$ на която са наложени l връзки от вида

$$f_j(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \tag{9.1}$$

където предполагаме, че функциите f_j са независими. Уравненията на движение на системата имат следния вид

$$m_\nu \frac{d^2\mathbf{r}_\nu}{dt^2} = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.2}$$

където $\mathbf{F}_\nu$ е равнодействащата на активните сили, действуващи на ν- та точка, а $\mathbf{R}_\nu$ е равнодействащата на силите на реакциите, действуващи на тази точка. При определени предположения за вида на връзките (например, идеални), от (9.1), (9.2) получаваме система то $3N + l$ уравнения за $6N$ неизвестни, която можем да решим еднозначно. Този подход води до така наречените уравнения на Лагранж от втори род, които тук няма да разглеждаме.

За да избегнем намирането на неизвестните $\mathbf{R}_\nu$ ще въведем обобщени координати на системата. От (9.1) следва, че съществуват $n = 3N - l$ независими параметри $q_1, q_2, \ldots, q_n$, такива, че всичките декартови координати могат да бъдат изразени като функции на $q_1, \ldots, q_n$ и t:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, ..., q_n, t), \tag{9.3}$$

така че поставени в (9.1) обръщат последните в тъждества.

Величините $q_1, q_2, \ldots, q_n$ се наричат обобщени координати на системата, а числото n определя степените на свобода.

Въвеждайки обобщени координати q_i, задачата за движението на системата от N точки, на която са наложени l връзки (9.1) и $\mathbf{F}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$ е равнодействащата на активните сили, действащи на ν- тата точка, се свежда до намирането на q_i като функции на времето $q_i = q_i(t)$ по следния начин. Знаейки от (9.3) движението $\mathbf{r}_\nu(t)$, реакциите $\mathbf{R}_\nu$ можем да намерим директно от (9.2). Нека въведем обобщените сили

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^{N} \mathbf{F}_\nu . \frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{9.4}$$

където предполагаме, че съществува функция $V = V(q_1, \ldots, q_n, t)$ такава, че

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.5}$$

Такива сили ще наричаме потенциални, а функцията V-потенциална енергия. Ще отбележим, че ако силите $\mathbf{F}_\nu$ са потенциални, т.е. съществува функция $U = U(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t)$ такава, че

$$\mathbf{F}_\nu = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N, \tag{9.6}$$

то
$$V(q_1,\ldots,q_n,t)=U(\mathbf{r}_1(q_1,\ldots,q_n,t),\ldots,\mathbf{r}_N(q_1,\ldots,q_n,t),t), \tag{9.7}$$
което се проверява непосредствено.

Нека сега построим, основната в нашите построения, функция на Лагранж

$$L=L(\dot q_1,\ldots,\dot q_n,q_1,\ldots,q_n,t)=T-V, \quad T=\sum_{\nu=1}^{N}\frac{m_\nu v_\nu^2}{2}, \tag{9.8}$$

където
$$\mathbf{v}_\nu=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial t}. \tag{9.9}$$

Функциите $\dot q_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$ се наричат обобщени скорости.

Действие по Лагранж се нарича функционала

$$S[q]=\int_{t_0}^{t_1}L(\dot q,q,t)\,dt, \quad q=(q_1,...,q_n),\ \dot q=(\dot q_1,...,\dot q_n), \tag{9.10}$$

който се разглежда върху множеството от криви $q_i=q_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, съединяващи две фиксирани точки $q_i^0=q_i(t_0)$, $i=1,2,\ldots,n$ и $q_i^1=q_i(t_1)$, $i=1,2,\ldots,n$.

Принцип на Хамилтон.

Нека е дадено положението на системата в началния момент t_0 и крайния момент t_1, тогава за функциите $q_i(t)$, $i=1,\ldots,n$ описващи движението на системата от дадено начално положение до дадено крайно положение действието $S[q]$ има стационарно значение.

От доказаната по–горе теорема на Ойлер–Лагранж имаме следната основна

Теорема на Лагранж. Движението на система от N материални точки, на която са наложени l връзки (9.1) и силите Q_i са потенциални (т.е. от вида (9.5)) е такова, че съответните обобщени координати $q_i(t)$ удовлетворяват уравненията на Лагранж
$$\frac{d}{dt}L_{\dot q_i}-L_{q_i}=0, \quad i=1,\ldots,n. \tag{9.11}$$

Първи интеграли на уравненията на Лагранж.

Интеграл на енергията. Нека функцията на Лагранж L не зависи явно от времето:
$$\frac{\partial L}{\partial t}=0. \tag{9.12}$$

Тогава величината
$$E=\sum_{i=1}^{n}\dot q\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}-L \tag{9.13}$$

е пръв интеграл на уравненията на Лагранж (9.11).

Деиствително, отчитайки (9.12), получаваме

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i. \tag{9.14}$$

Последното равенство, вследствие на уравненията (9.11), можем да запишем във вида

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0, \tag{9.15}$$

което показва, че (9.13) е пръв интеграл на уравненията (9.11).

Циклични координати. Координатата q_l ще наричаме циклична, ако функцията на Лагранж не зависи явно от q_l, т.е.

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = 0. \tag{9.16}$$

Тогава непосредствено от (9.11) следва , че съответният обобщен импулс

$$p_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \tag{9.17}$$

е пръв интеграл на уравненията (9.11).

Задача 1а Да се съставят и решат уравненията на Лагранж, където

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i\dot{q}_i^2 + 2q_i\dot{q}_i \sin t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(c_i - \cos t)q_i^2, \tag{1a.1}$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i + \dot{q}_i t}{\cos^2(q_i t)}, \tag{1a.2}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg(z + \frac{\dot{x}}{x} + \frac{\dot{y}}{y}). \tag{1a.3}$$

Задача 2а Да се намери закона на движение на частица с лагранжиан

$$L = t\sqrt{1 + \dot{x}^2}. \tag{2a.4}$$

10. Уравнения на Хамилтон. Нека имаме уравнението

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}. \tag{10.A}$$

Полагаме

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v}, \tag{10.AA}$$

и въвеждаме функцията

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = T + V.$$

Очевидно

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}.$$

Тогава системата (10.AA) дава

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \tag{10.B}$$

Така уравненията от втори ред (10.A) сведохме до система уравнения от първи ред (10.B), които се нарича уравнения на Хамилтон. Тук ще покажем, как тази процедура може да се обобщи за общия случай на система уравнения на Лагранж.

10.a. Преобразование на Лежандър.

Теорема на Донкин Нека е дадена функцията $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, за която хесиана

$$\det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_k}\right) \neq 0 \tag{10.1}$$

и нека имаме смяната на променливите породена от функцията X:

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Тогава съществува обратната смяна

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10.3}$$

където пораждащата функция $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$ е свързана с пораждащата X по формулата:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - X. \tag{10.4}$$

Тук $Y = Y(y_1, \ldots, y_n)$, т.е. от (10.2) сме намерили $x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n)$ и сме ги заместили в (10.4).

Ако функцията $X = X(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, където $\alpha_j, j = 1, ..., m$ са параметри то $Y = Y(y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{10.5}$$

Доказателство. От условието (10.1) следва, че системата (10.2) е разрешима относно $x_1, \ldots, x_n$ т.е.

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n) \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.6}$$

Нека Y е построена по формулата (10.4), където x_i се определят от (10.6). Имаме, отчитайки (10.2),

$$\frac{\partial Y}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X) = x_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} y_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i} = x_i. \tag{10.7}$$

За да докажем (10.5) забелязваме, че

$$x_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{10.8}$$

Тогава от (10.4) имаме

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j}(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} y_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial X}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial X}{\partial \alpha_j}, \tag{10.9}$$

което и трябваше да докажем.

10 б. Уравнения на Хамилтон. Консервативна система- закон за запазване на енергията.

Нека имаме функцията на Лагранж $L = L(\dot{q}_i, q_i, t)$, където променливите $(t, q_i, \dot{q}_i)$ дават момента на движение, положението и скоростите на системата от материални точки. Тогава уравненията на Лагранж са

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{10.10}$$

Нека е изпълнено условието

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0. \tag{10.10a}$$

Нека въведем променливите (канонични) t, q_i, p_i, където

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{10.11}$$

се наричат обобщени импулси. Тогава уравненията на движение (10.10) се записват като следната система от $2n$ обикновени уравнения

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10.12}$$

наричани хамилтонови уравнения, където функцията на Хамилтон $H = H(t, q_i, p_i)$ се определя чрез функцията на Лагранж по формулата

$$H = H(t, q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i \, \widehat{\dot{q}_i} - \widehat{L} \,. \tag{10.13}$$

Тук и по-нататък $\frown$ означава, че $\dot{q}_i$ са определени от (10.11) като функции на p_i, q_i, t , т.е. $\dot{q}_i = f_i(p, q, t)$, което е възможно вследствие на условието (10.10а).

Доказателство на (10.10) $\to$ (10.12),(да се отбележи и обратната релация (10.12) $\to$ (10.10)) Доказателството ще получим с теоремата на Донкин. Нека положим

$$X = L, \quad x_i = \dot{q}_i,\, y_i = p_i,\, \alpha_i = q_i, i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_{n+1} = t, \tag{10.14}$$

$$H = Y = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{10.15}$$

Тогава от втората част на теоремата получаваме

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{10.16}$$

От тук, отчитайки (10.11) ($p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$), получаваме че уравненията на Лагранж (10.10) се записват във вида

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{10.17}$$

За да получим първите n уравнения, остава да отбележим, че от първата част на теоремата (10.3) имаме

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.18}$$

10 в. Вариационен принцип: уравненията на Хамилтон са уравнения на Лагранж за функционала

$$S[p, q] = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)) \, dt. \tag{10.19}$$

По точно, нека разгледаме подинтегралната функция като функция на променливите $\dot{p}_i, \dot{q}_i, p_i, q_i, t$,т.е.

$$L^* = L^*(\dot{p}_1 \ldots, \dot{p}_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, p_1 \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(p_1 \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t). \tag{10.20}$$

Тогава уравненията на Хамилтон (10.12) могат да бъдат записани във форма на Лагранж :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n \tag{10.21}$$

Действително:

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \quad \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0, \quad \frac{\partial L^*}{\partial p_i} = \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{10.21a}$$

11. Примери за функции на Лагранж и Хамилтон.

1. Функция на Лагранж за една свободна точка
а. декартови координати

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{11.1}$$

б. цилиндрични координати

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \tag{11.2}$$

в. сферични координати

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2). \tag{11.3}$$

Система от материални точки

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} - V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N), \tag{11.4}$$

където

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2}, \quad V(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N), \quad \mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{11.5}$$

са кинетичната и потенциалната енергии, а $\mathbf{F}_i$- съответните сили.

Задача 1б Да се намери хамилтониана и да се съставят уравненията на Хамилтон за механични системи с лагранжиан

$$L = \frac{3}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 - q_1 q_2, \tag{1b.1}$$

$$L = \frac{5}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\cos(q_1 - q_2) + 3\cos q_1 + \cos q_2, \tag{1b.2}$$

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{4}(\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2 + \frac{1}{4}(\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2 - 2(q_1^2 + q_2^2 - q_1 q_2) - \frac{1}{4}(q_3^2 + q_4^2), \quad (1b.3)$$

$$L = \frac{1}{2}[(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + a\dot{q}_1^2 t^2] - a\cos q_2, \quad (1b.4)$$

$$L = a\dot{q}_1^2 + (c^2 + b^2 \cos^2 q_1)\dot{q}_2^2. \quad (1b.5)$$

Задача 2б Да се намери лагранжиана на механични системи, за които хамилтониана се дава с израза

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2, \quad (1b.6)$$

$$H = q_1 p_2 - q_2 p_1 + a(p_1^2 + p_2^2), \quad (1b.7)$$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \frac{p_2^2}{\sin^2 q_1}) - a\cos q_1, \quad (1b.8)$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{p_1^2 + p_2^2}{q_1^2 + q_2^2} + a(q_1^2 + q_2^2), \quad (1b.9)$$

$$H = p_1 p_2 + q_1 q_2. \quad (1b.10)$$

Задача 3б Да се решат уравненията на Хамилтон, ако

$$H = F\{f_2[f_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3\}, \quad (1b.11)$$

където системата уравнения

$$y_1 = f_1(q_1, p_1), \quad y_2 = f_2(\alpha, q_2, p_2), \quad y_3 = F(\beta, q_3, p_3) \quad (1b.12)$$

е разрешима относно импулсите:

$$p_1 = \psi(y_1, q_1), \quad p_2 = \psi_2(\alpha, y_2, q_2), \quad p_3 = \psi(\beta, y_3, q_3). \quad (1b.13)$$

Задача 4б Да се решат уравненията на Хамилтон, ако

$$H = (p_1^2 + q_1^2)F(p_2, \ldots, p_n, t). \quad (1b.14)$$

Задача 5б Нека

$$q_i = \varphi_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad p_i = \psi_i(\alpha_j, \beta_j, t), \quad i = 1, \ldots, n \quad (1b.15)$$

са решения на уравненията на Хамилтон

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \quad (1b.16)$$

Да се намерят решенията на хамилтоновата система

$$H(q_i, p_i, t) = H_0(q_i, p_i + \frac{f(q_j, t)}{\partial q_i}, t) + \frac{f(q_i, t)}{\partial t}, \quad (1b.17)$$

където $f(q_1,\ldots,q_n,t)$ е дадена функция.

задача 6б Нека

$$q_i=\varphi_i(\alpha_j,\beta_j,t),\quad p_i=\psi_i(\alpha_j,\beta_j,t),\quad i=1,\ldots,n \tag{1b.18}$$

са решения на уравненията на Хамилтон

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H_0}{\partial p_i}\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H_0}{\partial q_i}. \tag{1b.19}$$

Да се намери движението на системата с хамилтониан

$$H_1=\gamma(t)H_0(q_i,p_i). \tag{1b.20}$$

задача 7б На система с лагранжиан $L(\dot{q}_i,q_i,t)$ при прехода в канонически променливи съответсвува хамилтониан $H(q_i,p_i,t)$. Да се намери хамилтониана $\tilde{H}(q_i,p_i,t)$, съответствуващ на лагранжиана

$$\tilde{L}(q_i,\dot{q}_i,t)=L(q_i,\dot{q}_i,t)+\frac{d}{dt}F(q_i,t), \tag{1b.21}$$

където

$$\frac{d}{dt}F(q_i,t)=\frac{\partial F}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i. \tag{1b.21}$$

12. Класическа скобка на Поасон. Теорема на Якоби– Поасон. Нека е дадена хамилтоновата системата

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{12.1}$$

където хамилтониана

$$H = H(p, q, t), \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \quad q = (q_1, \ldots, q_n). \tag{12.2}$$

Дефиниция. Функцията $f(q, p, t)$ е пръв интеграл на системата (12.1), ако за всяко решение $q_i(t), p_i(t), i = 1, \ldots, n$

$$f(q(t), p(t), t) = \mathrm{Const}. \tag{12.3}$$

Следователно

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{12.4}$$

Дефиниция. Нека са дадени функциите $f(q, p)$, $g(q, p)$ $q, p \in \mathbb{R}^n$, построената по тях функция $\{f, g\}(q, p)$, наричана скобка на Поасон, се определя по формулата

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \tag{12.5}$$

От тук получаваме

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \tag{12.6}$$

и следователно имаме

Теорема. За да бъде $f(q, p, t)$ пръв интеграл на системата (12.1) е необходимо и достатъчно

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \tag{12.7}$$

Свойства на скобката на Поасон

1. Кососиметричност

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \tag{12.8}$$

2. Линейност

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\}. \tag{12.9}$$

3. Тъждество на Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0. \tag{12.10}$$

4. Диференциране по параметър

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}. \tag{12.11}$$

5. Скобката на Поасон е оператор на диференциране (правило на Лайбниц)

$$\{f, gh\} = g\{f,h\} + h\{f,g\}. \tag{12.12}$$

Последното свойство се проверява ако отбележим, че скобката па Поасон можем да разглеждаме като линеен диференциален оператор

$$X_f g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} \right) g. \tag{12.12a}$$

Преди да докажем горните свойства (освен тъждеството на Якоби, останалите свойства са очевидни) ще формулираме основния резултат на този въпрос.

Теорема на Якоби–Поасон. Ако f и g са първи интеграли на (1.1) то и $\{f,g\}$ е пръв интеграл на (1.1).

Доказателство. Нека е дадено

$$\{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \{g,H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0. \tag{12.13}$$

Ще докажем, че

$$\{\{f,g\},H\} + \frac{\partial \{f,g\}}{\partial t} = 0. \tag{12.14}$$

Имаме от (12.11) равенството

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\} = -\{\{f,H\},g\} - \{f,\{g,H\}\}, \tag{12.15}$$

което поставено в (12.13) дава равенството

$$-\{\{f,H\},g\} - \{f,\{g,H\}\} + \{\{f,g\},H\} = 0. \tag{12.16}$$

Верността на последното равенство, отчитайки кососиметричността (12.11), следва директно от тъждеството на Якоби. Теоремата е доказана.

Класически пример: Затворена свободна система от N точки

Нека означим координатите и импулсите на точка съответно чрез

$$x,\ y,\ z, \quad p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y},\ p_z = m\dot{z} \tag{12.17}$$

и нека компонентите на момента на количеството на движение на системата са:

$$M_x = \sum m_x = \sum (yp_z - zp_y),$$

$$M_y = \sum m_y = \sum (zp_x - xp_z),$$

$$M_z = \sum m_x = \sum (xp_y - yp_x), \tag{12.18}$$

а компонентите на импулса (количеството на движение) на системата са

$$P_x = \sum p_x, \quad P_y = \sum p_y, \quad P_z = \sum p_z, \tag{12.19}$$

където сумирането е по всички точки.

Имаме първите интеграли

$$P_x = c_1,\ P_y = c_2,\ P_z = c_3, \quad M_x = c_4,\ M_y = c_5,\ M_z = c_6. \tag{12.20}$$

Пресмятаме скобките на Поасон

$$\{p_x, p_y\} = 0, \quad \{p_x, m_y\} = p_z, \quad \{m_x, m_y\} = m_z. \tag{12.21}$$

Следователно

$$\{P_x, P_y\} = \sum \{p_x, p_y\} = 0, \tag{12.22a}$$

$$\{P_x, M_y\} = \sum \{p_x, m_y\} = \sum p_z = P_z, \tag{12.22b}$$

$$\{M_x, M_y\} = \sum \{m_x, m_y\} = \sum m_z = M_z, \tag{12.22c}$$

и циклично

$$\{P_y, P_z\} = 0, \quad \{P_z, P_x\} = 0, \tag{12.22d}$$

$$\{P_y, M_z\} = P_x, \quad \{P_z, M_x\} = P_y, \tag{12.22e}$$

$$\{M_y, M_z\} = M_x, \quad \{M_z, M_x\} = M_y. \tag{12.22f}$$

От тук получаваме, че ако имаме първите интеграли

$$P_x = c_1, \quad M_x = c_4, \quad M_y = c_5 \tag{12.23a}$$

то имаме и първите интеграли

$$\{P_x, M_y\} = P_z = c_3 \to \{P_z, M_x\} = P_x = c_2, \quad \{M_x, M_y\} = M_z = c_6. \tag{12.23b}$$

Доказателство на тъждеството на Якоби (12.10) Нека имаме линейните диференциални оператори

$$Xf = \sum_{k=1}^{m} X_k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad Yf = \sum_{k=1}^{m} Y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}. \tag{12.24}$$

Комутатор на операторите (12.24) наричаме оператора

$$Z = XY - YX. \tag{12.25}$$

Лесно се проверява, че Z действува по формулата

$$Zf = X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{k=1}^{m} (X(Y_k) - Y(X_k)) \frac{\partial f}{\partial x_k} \tag{12.26}$$

т.е. комутаторът е диференциален оператор от първи ред. От определението на скобката на Поасон следва, че лявата част в тъждеството на Якоби е сума от събираеми съдържащи вторите производни от f, g и h. Сега за да докажем тъждеството на Якоби остава да отбележим, че от (12.12a) имаме

$$\{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \{g, \{h, f\}\} - \{h, \{g, f\}\} = (GH - HG)f \tag{12.27}$$

където операторите

$$G = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right), \quad H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right). \tag{12.28}$$

Следователно изразът (12.27) не съдържа втори производни от f, а следователно и в тъждеството на Якоби нямаме втори производни от f, аналогично получаваме, че нямаме втори производни от g и h, което и трябваше да докажем.

задача 1в Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = q^2 + p^2, \quad \psi = \arctan \frac{p}{q}. \tag{1c.2}$$

$$\varphi = \varphi(q^2 + p^2), \quad \psi = \arctan \frac{p}{q}. \tag{1c.3}$$

$$\varphi = q_i, \quad \psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t). \tag{1c.4}$$

$$\varphi = p_i, \quad \psi = \psi(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t). \tag{1c.5}$$

$$\varphi = q_i, \quad \psi = p_k, \tag{1c.6}$$

$$\varphi = q_i, \quad \psi = q_k, \tag{1c.7}$$

$$\varphi = p_i, \quad \psi = p_k, \tag{1c.8}$$

$$\varphi = \varphi(p_1, q_1), \quad \psi = F(\varphi(p_1, q_1), q_2, \ldots, q_n, p_2, \ldots, p_n, t). \tag{1c.9}$$

задача 2в Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = q \cos \omega t + \frac{p}{\omega} \sin \omega t, \quad \psi = p \cos \omega t - q\omega \sin \omega t. \tag{1c.10}$$

задача 3в Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = \varphi[\sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2)], \quad \psi = \psi[\sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2)]. \tag{1c.11}$$

$$\varphi = \cos[\sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2)], \quad \psi = \sin[\sum_{i=1}^{n} (p_i^2 + q_i^2)]. \tag{1c.12}$$

задача 4в Да се пресметнат скобките на Поасон за

$$\varphi = f_1(g(q_i, p_i)), \quad \psi = f_2(g(q_i, p_i)). \tag{1c.13}$$

13. Уравнение на Хамилтон–Якоби. Пълен интеграл, теорема на Хамилтон–Якоби.

Уравнение на Хамилтон-Якоби.

Нека е дадена хамилтоновата системата

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{13.1}$$

където хамилтониана

$$H = H(t, q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n). \tag{13.2}$$

Нека по H построим уравнението

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q_1, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}) = 0, \tag{13.3}$$

което се нарича уравнение на Хамилтон-Якоби. Пълен интеграл на (13.3) ще наричаме решение

$$S = S(t, q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n) \tag{13.4}$$

където α_j са произволни константи, за което

$$\det\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| \neq 0. \tag{13.5}$$

Лема. Нека $S = S(t, q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_m)$ е решение на (13.3). Тогава функциите

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, ..., m \tag{13.6}$$

са първи интеграли на системата (13.1), т.е. за всяко решение $q_i = q_i(t)$ на (13.1) имаме

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = 0. \tag{13.7}$$

Доказателство. Имаме

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\frac{dq_i}{d\,t}. \tag{13.8}$$

а от (13.3) получаваме

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_j \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{dH}{dp_i}\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} = 0. \tag{13.9}$$

Следователно

$$\frac{d}{d\,t}\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\left(\frac{dq_i}{d\,t} - \frac{dH}{dp_i}\right). \tag{13.10}$$

Лемата е доказана.

Справедлива е следната фундаментална

Теорема на Хамилтон-Якоби. Нека $S = S(t, q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ е пълен интеграл на уравнението (13.3) и нека β_j, $j = 1, ..., n$ са произволни константи. Тогава функциите $q_i = q_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, които се определят еднозначно от уравненията

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad j = 1, ..., n, \tag{13.11}$$

заедно с функциите

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \quad j = 1, ..., n \tag{13.12}$$

дават общото решение на уравненията на Хамилтон (13.1). (За да получим $p_i = p_i(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ заместваме в десните страни на (13.12) намерените от (13.11) функции q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.)

Доказателство. От (13.10) и (13.11) имаме равенствата

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j} \left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{dH}{dp_i} \right) = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{13.13}$$

които вследствие на условието (13.5) дават уравненията $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. От (13.12) имаме

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_k} \frac{dq_k}{dt}, \tag{13.14}$$

а от (13.3) получаваме

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_k} = 0. \tag{13.15}$$

Замествайки $\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t}$ от (13.15) в (13.14) получаваме и уравненията $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$. Теоремата е доказана.

Забележка. Ако Хамилтониана не зависи явно от времето т.е.

$$H = H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n), \ \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

можем да положим

$$S = W(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n) - \alpha_1 t \tag{13.16}$$

и за W получаваме уравнението

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}) = \alpha_1, \tag{13.17}$$

където

$$\det\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| = \det\|\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| \neq 0. \tag{13.18}$$

За q_i получаваме уравненията

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad j = 2, ..., n, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t = \beta_1. \tag{13.19}$$

14. Методи за решаване на уравнението на Хамилтон–Якоби: циклични координати, разделяне на променливите. Примери: хармоничен осцилатор, математическо махало.

Хармоничен осцилатор. Имаме хамилтониана

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2}. \tag{14.1}$$

Уравненията на Хамилтон дават

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m},$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -cq.$$

Следователно

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\frac{c}{m}q, \quad \ddot{q} + k^2 q = 0, \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Решението на това уравнение е добре известно

$$q = a\sin(kt + \gamma). \tag{14.2}$$

Сега ще получим това решение с уравнението на Хамилтон – Якоби (13.3). В нашия пример то дава

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = 0. \tag{14.3}$$

Полагайки в (14.3)

$$S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha t,$$

получаваме

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{cq^2}{2} = \alpha.$$

Решението на последното уравнение е

$$W(q, \alpha) = \sqrt{mc}\int dq\,\sqrt{\frac{2\alpha}{c} - q^2}.$$

От тук за уравнението (13.11) имаме

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sqrt{\frac{m}{c}} \int \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\alpha}{c} - q^2}} - t.$$

Пресмятайки последния интеграл, получаваме

$$t + \beta = \sqrt{\frac{m}{c}} \arcsin q \sqrt{\frac{c}{2\alpha}},$$

т. е.

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{c}} \sin k(t + \beta),$$

което и трябваше да покажем.

15. Канонични преобразования. Уравнението на Хамилтон–Якоби като канонично преобразование.

Преобразованието

$$\begin{array}{ll} Q_i = Q_i(q,p,t), \quad q = (q_1,\ldots,q_n), & p = (p_1,\ldots,p_n) \\ P_i = P_i(q,p,t), \qquad\qquad\qquad i = 1,\ldots,n & \end{array} \tag{15.1}$$

наричаме канонично(времето t разглеждаме като параметър), ако преобразува всяка хамилтонова система

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{15.2}$$

в хамилтонова система

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{15.3}$$

където $K = K(P,Q,t)$ е съответния преобразуван хамилтониан.

Важността на каноничните преобразования се състои в това, че те дават възможност изходната хамилтонова система да се замени с по проста. Преди да приведем някои характерни примери, ще формулираме

Основен критерий за каноничност. За да бъде преобразованието (15.1) каноническо е необходимо и достатъчно да съществува функция $F = F(q,Q,t)$ (наричана пораждаща функция), така че преобразованието (15.1) заедно със съответния хамилтониан да се запише във вида

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad K = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{15.4}$$

При това имаме

$$F_2 = F_2(q,P,t): \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \tag{15.5}$$

$$F_3 = F_3(p,Q,t): \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}, \tag{15.6}$$

$$F_4 = F_4(p,P,t): \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}. \tag{15.7}$$

Примери.

1. Тъждественото преобразование:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i \tag{15.8}$$

2.Точково преобразование (да се сравни с инвариантност на уравненията на Лагранж относно смяната $q_i = q_i^*(\xi_1,...,\xi_n,t)$, $i = 1,...,n$..)

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(q_1, \ldots, q_n) P_i \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q_1, \ldots, q_n, t), \tag{15.9}$$

3. Еквивалентност на каноничните променливи:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n} q_i P_i \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = -q_i. \tag{15.10}$$

4. Хармоничен осцилатор: Имаме преобразованието

$$F = \frac{m}{2}\omega q^2 \mathrm{cotan} Q, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega q \mathrm{cotan} Q, \quad P = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} = \frac{m\omega q^2}{2\sin^2 Q}, \tag{15.11}$$

което разрешено относно старите променливи дава

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega} \cos Q \tag{15.12}$$

Следователно за изходния хамилтониан

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \tag{15.13}$$

получаваме в новите променливи

$$K = H = \omega P \cos^2 Q + \omega P \sin^2 Q = \omega P, \quad \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega, \quad Q = \omega t + \alpha. \tag{15.14}$$

Оттук, отчитайки (15.12), имаме $q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega}} \sin(\omega t + \alpha)$.(Имаме пръв интеграл $P = E$.)

Доказателство на критерия за каноничност се основава на лесно проверяемия факт, че уравненията на Лагранж за функционалите

$$\int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q, t)\, dt \qquad \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\dot{q}, q, t)\, dt \tag{15.15}$$

съвпадат тогава и само тогава когато подинтегралните функции се различават на пълна производна по t от функция $F = F(q, t)$. Както вече отбелязахме, уравненията на Хамилтон можем да разглеждаме като уравнения на Лагранж за функционала

$$S(q, p) = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H)\, dt. \tag{15.16}$$

Нека q_i, p_i са съответните екстремали, тогава функциите P_i, Q_i, определени от (15.1) са екстремали на функционала

$$S(Q, P) = \int_{t_0}^{t_1} (\sum_{i=1}^{n} P_i \dot{Q}_i - K)\, dt. \tag{15.17}$$

По направената по–горе забележка, имаме

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \frac{d}{dt}F(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial Q_i}\dot{Q}_i + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (15.18)$$

Разглеждайки в горното неравенство като независими променливи q_i, Q_i (Ще отбележим, че в (15.18), наред с времето имаме $4n$ променливи, свързани с $2n$ равенства и следователно независими остават $2n$ променливи), условията (15.4) получаваме като сравним коефициентите пред q_i, Q_i и свободните членове. Преобразованието (15.5) получаваме по формулата

$$F_2(q,P,t) = F(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i. \quad (15.19)$$

Аналогично преобразованието (15.6) получаваме по формулата

$$F_2(Q,p,t) = F(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{n} p_i p_i. \quad (15.20)$$

16. Теорема на Лиувил. Напълно интегрируема хамилтонова система.

Теорема на Лиувил. Разглеждаме системата

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{16.1}$$

където хамилтониана

$$H = H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n), \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0. \tag{16.2}$$

Дадени са n първи интеграла

$$F_j = F_j(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \ F_1 = H, \tag{16.3}$$

където α_j са произволни константи. Ще напомним, че ако H не зависи явно от t то $\frac{d\,H}{d\,t} = \frac{\partial H}{\partial t}$, което дава $H = \alpha_1$.

Предполагаме, че функциите F_j са в инволюция:

$$\{F_j, F_k\} = 0 \quad j, k = 1, 2, ..., n. \tag{16.4}$$

Ще отбележим, че равенствата (16.4) следва да се разбират като тъждества относно q_i, p_i , защото иначе имаме нов първи интеграл. Нека сега разгледаме равенствата (16.3) при дадени α_j като уравнения относно p_j. Предполагаме, че

$$\frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(p_1, ..., p_n)} \neq 0. \tag{16.5}$$

Тогава разрешаваме тези уравнения относно p_j:

$$p_j = f_j(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n). \tag{16.6}$$

Разглеждаме функците

$$\Phi_j = p_j - f_j(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n). \tag{16.7}$$

Нека отбележим, че ако $\Phi_j = 0$ то $F_j = \alpha_j$ и обратно.

Справедлива е следната лема.

Лема. Нека функциите F_j са в инволюция, тогава и функциите Φ_j са в инволюция:

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0 \quad j, k = 1, 2, ..., n. \tag{16.8}$$

Доказателство. Нека подставим в (16.3) $p_j = f_j$, получаваме тъждество, което диференцираме по q_j:

$$\frac{\partial F_j}{\partial q_s} + \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_s} = 0 \tag{16.9}$$

т.е.

$$\frac{\partial F_j}{\partial q_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial q_s}, \tag{16.10}$$

тъй като

$$\frac{\partial p_\gamma}{\partial q_s} = 0, \quad \gamma, s = 1, 2, ..., n. \tag{16.11}$$

По нататък имаме

$$\frac{\partial F_k}{\partial p_s} = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \frac{\partial (p_\delta - f_\delta)}{\partial p_s}. \tag{16.12}$$

От (16.11) и (16.12) получаваме

$$\frac{\partial F_j}{\partial q_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial q_s} \frac{\partial (p_\delta - f_\delta)}{\partial p_s}. \tag{16.13}$$

Сменяйки q_s на p_s в последното равенство получаваме

$$\frac{\partial F_j}{\partial p_s} \frac{\partial F_k}{\partial q_s} = \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \frac{\partial (p_\gamma - f_\gamma)}{\partial p_s} \frac{\partial (p_\delta - f_\delta)}{\partial q_s}. \tag{16.14}$$

От (16.13) и(16.14), отчитайки (16.4), получаваме

$$\{F_j, F_k\} \equiv \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{\partial F_j}{\partial q_s} \frac{\partial F_k}{\partial p_s} - \frac{\partial F_j}{\partial p_s} \frac{\partial F_k}{\partial q_s} \right\} = \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \{\Phi_\gamma, \Phi_\delta\} \equiv 0. \tag{16.15}$$

Полагаме

$$z_\gamma^{(k)} = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \{\Phi_\gamma, \Phi_\delta\}. \tag{16.16}$$

Тогава (16.15) дава

$$\sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial p_\gamma} z_\gamma^{(k)} = 0, \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{16.17}$$

При фиксирано k това е система от n уравнения за величините $z_\gamma^{(k)}$. Тъй като е изпълнено условието (16.5) имаме

$$z_\gamma^{(k)} = \sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial p_\delta} \{\Phi_\gamma, \Phi_\delta\} = 0, \quad (\gamma, k = 1, ..., n). \tag{16.18}$$

При фиксирано γ това е система от n уравнения за величините $\{\Phi_j, \Phi_k\}$. Тъй като за детерминантата от коефициентите е изпълнено условието (16.5) имаме $\{\Phi_j, \Phi_k\} = 0$, с което лемата е доказана.

Теорема на Лиувил. Нека уравненията на Хамилтон (16.1)-(16.2) имат n първи интеграла F_j, $j = 1, 2, ..., n$ в инволюция. Тогава системата (16.1) се интегрира в квадратури.

Доказателство. Нека $F_k, F_l, (k, l = 1, 2, ..., n)$ са в инволюция , тогава по доказаната лема и скобката на Поасон :

$$\{\Phi_j, \Phi_k\} = \{p_k - f_k, p_l - f_l\} = 0 \quad j, k = 1, 2, ..., n, \tag{16.19}$$

и следователно

$$\frac{\partial f_k}{\partial q_l} = \frac{\partial f_l}{\partial q_k}, \quad (k, l = 1, 2, ..., n). \tag{16.20}$$

Да разгледаме диференциалната форма

$$f_1\, dq_1 + ... + f_n\, dq_n, \tag{16.21}$$

от (16.20) следва, че тя е пълен диференциал, т.е. съществува функция $W(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ (α_j-параметри), така, че

$$f_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \tag{16.22}$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\, dq_i = dW = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_i}\, dq_i. \tag{16.23}$$

Нека си спомним, че F_k са първи интеграли $F_k = \alpha_k$ и следователно импулсите

$$p_k = f_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}. \tag{16.24}$$

По този начин намерихме импулсите p_k като функции на q_j и произволни n константи α_j. Остана да намерим q_i като функции на времето t и още n константи. Но имаме първия интеграл

$$H(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = \alpha_1 \tag{16.25}$$

и вследствие на (16.24) получаваме, че W удовлетворява уравнението

$$H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial W}{\partial q_n}) = \alpha_1, \tag{16.26}$$

където W съществува защото са изпълнени условията (16.20). Нека сега си спомним уравнението на Хамилтон-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ..., q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_n}) = 0, \tag{16.27}$$

за което търсим пълен интеграл

$$\det\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| \neq 0. \tag{16.28}$$

Тъй като H не зависи от t, то S можем да търсим във вида

$$S = W(q_1, ..., q_n, \alpha_1, ..., \alpha_n) - \alpha_1 t \tag{16.29}$$

и за W получаваме уравнението (16.26), при това

$$\det\|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| = \det\|\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial \alpha_k}\| \neq 0. \tag{16.30}$$

За q_i получаваме уравненията

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_j} = \beta_j, \quad j = 2, ..., n, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} - t = \beta_1. \tag{16.31}$$

Остава да покажем, че е изпълнено условието (16.30). Тъй като от (16.22) имаме

$$\frac{\partial f_k}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_k \partial \alpha_j}, \tag{16.32}$$

то остава да докажем, че

$$\det\|\frac{\partial f_k}{\partial \alpha_j}\| = \frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)} \neq 0, \tag{16.33}$$

което е следствие от (16.5). Действително нека разгледаме равенствата (16.3):

$$F_j(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{16.34}$$

и очевидното равенство

$$\frac{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)}{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)} = 1. \tag{16.35}$$

Да заместим в (16.35) α_j от (16.34). Имаме

$$1 = \frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)} = \frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(p_1, ..., p_n)} \frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)}. \tag{16.36}$$

Следователно

$$\frac{D(f_1, ..., f_n)}{D(\alpha_1, ..., \alpha_n)} = \left(\frac{D(F_1, ..., F_n)}{D(p_1, ..., p_n)}\right)^{-1} \neq 0. \tag{16.37}$$

Теоремата е доказана.

Пример. Движение на твърдо тяло в случая на Лагранж. Имаме

$$L = \frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + \frac{1}{2}C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)^2 - Mg\zeta_c\cos\theta. \tag{16.38}$$

Следователно

$$p_\theta = A\dot{\theta}, \quad p_\psi = A\sin^2\theta\dot{\psi} + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta, \quad p_\varphi = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta. \tag{16.39}$$

Първи интеграли са H, p_φ, p_ψ. Те са в инволюция

$$\{p_\varphi, p_\psi\} = 0,\ \{p_\varphi, H\} = 0,\ \{H, p_\psi\} = 0,$$

защото по теоремата на Донкин имаме

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial L}{\partial \psi} = 0. \tag{16.40}$$

Следователно по теоремата на Лиувил задачата се интегрира в квадратури.

17. Инвариантни функционали. Теорема на Ньотер за първи интеграли на уравненията на Лагранж.

Върху понятието инвариантност. Нека разгледаме функциите:

$$\varphi_1(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}, \quad \varphi_2(x,y) = mgy. \tag{17.1a}$$

При преобразованието

$$x = \xi\cos\phi - \eta\sin\phi, \quad y = \xi\sin\phi + \eta\cos\phi \tag{17.2a}$$

получаваме

$$\tilde{\varphi}_1(\xi,\eta) = \frac{\xi^2+\eta^2}{2}, \quad \varphi_2(\xi,\eta) = mg(\xi\sin\phi + \eta\cos\phi). \tag{17.3a}$$

При преобразованието

$$x = \xi + a, \quad y = \eta \tag{17.4a}$$

получаваме

$$\tilde{\varphi}_1(\xi,\eta) = \frac{1}{2}((\xi+a)^2+\eta^2), \quad \varphi_2(\xi,\eta) = mg\eta. \tag{17.5a}$$

Естествено е да наречем функцията φ_1 инвариантна при преобразованието (17.2a), а функцията φ_2 инвариантна при преобразованието (17.4a). Сега ще дадем общо

определение на инвариантност. Нека е дадена функцията

$$\varphi = \bar{\varphi}(q_1,\dots,q_n) \tag{17.6a}$$

и смяната

$$q_i = q_i^*(\xi_1,\dots,\xi_n), \quad i = 1,\dots,n. \tag{17.7a}$$

В новите променливи получаваме

$$\varphi = \varphi^*(\xi_1,\dots,\xi_n) = \bar{\varphi}(q_1(\xi_1,\dots,\xi_n),\dots,q_1(\xi_1,\dots,\xi_n)). \tag{17.8a}$$

Функцията φ наричаме инвариантна относно смяната (17.7a), ако

$$\varphi^*(\xi_1,\dots,\xi_n) = \bar{\varphi}(q_1,\dots,q_n), \tag{17.9a}$$

т.е. вместо да правим смяната (17.7a) е достатъчно в израза за $\bar{\varphi}$ вместо q_i да напишем ξ_i.

Теорема на Ньотер .

Разглеждаме функционала

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})\,dt, \tag{17.1}$$

където $q = (q_1,...,q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1,...,\dot{q}_n)$. Нека е дадено преобразованието

$$u = \varphi(t,q(t),\dot{q}(t),\varepsilon) \tag{17.2}$$

$$y_i = \psi_i(t, q(t), \dot{q}(t), \varepsilon), \qquad i = 1, ..., n, \tag{17.3}$$

което при $\varepsilon = 0$ е тъждественото:

$$u = t, \qquad y_i(t) = q_i(t). \tag{17.4}$$

Нека е дадена крива $q = q(t)$, по която построяваме съгласно (17.2), (17.3) кривата $y = y(u, \varepsilon)$. Формално това става по следния начин: по дадена $q(t)$ от (17.2) получаваме

$$u = \Phi(t, \varepsilon), \tag{17.5}$$

а от (17.3)

$$y_i = \Psi_i(t, \varepsilon). \tag{17.6}$$

Сега предполагаме, че (17.5) е разрешимо относно t и тогава от (17.5) получаваме $t = \theta(u, \varepsilon)$, което поставяме в (17.6) и получаваме $y = y(u, \varepsilon)$. При всеки t_0 и t_1 от (17.5) намираме u_0 и u_1 (зависещи от ε). Сега можем да разглеждаме функционала

$$S[y] = \int_{u_0}^{u_1} L(u, y, \frac{dy}{du})\, du. \tag{17.7}$$

$y = (y_1, ..., y_n)$, $\frac{dy}{du} = (\frac{dy_1}{du}, ..., \frac{dy_n}{du})$

Определение. Функционалът $S[q]$ е инвариантен относно преобразованието (17.2), (17.3), ако за всяка допустима крива q имаме

$$S[q] = S[y], \tag{17.8}$$

където q и y се определят по описания по-горе начин, т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \frac{dq_i}{dt})\, dt = \int_{u_0}^{u_1} L(u, y_i, \frac{dy_i}{du})\, du. \tag{17.9}$$

Ще подчертаем, че $u_0 = u_0(\varepsilon)$, $u_1 = u_1(\varepsilon)$.

Теорема на Ньотер. Ако преобразованието (17.2), (17.3) оставя инвариантен функционала $S[q]$, т.е. изпълнено е (17.9), то уравненията на Лагранж

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}_i} - L_{q_i} = 0 \qquad i = 1, ..., n \tag{17.10}$$

имат първия интеграл

$$[L(t, q, \dot{q}) - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i L_{\dot{q}_i}(t, q, \dot{q})]\omega(t) + \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{q}_i}(t, q, \dot{q})\Omega_i(t) = Const., \tag{17.11}$$

където

$$\omega(t) = \frac{\partial \varphi(t, q(t), \dot{q}(t), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \tag{17.12}$$

$$\Omega_i(t) = \frac{\partial \psi_i(t, q(t), \dot{q}(t), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \quad i = 1, ..., n. \tag{17.13}$$

Доказателство. Нека в интеграла в дясната част на (17.9) направим смяната $u = \Phi(t,\varepsilon)$. Това дава тъждеството (относно ε):

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \frac{dq_i}{dt})\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\Phi(t,\varepsilon), \Psi_i(t,\varepsilon), \frac{\dot{\Psi}(t,\varepsilon)}{\dot{\Phi}(t,\varepsilon)}\right) \dot{\Phi}(t,\varepsilon)\, dt, \tag{17.14}$$

където използвахме, че $\frac{dy_i}{du} = \frac{dy_i}{dt}/\frac{du}{dt}$. Сега да проварираме това съотношение относно ε ,т.е. диференцираме относно ε и полагаме $\varepsilon = 0$. За целта записваме отначало (17.14) във вида

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \frac{dq_i}{dt})\, dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} L\left(t + \varepsilon\omega(t), q_i(t) + \varepsilon\Omega_i(t), \frac{\dot{q}_i(t) + \varepsilon\dot{\Omega}_i(t)}{1 + \varepsilon\dot{\omega}(t)}\right) [1 + \varepsilon\dot{\omega}(t)]\, dt + o(\varepsilon). \tag{17.15}$$

Диференцирането по ε, дава при $\varepsilon = 0$

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \{\dot{\omega}(t)L(t,q,\dot{q}) + \omega(t)L_t + \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(t)L_{q_i} + \sum_{i=1}^{n}[\dot{\Omega}_i(t) - \dot{q}_i(t)\dot{\omega}(t)]L_{q_i}\}\, dt. \tag{17.16}$$

Сега ще отбележим, че имаме равенствата

$$\dot{\omega}L + \omega L_t - \dot{\omega}\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i L_{\dot{q}_i} = \frac{d}{dt}[\omega(t)(L - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i L_{\dot{q}_i})] - \omega(t)\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(L_{q_i} - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i}), \tag{17.17}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\Omega_i L_{q_i} + \dot{\Omega}_i L_{\dot{q}_i}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \Omega_i L_{\dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(L_{q_i} - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i}). \tag{17.18}$$

Следователно (17.16) дава

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[(L - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i L_{\dot{q}_i})\omega(t) + \sum_{i=1}^{n} L_{\dot{q}_i}\Omega_i(t)]\, dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\omega(t)\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(L_{q_i} - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i}) + \sum_{i=1}^{n} \Omega_i(L_{q_i} - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}_i})]\, dt, \tag{17.19}$$

което и трябваше да докажем.

Ще приведем някои класически примери.

а. Нека $S[q]$ е инвариантен относно преобразуванието

$$u = t + \varepsilon, \quad y_i = q_i, \tag{17.20}$$

т.е. L не зависи явно от t. Тогава

$$\omega(t) = 1, \quad \Omega_i = 0 \tag{17.21}$$

и (17.11) дава интеграла на енергията

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i L_{\dot{q}_i}(\dot{q}, q) - L(\dot{q}, q) = Const. \tag{17.22}$$

б. Циклична координата, т.е. имаме инвариантност относно преобразованието

$$u = t \quad y_i = \begin{cases} q_i & (i \neq k) \\ q_k + \varepsilon & (i = k) \end{cases}, \tag{17.23}$$

тогава

$$\omega(t) = 0 \quad \Omega_i = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases} \quad (17.11) \Rightarrow L_{\dot{q}_i} = Const. \tag{17.24}$$

следователно съответния импулс е пръв интеграл.

в. Инвариантност относно ротация. Имаме преобразованието

$$\begin{gathered} u = t \\ y_1 = q_1 \cos\varepsilon - q_2 \sin\varepsilon \\ y_2 = q_1 \sin\varepsilon + q_2 \cos\varepsilon \\ y_k = q_k, \quad k = 3, \ldots, n \end{gathered} \tag{17.25}$$

следователно

$$\omega = 0, \quad \Omega_1 = -q_2,\, \Omega_2 = q_1,\, \Omega_k = 0,\, k = 3, \ldots, n. \tag{17.26}$$

и (17.11) дава момента на импулса

$$q_1 L_{\dot{q}_2} - q_2 L_{\dot{q}_1} = Const. \tag{17.27}$$

%def□□

30. Класическа и квантова механика. Основни правила за квантоване - принцип на съответствието. Оператори на координатите, импулсите и енергията.

Отначало ще изложим формалните правила за получаване уравнението на Шрьодингер съгласно принципа на съответствието на примера на класическа хамилтонова система, състояща се от частица с маса m и радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$, на която действува потенциална сила $\mathbf{F} = -\mathrm{grad}V$, $V = V(x, y, z)$. В качеството на обобщени координати имаме декартовите $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$, съответните импулси са $p_1 = m\dot{x}, p_2 = m\dot{y}, , p_3 = m\dot{z}$, а хамилтонианът тук има следния вид

$$H = H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z). \tag{30.1}$$

Уравнения на движение се дават с уравненията на Хамилтон:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{30.2}$$

Нека напомним, че за променливите $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, , p_3$ съответните скобки на Поасон удовлетворяват условията за каноничност

$$\{q_j, q_k\} = 0, \quad \{p_j, p_k\} = 0, \quad \{p_j, q_k\} = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3. \tag{30.3}$$

Пълната енергия на системата се дава със сумата на кинетичната и потенциалната енергия, изразени чрез променливите q, p, т. е. с хамилтониана:

$$E = H(p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3). \tag{30.4}$$

За да проквантуваме тази система, въвеждаме хилбертовото пространство $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ от квадратично-интегрируемите функции $f(q_1, q_2, q_3)$ със скаларно произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty_{\mathbb{R}^3}}^{\infty} f(q_1, q_2, q_3)\overline{g(q_1, q_2, q_3)}\, dq_1 dq_2 dq_3. \tag{30.5}$$

Сега съпоставяме на координатите и импулсите съответно операторите на умножение и диференциране

$$q_j \to Q_j = q_j, \quad p_j \to P_j = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, 3) \tag{30.6}$$

и на енергията E оператора

$$E \to ih\frac{\partial}{\partial t}. \tag{30.7}$$

Операторите на умножение и на диференциране действуват по формулите

$$Q_j f = q_j f(q_1, q_2, q_3), \quad P_j f = \frac{h}{i}\frac{\partial f(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, 3), \tag{30.8}$$

а оператора на енергията по формулата

$$Ef = ih\frac{\partial f(q_1, q_2, q_3)}{\partial t}. \tag{30.9}$$

В основата на нашите по–нататъшни построения е уравнението на Шрьодингер

$$ih\frac{\partial \Psi(q_1, q_2, , q_3, t)}{\partial t} = H\Psi(q_1, q_2, q_3, t), \tag{30.10}$$

където самоспрегнатия оператор

$$H = H\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_3}, q_1, q_2, q_3, t\right). \tag{30.11}$$

Полагаме

$$\Psi(q_1, \dots, q_k, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(q_1, \dots, q_k), \tag{30.12}$$

получаваме стационарното уравнение на Шрьодингер:

$$H\psi = E\psi. \tag{30.13}$$

Нека ψ_n, $n = 1, 2 \dots$ е пълна ортонормирана система от собствени функции, съответстващи на собствените числа λ_n, $n = 1, 2, \dots,$ $H\psi_n = \lambda_n\psi_n$. Имаме разлагането

$$\Psi(q_1, q_2, q_3) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(q_1, q_2, q_3). \tag{30.14}$$

Нека Ψ зависи от времето t, тогава $a_n = a_n(t)$,

$$\Psi(q_1, \dots, q_k, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\psi_n(q_1, q_2, q_3), \tag{30.15}$$

$$H\Psi(q_1, \dots, q_k, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)H\psi_n(q_1, q_2, q_3) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\lambda_n\psi_n(q_1, q_2, q_3). \tag{30.16}$$

От друга страна от (30.10) имаме

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n(t)\lambda_n\psi_n(q_1, q_2, q_3). \tag{30.17}$$

Сравнявайки (30.16) с (30.17) получаваме

$$i\hbar\dot{a}_n(t) = \lambda_n a_n(t) \Rightarrow a_n(t) = a_n(t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_n(t-t_0)}, \tag{30.18}$$

следователно имаме за еволюцията по t

$$\Psi(q_1, q_2, q_3, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t_0)e^{-\frac{i}{\hbar}\lambda_n(t-t_0)}\psi_n(q_1, q_2, q_3). \tag{30.19}$$

Тъй като от (30.6) имаме

$$P_j^2 = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial q_j} = -h^2\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}, \tag{30.20}$$

то квантувайки класическия хамилтониан (30.1) получаваме следния оператор на Шрьодингер

$$H = -\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x,y,z), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{30.21}$$

където с Δ означаваме, както обикновено, оператора на Лаплас. В разглеждания случай нестационарното уравнение (30.10) дава

$$ih\frac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial t} = \left(-\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x,y,z)\right)\Psi(x,y,z,t), \tag{30.22}$$

от където следва стационарното уравнение на Шрьодингер

$$\left(-\frac{h^2}{2m}\Delta + V(x,y,z)\right)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z). \tag{30.23}$$

В едномерния случай получаваме уравнението

$$-\frac{h^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{30.24}$$

Указаната процедура на квантуване можем да обобщим и за по–сложни системи. Като пример ще приведем оператора на Шрьодингер за атом, състоящ се от ядро със заряд Ze и маса M и Z електрона с заряди $-e$ и маси m, взаимодействуващи си по закона на Кулон. Съответният класически хамилтониан се дава с формулата

$$\frac{P^2}{2M} + \sum_{i=1}^{Z}\frac{p_i^2}{2m} - \sum_{i=1}^{Z}\frac{Ze^2}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}. \tag{30.25}$$

От тук получаваме уравнението на Шрьодингер

$$ih\frac{\partial\Psi(\mathbf{R},\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_Z;t)}{\partial t} = \left[-h^2\left(\frac{\Delta_{\mathbf{R}}}{2M} + \sum_{i=1}^{Z}\frac{\Delta_i}{2m}\right) - \sum_{i=1}^{Z}\frac{Ze^2}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|} + \sum_{i<j}\frac{e^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\right]\Psi. \tag{30.26}$$

В частност, за атома на водорода ($Z = 1$) последното уравнение се записва във вида

$$ih\frac{\partial\Psi(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_e;t)}{\partial t} = \left(-\frac{h^2}{2M}\Delta_p - \frac{h^2}{2m}\Delta_e - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_p-\mathbf{r}_e|}\right)\Psi(\mathbf{r}_p,\mathbf{r}_e;t). \tag{30.27}$$

Тук M е масата на протона, $\mathbf{r}_p$ –неговият радиус–вектор, а $\mathbf{r}_e$ – радиус–вектора на електрона.

31. Състояние на квантово- механична система. Еволюция по t на състоянието на квантово- механичната система. Статистическа интерпретация на твърденията в квантовата механика. Основен постулат за комутиращи оператори.

Нека напомним, че ако имаме случайната величина $\mathbf{x}$, която приема значенията

$$x_1,\, x_2,\, \ldots, x_k, \tag{31.1}$$

със съответните вероятности:

$$p_1,\, p_2, \ldots\, p_k, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = 1, \tag{31.2}$$

то средно значение на $\mathbf{x}$ се определя по формулата

$$\bar{\mathbf{x}} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_k p_k. \tag{31.3}$$

Имаме следното

Твърдение. Средното значение на квадрата на случайна величина $\overline{\mathbf{x^2}}$ е по–голямо от квадрата на средното значение $(\bar{\mathbf{x}})^2$. По–точно

$$\overline{\mathbf{x^2}} - (\bar{\mathbf{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{\mathbf{x}})^2 p_i \geq 0. \tag{31.4}$$

Изразът

$$\Delta\mathbf{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{\mathbf{x}})^2 p_i} \tag{31.5}$$

се нарича дисперсия на случайната величина $\mathbf{x}$.

За да докажем (31.4) отначало ще отбележим, че имаме

$$\overline{\mathbf{x^2}} - (\bar{\mathbf{x}})^2 = \overline{\mathbf{x^2}} - 2(\bar{\mathbf{x}})^2 + (\bar{\mathbf{x}})^2, \tag{31.6}$$

където

$$\overline{\mathbf{x^2}} = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_k^2 p_k. \tag{31.7}$$

По–нататък, отчитайки (31.2), получаваме

$$2(\bar{\mathbf{x}})^2 = 2(\bar{\mathbf{x}})(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{k} 2\bar{\mathbf{x}} x_i p_i, \tag{31.8}$$

$$(\bar{\mathbf{x}})^2 = (\bar{\mathbf{x}})^2 \sum_{i=1}^{k} p_i = \sum_{i=1}^{k} (\bar{\mathbf{x}})^2 p_i. \tag{31.9}$$

Следователно

$$\overline{\mathbf{x^2}} - (\bar{\mathbf{x}})^2 = \sum_{i=1}^{k} \{x_i^2 - 2\bar{\mathbf{x}}x_i + (\bar{\mathbf{x}})^2\} p_i = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{\mathbf{x}})^2 p_i \geq 0.\square$$

Нека сега се върнем към нашата основна задача за статистическото описание на процесите в квантовата механика. Нека имаме произволно състояние на системата (30.10):

$$ih\frac{\partial \Psi(q_1, \ldots, q_k, t)}{\partial t} = H\Psi(q_1, \ldots, q_k, t), \quad \Psi(t_0) = \Psi_0(q_1, \ldots, q_k), \tag{31.10}$$

където

$$\int_{-\infty_{\mathbb{R}^k}}^{\infty} |\Psi(q_1, \ldots, q_k)|^2 \, dq_1 \ldots dq_k = 1, \quad (\Psi(q_1, \ldots, q_k) = \Psi(q_1, \ldots, q_k, t)). \tag{31.11}$$

Основното твърдение в квантовата механика е, че вълновата функция $\Psi(q_1, \ldots, q_k)$ описва динамичното състояние на системата. Преди да формулираме общия отговор на въпроса: как? ще приведем два характерни примера.

Твърдение 1. Нека системата се намира в състоянието Ψ, тогава вероятността системата да бъде в обема V се дава с израза

$$\int_V |\Psi(q_1, \ldots, q_k)|^2 \, dq_1 \ldots dq_k. \tag{31.12}$$

Твърдение 2. Нека оператора H има чисто дискретен спектър, състоящ се от собствените числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ със съответни собствени функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Тогава вероятността в състоянието Ψ значението на енергията да бъде λ_n е

$$\int_{-\infty_{\mathbb{R}^k}}^{\infty} |\Psi(q_1, \ldots, q_k)\overline{\varphi_n(q_1, \ldots, q_k)}|^2 \, dq_1 \ldots dq_k. \tag{31.13}$$

32. Квантово-механична скобка на Поасон. Основни комутационни съотношения.

Квантово-механичната скобка на Поасон ще въведем по формулата

$$\{A,B\}_h = \frac{i}{h}[A,B], \tag{32.1}$$

където A и B са самоспрегнати оператори в съответното хилбертово пространство, комутаторът

$$[A,B] = AB - BA. \tag{32.2}$$

Както вече отбелязахме в представянето на Шрьодингер, което се нарича още координатно представяне, на класическите координати q_j и проекциите на импулса p_j съпоставяме съответно операторите на умножение и диференциране

$$q_j \to Q_j = x_j, \quad p_j \to P_j = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (j=1,2,3), \tag{32.3}$$

които в пространството $L^2(\mathbf{R^3})$ (30.5) действуват по формулите

$$Q_j\varphi(\mathbf{x}) = x_j\varphi(\mathbf{x}), \quad P_j\varphi(\mathbf{x}) = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3). \tag{32.4}$$

Лесно се проверява, че така построените оператори са самоспрегнати, т.е. $(Af,g) = (f,Ag)$. Очевидно имаме

$$(Q_j\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_j\varphi(x_1,x_2,x_3)\overline{\psi(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,x_2,x_3)x_j\overline{\psi(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 = (\varphi, Q_j\psi), \quad j=1,2,3. \tag{32.5}$$

По–нататък имаме

$$(P_1\varphi,\psi) = \int_{\mathbf{R^3}} \frac{h}{i}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1}\overline{\psi(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} =$$

$$\frac{h}{i}\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,x_2,x_3)\overline{\psi(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \frac{h}{i}\varphi(\mathbf{x})\overline{\psi(\mathbf{x})}\Big|_{x_1=-\infty}^{x_1=\infty} - \frac{h}{i}\int_{\mathbf{R^3}} \varphi(\mathbf{x})\frac{\partial\overline{\psi(\mathbf{x})}}{\partial x_1}\,d\mathbf{x} =$$

$$\int_{\mathbf{R^3}} \varphi(\mathbf{x})\overline{\frac{h}{i}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial x_1}}\,d\mathbf{x} = (\varphi, P_1\psi). \tag{32.6}$$

Квантовите скобки на Поасон имат следните значения:

$$\{Q_j,Q_k\}_h = 0, \quad \{P_j,P_k\}_h = 0, \quad \{Q_j,P_k\}_h = \delta_{jk}, \quad j,k=1,2,3, \tag{32.7}$$

които във вид на комутатори имат следния вид

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, P_k] = ih\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{32.8}$$

Първите две равенства са очевидни, за третото равенство имаме

$$P_k Q_j \varphi(\mathbf{x}) = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_j \varphi(\mathbf{x})) = \frac{h}{i}\delta_{jk}\varphi(\mathbf{x}) + x_j \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(\mathbf{x}) \tag{32.9}$$

и

$$Q_j P_k \varphi(\mathbf{x}) = x_j \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(\mathbf{x}). \tag{32.10}$$

Сравнявайки последните две равенства получаваме (32.7-8).

Забележка. Ще приведем още един пример за представяне на операторите Q_j и P_j, така нареченото импулсно представяне. В това представяне пространството на състоянията $\mathcal{H}$ е същото пространство $L^2(\mathbf{R^3})$, където за по–голяма яснота елементите му ще означаваме с $\widehat{\varphi}(\mathbf{p})$. Операторите Q_j и $P_j, j = 1, 2, 3$ действуват по следния начин

$$Q_j \widehat{\varphi}(\mathbf{p}) = ih\frac{\partial}{\partial p_j}\widehat{\varphi}(\mathbf{p}), \quad P_j \widehat{\varphi}(\mathbf{p}) = p_j \widehat{\varphi}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3). \tag{32.11}$$

Както ще покажем по–късно координатното и ипулсното представяния са унитарно еквивалентни относно преобразованието на Фурие.

Не е трудно обаче да се покаже, че ограничени оператори, удовлетворяващи каноничните комутационни съотношения не съществуват. Наистина, в сила е следната

Теорема. Нека $\mathcal{A}$ е банахова алгебра с единица, която ще отбелязваме с E и нека $X, Y \in \mathcal{A}$. Тогава $[X, Y] = XY - YX$ не може да е равно на cE, където c е отлична от нула константа.

По дефиниция, едно банахово пространство $\mathcal{A}$ с норма $||\ ||$ се нарича банахова алгебра с единица, ако то е алгебра с единица E, нормата на единицата E е равна на числото 1 и умножението удовлетворява съотношението $||XY|| \leq ||X||.||Y||$ за всеки два елемента $X, Y \in \mathcal{A}$. Очевидно е например, че пространството на ограничените оператори $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ в хилбертово пространство $\mathcal{H}$ е банахова алгебра с единица. Единицата е единичния оператор, а нормата е операторната норма. Поради това от горната теорема наистина следва, че ограничени оператори, удовлетворяващи каноничните комутационни съотношения не съществуват.

Да докажем сега теоремата. Доказателството е извънредно просто и не използува даже пълнотата на $\mathcal{A}$. Да допуснем,че твърдението на теоремата не е вярно. Тогава съществуват два ненулеви елемента X и Y и ненулева константа c, такива, че $XY - YX = cE$. Ще докажем сега по индукция, че тогава

$$X^n Y - Y X^n = cnX^{n-1}, \quad X^n \neq 0,$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

При $n = 1$ твърдението е очевидно. Да допуснем, че то е вярно за n и да се опитаме да го докажем за $n + 1$. С лекота получаваме

$$X^{n+1}Y - YX^{n+1} = X^n(XY - YX) + (X^nY - YX^n)X = c(n+1)X^n.$$

Освен това $X^{n+1} \neq 0$. Ако допуснем, че $X^{n+1} = 0$, ще получим веднага, че $X^n = 0$, в противоречие с индуктивното предположение.

Да разгледаме сега верижката от неравенства:

$$cn||X^{n-1}|| = ||X^nY - YX^n|| \leq 2||X^n|| \, ||Y|| \leq 2||X|| \, ||X^{n-1}|| \, ||Y||.$$

Тъй като $||X^{n-1}|| \neq 0$, можем да съкратим на това число и получаваме, че за всяко естествено число n имаме

$$n \leq \frac{1}{|c|}||X|| \, ||Y||,$$

което е невъзможно.

33. Некомутиращи оператори. Съотношения за неопределеност на Хайзенберг.

Нека самоспрегнатите операторите P, Q удовлетворяват условието

$$PQ - QP = [P, Q] = aI, \quad \mathrm{Re}\, a = 0 \tag{33.1}$$

и нека

$$\rho = (P\varphi, \varphi), \quad \varepsilon^2 = \|P\varphi - \rho\varphi\|^2, \quad \|\varphi\| = 1 \tag{33.2}$$

$$\sigma = (Q\varphi, \varphi), \quad \eta^2 = \|Q\varphi - \sigma\varphi\|^2. \tag{33.3}$$

Тогава

$$\varepsilon\eta \geq |a|/2. \tag{33.4}$$

Доказателство. Имаме

$$(P\varphi, Q\varphi) = \mathrm{Re}\,(P\varphi, Q\varphi) + i\mathrm{Im}\,(P\varphi, Q\varphi)$$

$$(Q\varphi, P\varphi) = \overline{(P\varphi, Q\varphi)} = \mathrm{Re}\,(P\varphi, Q\varphi) - i\mathrm{Im}\,(P\varphi, Q\varphi),$$

т. е.

$$2\mathrm{Im}\,(P\varphi, Q\varphi) = i((PQ - QP)\varphi, \varphi) = ia\|\varphi\|^2. \tag{33.5}$$

Следователно , използвайки неравенството на Шварц $(f, g) \leq \|f\|\|g\|$, получаваме

$$\|\varphi\|^2 = -\frac{2i}{a}\mathrm{Im}\,(P\varphi, Q\varphi) \leq \frac{2}{|a|}|(P\varphi, Q\varphi)| \leq \frac{2}{|a|}\|P\varphi\|\|Q\varphi\|. \tag{33.6}$$

Следователно ако $\|\varphi\| = 1$, то

$$\|P\varphi\|\|Q\varphi\| \geq |a|/2. \tag{33.7}$$

От тук, отчитайки, че при замяната $P \to P - \rho I, Q \to Q - \sigma I$ имаме същото комутационно съотношение (33.1):

$$[P - \rho I, Q - \sigma I] = aI \tag{33.8}$$

получаваме (33.4).

34.**Квантово-механичен осцилатор. Собствени числа и собствени значения.**

а) Класическа механика. Имаме хамилтониана

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2, \tag{34.1}$$

където $\omega > 0$ е параметър, оределящ честотата. Съответните уравнения на Хамилтон са

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q, \tag{34.2}$$

които лесно се решават

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad \to q(t) = A\cos(\omega t + \alpha). \tag{34.3}$$

б) Квантова механика. Сега ще проквантуваме тази система. Нека $\mathcal{H}$ е хилбертово пространство и нека $P = P^*$ и $Q = Q^*$ са самоспрегнати оператори, които удовлетворяват комутационното съотношение

$$[Q, P] = i, \quad [A, B] = AB - BA. \tag{34.4}$$

Сега нека разгледаме оператора на енергията

$$H = \frac{1}{2}P^2 + \frac{\omega^2}{2}Q^2, \tag{34.5}$$

който се получава от (34.1) чрез полагането $p \to P$ и $q \to Q$. Основната задача тук е да изучим задачата за собствени значения

$$H\psi_E = E\psi_E, \tag{34.6}$$

където $\psi_E \in \mathcal{H}$ е собствена функция, съответстваща на собственото число E . За целта ще въведем операторите

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q + iP) \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega Q - iP). \tag{34.7}$$

Лема 1. Имаме представянията

$$H = \omega a a^* - \frac{\omega}{2} \tag{34.8}$$

$$H = \omega a^* a + \frac{\omega}{2} \tag{34.9}$$

Доказателство. От (34.7) имаме

$$\omega a a^* = \frac{1}{2}(\omega Q + iP)(\omega Q - iP) =$$

$$\frac{1}{2}(\omega^2 Q^2 + P^2) + \frac{i\omega}{2}[PQ - QP] = H + \frac{\omega}{2}, \tag{34.10}$$

където в последното равенство използвахме (34.4). □

Изваждайки (34.9) от (34.8) получаваме

Следствие 1. Комутаторът

$$[a, a^*] = 1 \tag{34.11}$$

и по индукция

$$[a, (a^*)^n] = n(a^*)^{n-1}. \tag{34.12}$$

Умножавайки (34.8) отдясно с a, а (34.9) с a^* и изваждайки получаваме

Следствие 2. Комутаторите

$$[H, a] = -\omega a, \tag{34.13}$$

$$[H, a^*] = \omega a^*. \tag{34.14}$$

Сега ще изучим спектърът на задачата (34.6), в предположение, че съществува поне една собствена функция ψ_E.

Лема 2. Спектърът е ограничен отдолу:

$$E \geq \frac{\omega}{2}, \tag{34.15}$$

където равенство има само при

$$a\psi_E = 0. \tag{34.16}$$

Доказателство. Използвайки (34.9) ще запишем (34.6) във вида

$$H\psi_E = (\omega a^* a + \frac{\omega}{2})\psi_E = E\psi_E. \tag{34.17}$$

Умножавайки скаларно на ψ_E получаваме

$$\omega \|a\psi_E\|^2 + \frac{\omega}{2}\|\psi_E\|^2 = E\|\psi_E\|^2, \tag{34.18}$$

откъдето следват (34.15-16). Нека отбележим, че ако е изпълнено условието (34.16), то от (34.17) имаме

$$H\psi_E = \frac{\omega}{2}\psi_E = E\psi_E \Rightarrow E = \frac{\omega}{2}. \tag{34.19}$$

Сега ще покажем как по произволен собствен вектор ψ_E можем да строим нови.

Лема 3. Ако $a\psi_E \neq 0$, то $a\psi_E$ е собствен вектор, отговарящ на $E - \omega$.

Доказателство. Нека е изпълнено (34.6). Тогава от (34.13) имаме

$$Ha\psi_E = aH\psi_E - \omega a\psi_E = (E - \omega)a\psi_E, \tag{34.20}$$

което и трябваше да докажем. Повтаряйки тази процедура получаваме редица от собствени функции ψ_E, $a\psi_E$, $a^2\psi_E, \ldots, a^N\psi_E$, със съответните собствени значения E, $E-\omega$, $E-2\omega, \ldots, E-N\omega$. Тъй като тази редица е намаляваща, а съгласно (34.15) тя е ограничена отдолу, то съществува $N \geq 0$, такова, че

$$a^N\psi_E \neq 0, \quad a^{N+1}\psi_E = 0. \tag{34.21}$$

Полагайки $a^N\psi_E = \psi_0$, получаваме от (34.21)

$$a\psi_0 = 0, \quad H\psi_0 = \frac{\omega}{2}\psi_0, \tag{34.22}$$

където последното равенство следва от (34.16). По този начин показахме, че от предположението за съществуване на поне един собствен вектор следва съществуването на вектор ψ_0, удовлетворяващ (34.22). Този вектор се нарича основно състояние на осцилатора.

Сега ще покажем, че уравнението (34.6) има безброй много собствени функции. По-точно справедлива е следната

Теорема 1. Функциите $\psi_n = (a^*)^n\psi_0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ са собствени функции на уравнението (34.6) , отговарящи на собствените значения $(n+\frac{1}{2})\omega$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. При това $\psi_n \neq 0$.

Доказателство. От (34.14) имаме

$$Ha^*\psi_0 = a^*H\psi_0 + \omega a^*\psi_0 = (\omega + \frac{\omega}{2})a^*\psi_0, \tag{34.23}$$

т.е. ако ψ_0 удовлетворява (34.22), то $a^*\psi_0$ удовлетворява (34.23). Ако допуснем, че $a^*\psi_E = 0$, то от (34.8) получаваме

$$H\psi_E = \omega aa^*\psi_E - \frac{\omega}{2}\psi_E = E\psi_E \Rightarrow E = -\frac{\omega}{2}, \tag{34.24}$$

което противоречи с (34.15).□

Сега ще покажем, че

$$\|\psi_n\|^2 = \|(a^*)^n\psi_0\|^2 = n!\|\psi_0\|^2, \tag{34.25}$$

при това

$$(\psi_n, \psi_k) = 0 \quad n \neq k \tag{34.26}$$

Отчитайки, че от (34.12) имаме

$$a(a^*)^n = (a^*)^n a + n(a^*)^{n-1}, \tag{34.27}$$

получаваме

$$\begin{aligned}\|\psi_n\|^2 = ((a^*)^n\psi_0, (a^*)^n\psi_0) = (\psi_0, a^n(a^*)^n\psi_0) = \\ (\psi_0, a^{n-1}(a^*)^n a\psi_0) + n(\psi_0, a^{n-1}(a^*)^{n-1}\psi_0) = \\ n((a^*)^{n-1}\psi_0, (a^*)^{n-1}\psi_0) = n\|(a^*)^{n-1}\psi_0\|^2,\end{aligned} \tag{34.28}$$

където в предпоследното равенство използвахме $a\psi_0 = 0$. Равенствата (34.26) се получават като следствие на известния факт, че собствените функции, отговарящи на различни собствени числа са ортогонални. Това може да бъде проверено и непосредствено, използвайки равенството

$$(\psi_k, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{n!k!}}(\psi_0, a^k(a^*)^n\psi_0) = 0, \quad k \neq n. \tag{34.29}$$

За да докажем, в частност, съществуването на решение на уравнението (34.22), т.е. $a\psi_0 = 0$, ще преминем към координатното представяне на операторите P и Q. Получаваме

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega x + \frac{d}{dx}\right), \tag{34.30}$$

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega x - \frac{d}{dx}\right). \tag{34.31}$$

От тук за уравнението (34.22) получаваме

$$a\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega x\psi_0(x) + \psi_0'(x) = 0. \tag{34.32}$$

Решението но последното уравнение е

$$\psi_0(x) = Ce^{-\frac{\omega x^2}{2}}, \tag{34.33}$$

където константата C определяме от условието за нормировка $\|\psi_0\| = 1$. За ψ_n имаме

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{(2\omega)^{-n/2}}{\sqrt{n!}} \left(\omega x + \frac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{\omega x^2}{2}}. \tag{34.34}$$

Нека отбележим, че

$$\psi_n(x) = P_n(x)e^{-\frac{\omega x^2}{2}}, \tag{34.35}$$

където $P_n(x) = H_n(\sqrt{\omega}x)$ са полиномите на Ермит. Имаме (вж., например, Ц Преобразование на Фурие

$$\varphi_(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = H_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{34.36}$$

35. Момент на импулса.

Нека напомним, че в класическата механика момента на импулса

$$\mathbf{l} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{35.1}$$

е вектор с координати

$$l_1 = q_2 p_3 - q_3 p_2, \quad l_2 = q_3 p_1 - q_1 p_3, \quad l_3 = q_1 p_2 - q_2 p_1. \tag{35.2}$$

От тук за съответните оператори на момента в квантовата механика получаваме

$$\begin{aligned} L_1 &= Q_2 P_3 - Q_3 P_2, \\ L_2 &= Q_3 P_1 - Q_1 P_3, \\ L_3 &= Q_1 P_2 - Q_2 P_1, \end{aligned} \tag{35.3}$$

където за операторите P_j и Q_k са в сила комутационните съотношения на Хайзенберг (32.8):

$$[Q_j, Q_k] = 0, \quad [P_j, P_k] = 0, \quad [Q_j, P_k] = i\delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (h = 1) \tag{35.4}$$

Нека въведем още и оператора на квадрата на импулса

$$L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2. \tag{35.5}$$

Основна тук е следната

Теорема 35.1. Имаме следните комутационни съотношения

$$\begin{aligned} [L_1, L_2] &= iL_3, \\ [L_2, L_3] &= iL_1, \\ [L_3, L_1] &= iL_2, \end{aligned} \tag{35.6}$$

при това

$$[L_j, L^2] = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{35.7}$$

Доказателство. Отчитайки (35.4), получаваме

$$[L_1, L_2] = [Q_2 P_3 - Q_3 P_2, Q_3 P_1 - Q_1 P_3] =$$

$$[Q_2 P_3, Q_3 P_1] - [Q_3 P_2, Q_3 P_1] - [Q_2 P_3, Q_1 P_3] + [Q_3 P_2, Q_1 P_3] =$$

$$Q_2 P_3 Q_3 P_1 - Q_3 P_1 Q_2 P_3 - Q_3 P_2 Q_3 P_1 + Q_3 P_1 Q_3 P_2 -$$

$$Q_2 P_3 Q_1 P_3 + Q_1 P_3 Q_2 P_3 + Q_3 P_2 Q_1 P_3 - Q_1 P_3 Q_3 P_2 =$$

$$Q_2 P_1 [P_3, Q_3] + Q_1 P_2 [Q_3, P_3] = i(Q_1 P_2 - Q_2 P_1) = iL_3,$$

където отчетохме, че

$$Q_2 P_3 Q_3 P_1 = Q_2 P_3 P_1 Q_3 = Q_2 P_1 P_3 Q_3.$$

Аналогично се проверяват съотношенията (35.7).□

Забележка 1. Нека въведем операторите

$$L_+ = L_1 + iL_2, \quad L_- = L_1 - iL_2. \tag{35.8}$$

Лесно се проверяват следните комутационни съотношения

$$\begin{aligned} [L_3, L_+] &= L_+, \\ [L_3, L_-] &= -L_-, \\ [L_+, L_-] &= 2L_3. \end{aligned} \tag{35.9}$$

В координатното представяне (34.4) с $h = 1$ имаме

$$\begin{aligned} L_1 &= i(x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}), \\ L_2 &= i(x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1}), \\ L_3 &= i(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}). \end{aligned} \tag{35.10}$$

Нека във функцията $\psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ положим

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{35.11}$$

Операторите L_1, L_2, L_3 действуват само на ъгловите променливи в (35.11). Действително, ако функцията ψ зависи само от r, то

$$\begin{gathered} L_3\psi(r) = i(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3})\psi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \\ i\psi(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2 2x_1 - x_1 2x_2) = 0. \end{gathered} \tag{35.12}$$

Теорема 35.2. За оператора на Лаплас е справедливо представянето

$$\begin{gathered} \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}L^2. \end{gathered} \tag{35.13}$$

Доказателство. От (35.11) имаме

$$r\frac{\partial}{\partial r} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} \tag{35.14}$$

и следователно

$$\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} +$$

$$2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} + 2zx\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}. \tag{35.15}$$

Директно от (35.10) имаме

$$-L^2 = \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 =$$

$$(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - z^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} -$$

$$2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - 2yz\frac{\partial^2}{\partial y\partial z} - 2zx\frac{\partial^2}{\partial z\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y} - 2z\frac{\partial}{\partial z}. \tag{35.16}$$

Следователно

$$-L^2 = r^2\Delta - \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - r\frac{\partial}{\partial r} = r^2\Delta - \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{35.17}$$

което и трябваше да докажем.

36. Тримерно уравнение на Шрьодингер. Лапласиан в сферични координати.

1. Най напред ще разгледаме задачата за смяна на променливите в лапласиана

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{36.1}$$

от декартови в полярни координати, т.е.

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi. \tag{36.2}$$

По–точно ще покажем, че ако

$$\tilde{u}(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \tag{36.3}$$

то

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}. \tag{36.4}$$

Ще напомним, че последното равенство обикновено се записва във вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{36.5}$$

Доказателство на равенството (36.4) (Приведеният по-долу извод на (36.4) е добре известен факт, който може да се намери във учебниците по Матем. анализ и тук е приведен само за пълнота на изложението.) Диференцирайки (36.3) по r и φ получаваме:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \tag{36.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi. \tag{36.7}$$

Тук използвахме, че от (36.2), очевидно, имаме

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi. \tag{36.8}$$

Решавайки системата (36.7) относно $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{r}, \tag{36.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{36.10}$$

Нека сега отбележим, че диференцирайки (36.2) по x и y имаме

$$1 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial x} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y} - r\sin\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$0 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial x} + r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad 1 = \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y} + r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Следователно

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}. \tag{36.11}$$

От тук, диференцирайки (36.9) и (36.10) по x и y съответно, получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\cos\varphi - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$

$$\cos^2\varphi\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}, \tag{36.12}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\sin\varphi + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} =$$

$$\sin^2\varphi\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} - \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}. \tag{36.13}$$

Събирайки последните две равенства получаваме исканата формула (36.4).

2. Сега ще разгледаме общия случай на сферични координати

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta. \tag{36.14}$$

Тук аналог на (36.4) е равенството

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$$

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right), \tag{36.15}$$

където $\tilde{u}(r,\theta,\varphi) = u(\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

Доказателството ще извършим използвайки последователно два пъти трансформацията (36.14). Нека запишем (36.14) във вида

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta \quad z = \rho\cos\varphi. \tag{36.16}$$

Отначало в лапласиана Δ полагаме

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z \quad (x,y,z) \to (r,\theta,z). \tag{36.17}$$

От (36.4) получаваме $(\varphi \to \theta)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} \quad \tilde{u}(r,\theta,z) = u(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \tag{36.18}$$

и, следователно, лапласиана можем да запишем във вида

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}. \tag{36.19}$$

В последния израз правим смяната

$$r = \rho \sin\varphi, \quad z = \rho\cos\varphi, \quad \theta = \theta, \quad (r,\theta,z) \to (\rho,\theta,\varphi). \tag{36.20}$$

От (36.18) за израза в скобките в (36.19) получаваме

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} \quad \hat{u}(\rho,\theta,\varphi) = \tilde{u}(\rho\sin\varphi,\theta,\rho\cos\varphi). \tag{36.21}$$

Отбелязвайки още, че

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} + \frac{\mathrm{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi}, \tag{36.22}$$

получаваме израза

$$\Delta u = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \theta^2} + \frac{\mathrm{ctg}\varphi}{\rho^2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \varphi}, \tag{36.23}$$

т.е. (36.15) ($\rho \to r$, $\varphi \to \theta$, $\theta \to \varphi$.)

37. Разделяне на променливите при сферични симетричен потенциал.

Да разгледаме уравнението на Шрьодингер със сферичен симетричен потенциал $V = V(r)$:

$$-\Delta\Phi + V(r)\Phi = k^2\Phi. \tag{37.1}$$

Полагаме

$$\Phi = S(r)Y(\varphi,\theta). \tag{37.2}$$

Отчитайки (36.15), получаваме

$$-\left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right]Y - \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right]S + V(r)SY = k^2 SY. \tag{37.3}$$

Сега разделяме на SY и умножаваме по r^2. Получаваме

$$-\frac{r^2}{S}\left[\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right] + r^2 V(r) - k^2 r^2 =$$

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{37.4}$$

Тъй като лявата част на горното уравнение не зависи от θ, φ, а дясната - от r, то равенството е възможно само когато и двете страни са равни на константа, която ще означим $-\lambda$. По този начин уравнението (37.4) се разделя на радиално уравнение

$$\frac{d^2 S}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dS}{dr} + \{k^2 - V(r) - \frac{\lambda}{r^2}\}S = 0 \tag{37.5}$$

и ъглово уравнение (за променливите θ, φ)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0. \tag{37.6}$$

Забележка. Лесно се проверява, че ако положим в (37.5)

$$S = r^{-\frac{1}{2}}R(r), \tag{37.7}$$

получаваме уравнението

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - V(r) - \frac{\lambda - 1/4}{r^2}\right)R = 0. \tag{37.8}$$

Ще отбележим още, че ако в последното уравнение направим смяната

$$R(r) = \chi(r)/r, \tag{37.9}$$

то радиалното уравнение се записва в следния вид:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \left(k^2 - V(r) - \frac{\lambda - 1/4}{r^2}\right)\chi = 0. \tag{37.10}$$

Сега нека в уравнението (37.6) положим

$$Y = \Theta(\theta)\Phi(\varphi). \tag{37.11}$$

Получаваме

$$\frac{1}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \lambda = 0, \tag{37.12}$$

т.е.

$$-\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = \frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right] + \lambda\sin^2\theta = \nu. \tag{37.13}$$

Следователно имаме уравненията

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \nu\Phi = 0, \tag{37.14}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0. \tag{37.15}$$

Общото решение на уравнението (37.14) може да бъде записано във вида

$$\Phi(\varphi) = Ae^{i\sqrt{\nu}\varphi} + Be^{-i\sqrt{\nu}\varphi}, \quad \nu \neq 0, \tag{37.16}$$

$$\Phi(\varphi) = A + B\varphi, \quad \nu = 0. \tag{37.17}$$

Условията за непрекъснатост на решенията на уравнението (37.1) заедно с първите им производни водят за $\Phi(\varphi)$ до следните гранични условия

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi), \tag{37.18}$$

откъдето следва, че допустимите стойности на

$$\nu = m^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{37.19}$$

Действително, полагайки (37.16) в (37.18) получаваме системата

$$A + B = Ae^{i\sqrt{\nu}2\pi} + Be^{-i\sqrt{\nu}2\pi} \tag{37.20}$$

$$i\sqrt{\nu}A - i\sqrt{\nu}B = i\sqrt{\nu}Ae^{i\sqrt{\nu}2\pi} - i\sqrt{\nu}Be^{-i\sqrt{\nu}2\pi}, \tag{37.21}$$

т.е.

$$A(1 - e^{i\sqrt{\nu}2\pi}) + B(1 - e^{-i\sqrt{\nu}2\pi}) = 0 \tag{37.22}$$

$$A(1 - e^{i\sqrt{\nu}2\pi}) - B(1 - e^{-i\sqrt{\nu}2\pi}) = 0. \tag{37.23}$$

За да има ненулево решение $A^2 + B^2 \neq 0$ детерминантата трябва да бъде равна на нула, т.е.

$$(1 - e^{i\sqrt{\nu}2\pi})(1 - e^{-i\sqrt{\nu}2\pi}) = 0 \Rightarrow \nu = m^2,\, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{37.24}$$

Така получихме, че собствените функции на граничната задача (37.14), (37.18) са

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{37.25}$$

където е изпълнено условието за нормировка

$$\left(\int_0^{\pi} |\Phi_m(\varphi)|^2 \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{37.26}$$

Сега да разгледаме уравнението (37.15) с $\nu = m^2$:

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0. \tag{37.27}$$

Полагайки

$$\Theta(\theta) = P(w) \quad w = \cos\theta \quad 0 < \theta < \pi \Leftrightarrow -1 < w < 1, \tag{37.28}$$

за уравнението (37.27) получаваме

$$\frac{\partial}{\partial w} \left[(1 - w^2) \frac{\partial P}{\partial w} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - w^2} \right) P = 0 \quad -1 < w < 1. \tag{37.29}$$

Известно е, че при $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, \dots$ решение, което е крайно при $w = \pm 1$ се дава с присъединените полиноми на Льожандър

$$P_l^m(w) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{l-m)!}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \frac{1}{2^l l!} (1 - w^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}}{dw^{l-m}} (w-1)^l \quad m = -l, -l+1, \dots, l. \tag{37.30}$$

38. Примери: правоъгълни потенциали.

Нека разгледаме едномерното уравнение на Шрьодингер

$$y'' + (\lambda - V(x))y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{38.1}$$

където потенциалът $V(x)$ е стъпаловидна функция от вида

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x > 0 \\ V_2, & x < 0, \end{cases} \quad V_2 > V_1. \tag{38.2}$$

Собствена функция, най–общо казано, ще наричаме решение на уравнението (38.1), което е ограничено на цялата ос $-\infty < x < \infty$. Съответното значение на λ ще наричаме собствено значение, или по–общо точка от спектъра на уравнението на Шрьодингер (38.1). За да определим спектъра на уравнението (21.2) ще разгледаме отделно случаите **а.** $V_1 < \lambda < V_2$, **б.** $\lambda > V_2$ и **в.** $\lambda < V_1$.

а. $V_1 < \lambda < V_2$**.** Полагаме

$$k_1 = \sqrt{\lambda - V_1}, \quad \tau_2 = \sqrt{V_2 - \lambda}. \tag{38.3}$$

Общото решение при $x > 0$ има следния вид

$$y = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} = A_1 \sin(k_1x + \varphi) \tag{38.4}$$

където A, B респ. A_1, φ са произволни константи. При $x < 0$ общото решение се дава с формулата

$$y = Ae^{\tau_2 x} + Be^{-\tau_2 x}. \tag{38.5}$$

Условието за ограниченост дава $B = 0$ в (38.5), т.е.

$$y = A_2 e^{\tau_2 x}. \tag{38.6}$$

Следователно

$$y(x) = \begin{cases} A_1 \sin(k_1x + \varphi), & x > 0 \\ A_2 e^{\tau_2 x}, & x < 0, \end{cases} \tag{38.7}$$

Имаме условията за непрекъснатост

$$y(+0) = y(-0), \tag{38.8}$$

$$y'(+0) = y'(-0). \tag{38.9}$$

Вместо (38.9) ще използваме условието за непрекъснатост на логаритмичната производна

$$\frac{y'(+0)}{y(+0)} = \frac{y'(-0)}{y(-0)}, \tag{38.10}$$

което се получава разделяйки (38.9) на (38.8). От (38.7) получаваме

$$y(+0) = A_1 \sin\varphi, \quad y'(+0) = k_1 A_1 \cos\varphi. \tag{38.11}$$

Следователно
$$\frac{y'(+0)}{y(+0)} = k_1 \mathrm{ctg}\varphi. \tag{38.12}$$

Аналогично
$$y(-0) = A_2, \quad y'(+0) = A_2\tau_2, \tag{38.13}$$
$$\frac{y'(-0)}{y(-0)} = \tau_2. \tag{38.14}$$

Условието (38.10) дава
$$k_1 \mathrm{ctg}\varphi = \tau_2 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\frac{k_1}{\tau_2}. \tag{38.15}$$

Условието за непрекъснатост (38.8) дава
$$A_1 \sin\varphi = A_2, \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \sin\varphi = \sin(\mathrm{arctg}\frac{k_1}{\tau_2}) = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + \tau_2^2}} = \sqrt{\frac{\lambda - V_1}{V_2 - V_1}}, \tag{38.16}$$

т.е.
$$\frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{\lambda - V_1}{V_2 - V_1}}. \tag{38.17}$$

б. $\lambda > V_2$ При всяко λ имаме осцилиращо решение, което определяме по следния начин
$$\chi(x) = \begin{cases} e^{-ik_1x} + Re^{ik_1x}, & x > 0 \\ Se^{-k_2x}, & x < 0, \end{cases} \tag{38.18}$$

където R и S определяме от условията (38.9) и (38.10). От тук имаме
$$\chi'(x) = \begin{cases} -ik_1e^{-ik_1x} + ik_1Re^{ik_1x}, & x > 0 \\ -ik_2Se^{-\tau_2x}, & x < 0. \end{cases} \tag{38.19}$$

Следователно
$$\chi(0) = \begin{cases} 1 + R, & (+0) \\ S, & (-0), \end{cases} \tag{38.20}$$
$$\chi'(0) = \begin{cases} -ik_1 + ik_1R, & (+0) \\ -ik_2S, & (-0). \end{cases} \tag{38.21}$$

Така получаваме
$$R = \frac{k_1 - k_2}{k_2 + k_1}, \quad S = \frac{2k_1}{k_2 + k_1}. \tag{38.22}$$

Наред с решението $\chi(x,k)$ имаме и решението $\bar{\chi}(x,k)$, което е линейно независимо с $\chi(x,k)$, тъй като Вронскиана
$$W(\chi(x,k), \bar{\chi}(x,k)) = \chi\bar{\chi}' - \chi'\bar{\chi} = \frac{2ik_1^2k_2^2}{(k_1+k_2)^2} \neq 0. \tag{38.23}$$

Следователно при всяко $\lambda > V_2$ имаме две ограничени линейно-независими решения, т.е. спектърът е двукратно непрекъснат. Нека отбележим, че

$$|R|^2 + \frac{k_1}{k_2}|S|^2 = 1. \tag{38.24}$$

Накрая в случая

в. $\lambda < V_1$ ще покажем, че няма ограничено решение на уравнението (38.1). Полагаме

$$\tau_1 = \sqrt{\lambda - V_1}, \quad \tau_2 = \sqrt{\lambda - V_2}.$$

При $x > 0$ общото решение на уравнението (38.1) се дава с формулата

$$y = Ae^{\tau_1 x} + Be^{-\tau_1 x}, \quad x > 0,$$

а при $x < 0$ – с формулата

$$y = Ce^{\tau_2 x} + De^{-\tau_2 x}, \quad x < 0,$$

където A, B, C, D са произволни константи. Условията за ограниченост на $y(x)$ при $x > 0$, $x < 0$ дават $A = 0, D = 0$, т.е.

$$y = Be^{-\tau_1 x}, \quad x > 0,$$

$$y = Ce^{\tau_2 x}, \quad x < 0.$$

От условието за непрекъснатост (38.8) следва, че $C = B$. От тук условието (38.9) дава

$$\tau_2 C = -\tau_1 C,$$

т.е. $C = 0$, което и трябваше да покажем.

39. Водороден атом. Изследване на отрицателния спектър.

Атомът на водорода представлява свързано състояние, състоящо се от положително заредено ядро със заряд e и електрон с заряд $-e$. Следователно потенциалът

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}. \tag{39.1}$$

Ще разглеждаме малко по- общия потенциал

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}. \tag{39.2}$$

Тук, както знаем, оператора на Шрьодингер има следния вид

$$H = -\frac{1}{2\mu}\Delta - \frac{Ze^2}{r}, \tag{39.3}$$

където $\mu = mM/(m+M)$ е приведената маса, m и M са съответно масите на електрона и ядрото. Съответната спектрална задача ще решаваме в така наречената атомна система, където $h = 1$, $\mu = 1, e^2 = 1$. Тогава за радиалното уравнение на Шрьодингер имаме

$$-\frac{1}{2}f_l''(r) + \frac{l(l+1)}{2r^2}f_l(r) - \frac{Z}{r}f_l = Ef_l(r), \quad 0 < r < \infty. \tag{39.4}$$

Тъй като тук ще изследваме дискретния спектър $E < 0$, удобно е да положим $-2E = \tau^2$. Имаме

$$f_l'' + \frac{2Z}{r}f_l - \frac{l(l+1)}{r^2}f_l - \tau^2 f_l = 0, \quad 0 < r < \infty. \tag{39.5}$$

Решението ще търсим във вида

$$f_l(r) = r^{l+1}e^{-\tau r}\Lambda_l(r), \quad l = 0, 1, \ldots, \tag{39.6}$$

където

$$\Lambda_l(r) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i, \quad a_0 \neq 0. \tag{39.7}$$

Тук подлежат на определяне коефициентите a_i, така че редът да бъде сходящ. Субституцията (39.6) прилагаме в два етапа. Въвеждайки функцията g:

$$f = e^{-\tau r}g, \tag{39.8}$$

$$f'' = e^{-\tau r}(\tau^2 g - 2\tau g' + g'') \tag{39.9}$$

получаваме уравнението

$$g'' - 2\tau g' + \frac{2Z}{r}g - \frac{l(l+1)}{r^2}g = 0. \tag{39.10}$$

Сега, полагайки

$$g = r^{l+1}\Lambda, \tag{39.11}$$

$$g' = r^{l+1}\left(\frac{\Lambda(l+1)}{r} + \Lambda'\right), \tag{39.12}$$

$$g'' = r^{l+1}\left(\frac{l(l+1)\Lambda}{r^2} + \frac{2(l+1)\Lambda'}{r} + \Lambda''\right), \tag{39.13}$$

получаваме

$$\Lambda_1'' + \left(\frac{2(l+1)}{r} - 2\tau\right)\Lambda_l' + \left(\frac{2Z}{r} - \frac{2\tau(l+1)}{r}\right)\Lambda_l = 0. \tag{39.14}$$

Полагайки в последното уравнение реда (39.7), получаваме

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i[i(i-1)r^{i-2} + 2(l+1)ir^{i-2} - 2i\tau r^{i-1} + (2Z - 2\tau l - 2\tau)r^{i-1}] = 0. \tag{39.15}$$

Заменяйки в първите две събираеми $i \to i+1$, имаме

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^{i-1}\{a_{i+1}[(i+1)i + 2(i+1)(l+1)] - a_i[2\tau(i+l+1) - 2Z]\} = 0, \tag{39.16}$$

откъдето за коефициентите a_i имаме рекурентната формула

$$a_{i+1} = 2\frac{\tau(i+l+1) - Z}{(i+1)(i+2l+2)}a_i, \quad a_0 \neq 0. \tag{39.17}$$

По критерия на Даламбер получаваме, че така полученият ред е сходящ при всяко r. Нека отбележим, че асимптотиката на реда (39.7) при $r \to \infty$ се определя от поведението коефициентите a_i при $i \to \infty$. Но тогава от (39.17) имаме

$$a_{i+1} \cong \frac{2\tau}{i+1}a_i, \tag{39.18}$$

т.е.

$$a_i \cong C\frac{(2\tau)^i}{i!} \tag{39.19}$$

и

$$\Lambda_l \cong Ce^{2\tau r}. \tag{39.20}$$

Следователно

$$f_l \sim Cr^{l+1}e^{\tau r}, \quad r \to \infty. \tag{39.21}$$

От тук се вижда, че в общия случай решението $f_l(r)$, което няма особеност в нулата, расте при $r \to \infty$. Нека сега отбележим,че от формулата (39.17) следва, че съществуват стойности на τ, за които от известно място нататък всички събираеми $a_i = 0$ и редът (39.7), т. е. Λ_l е полином. За тези значения на τ съответното решение $f_l(r)$ е квадратично интегрируемо. Нека k е най–големия индекс, за който

$$a_k \neq 0, \quad a_{k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \dots \tag{39.22}$$

От (39.17) следва, че това е възможно за тези τ, за които

$$\tau_n = \tau_{kl} = \frac{Z}{k+l+1}, \quad k = 0, 1, \dots \quad n = k + l + 1. \tag{39.23}$$

От формулата $-2E = \tau^2$ получаваме

$$E_{kl} = -\frac{Z^2}{2(k+l+1)^2}. \tag{39.24}$$

От горните формули се вижда, че собствените числа E_{kl} зависят от $n = k+l+1$. Това число се нарича главно квантово число. Известно е, че $k = 0, 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots,$, така, че възможните значения за n са $n = 1, 2, \dots$. Нека отбележим, че при зададено n квантовото число l може да приема значенията $0, 1, 2, \dots, n-1$.

40. Радиално уравнение на Шрьодингер. Задача за разсейване.

Тук ще разгледаме уравнението

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0, \quad y(0) = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{40.1}$$

където потенциалът $v(x)$ е реална функция, удовлетворяваща условието

$$\int_0^\infty (1+x)|v(x)|\,dx < \infty. \tag{40.2}$$

Нека означим с $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ решенията на уравнението (40.1), удовлетворяващи условията

$$\varphi(x,k) : \varphi(0,k) = 0,\ \varphi'(0,k) = 1, \tag{40.3}$$

$$f(x,k) : \lim_{x\to\infty} f(x,k)\exp(-ikx) = 1,\ (\mathrm{Im}k \geq 0). \tag{40.4}$$

Непосредствено се проверява, че $\varphi(x,k)$ и $f(x,k)$ удовлетворяват интегралните уравнения:

$$\varphi(x,k) = \frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} v(t)\varphi(t,k)\,dt \tag{40.5}$$

и

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{\sin k(t-x)}{k} v(t) f(t,k)\,dt, \tag{40.6}$$

съответно. От тук не е трудно да се изведат основните аналитични и асимптотични свойства. Справедлива е следната

Теорема 1. а. Решението $\varphi(x,k)$ при всяко $x \geq 0$ е цяла функция от k, за което са справедливи оценките:

$$|\varphi(x,k)| \leq Cxe^{|\tau|x}, \quad k = \sigma + i\tau, \tag{40.7}$$

$$\varphi(x,k) = \frac{\sin kx}{k} + O\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|k|^2}\right), \quad k \to \infty. \tag{40.8}$$

При реални k решението $\varphi(x,k)$ е четна функция на $k : \varphi(x,-k) = \varphi(x,k)$.

б. Решението $f(x,k)$ е аналитична по k при $\mathrm{Im} > 0$, непрекъсната до реалната ос. Справедлива е оценката

$$|f(x,k)| \leq e^{-\tau x}\exp\left(\int_x^\infty t|v(t)|\,dt\right), \quad \tau \geq 0, \tag{40.9}$$

при това равномерно по $0 \leq x < \infty$

$$f(x,k) = e^{ikx} + O\left(\frac{e^{-\tau x}}{k}\right), \quad \tau = \mathrm{Im}k \geq 0. \tag{40.10}$$

Доказателство.а. Съществуването на решението $\varphi(x,k)$ ще докажем с метода на последователните приближения. Полагаме в (40.5)

$$\varphi(x,k) = xe^{-ikx}z(x,k). \tag{40.11}$$

Получаваме

$$z(x,k) = \frac{\sin kx}{kx}e^{ikx} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{kx}e^{-ik(x-t)}tv(t)z(t,k)\,dt \tag{40.12}$$

Уравнението (40.12) решаваме с метода на последователните приближения. Полагаме

$$z_0(x,k) = \frac{\sin kx}{kx}e^{ikx},$$

$$z_{n+1}(x,k) = \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{kx}e^{ik(x-t)}tv(t)z_n(t,k)\,dt, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{40.13}$$

Ще покажем, че решението $z(x,k)$ се получава във вид на ред

$$z(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(x,k), \tag{40.14}$$

който е абсолютно и равномерно сходящ при $0 \le x < \infty$, $\mathrm{Im}k \ge 0$. Отчитайки равенството

$$\frac{\sin kx}{kx}e^{ikx} = \frac{1}{x}\int_0^x e^{2ikt}\,dt,$$

получаваме оценките

$$|\frac{\sin kx}{kx}e^{ikx}| \le |\frac{1}{x}\int_0^x e^{2ikt}\,dt| \le 1, \tag{40.14'}$$

$$|\frac{\sin k(x-t)}{kx}e^{ik(x-t)}| = |\frac{\sin k(x-t)}{k(x-t)}e^{ik(x-t)}\left(\frac{x-t}{x}\right)| \le 1 - \frac{t}{x} \le 1, \quad 0 \le t \le x < \infty.$$

Следователно

$$|z_0(x,k)| \le 1, \quad |z_{n+1}(x,k)| \le \int_0^x t|v(t)||z_n(t,k)|\,dt, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{40.15}$$

По индукция ще покажем, че

$$|z_n(x)| \le \frac{j^n(x)}{n!}, \quad j(x) = \int_0^x t|v(t)|\,dt. \tag{40.16}$$

За $n = 0$ имаме първата оценка в (40.15). Допускайки, че за някое n е изпълнена оценката (40.16),получаваме от (40.15)

$$|z_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n!}\int_0^x t|v(t)|j^n(t)\,dt = \frac{1}{n!}\int_0^x j^n(t)\,dj(t) = \frac{j^{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Следователно равномерно по $0 \le x < \infty, \mathrm{Im}k \ge 0$ имаме

$$|z(x,k)| \le \exp(\int_0^x t|v(t)|\,dt). \tag{40.17}$$

Остава да покажем, че така получения ред (40.14) е решение на уравнението (40.12). Сумираме равенствата (40.13) от $n=0$ до $n=N$, получаваме

$$\sum_{n=0}^{N+1} z_n(x,k) = z_0(x,k) + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{kx} e^{ik(x-t)} t v(t) (\sum_{n=0}^{N} z_n(t,k))\,dt.$$

При $N \to \infty$ получаваме, че $z(x,k)$ е решение на уравнението (40.12), с което доказахме съществуването на решение $\varphi(x,k)$, за което е изпълнена оценката (40.7). Единствеността следва от общата теорема за съществуване и единственост на решението на уравнението (40.1), удовлетворяващо началните условия (40.3). При $\mathrm{Im}k \le 0$ полагаме $\varphi(x,k) = xe^{-ikx}z(x,k)$.

За да получим асимптотиката (40.8),отначало ще докажем, че за решението $\varphi(x,k)$ имаме оценките

$$|ke^{ikx}\varphi(x,k)| \le \exp(\frac{1}{|k|}\int_0^x |v(t)|\,dt) \quad \mathrm{Im}k \ge 0, k \ne 0, \tag{40.18}$$

$$|ke^{-ikx}\varphi(x,k)| \le \exp(\frac{1}{|k|}\int_0^x |v(t)|\,dt) \quad \mathrm{Im}k \le 0, k \ne 0. \tag{40.18$'$}$$

От уравнението (40.5) имаме

$$ke^{ikx}\varphi(x,k) = \sin kx e^{ikx} + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t) e^{ik(x-t)} v(t) k e^{ikt}\varphi(t,k)\,dt. \tag{40.19}$$

От тук, отчитайки неравенството

$$|\sin kx e^{ikx}| \le 1, \quad \mathrm{Im}k \ge 0, \tag{40.19$'$}$$

получаваме

$$|ke^{ikx}\varphi(x,k)| \le 1 + \frac{1}{|k|}\int_0^x |v(t)||ke^{ikt}\varphi(t,k)|\,dt. \tag{40.20}$$

Тъй като сме доказали вече съществуването на решението $\varphi(x,k)$, то към последното неравенство можем да приложим неравенството на Белман–Гронуел, което дава оценката (40.18), аналогично получаваме (40.18’). От тук, вследствие на уравнението (40.19), получаваме

$$|ke^{ikx}\varphi(x,k) - \sin kx e^{ikx}| \le \frac{1}{|k|}\int_0^x |v(t)| \exp(\frac{1}{|k|}\int_0^t |v(s)|\,ds)\,dt. \quad \mathrm{Im}k \ge 0, k \ne 0,$$

което дава асимптотиката (40.8).

b. По аналогична схема получаваме оценката (40.9) и (следващата от нея) асимптотиката (40.10). Полагаме в уравнението (40.6)

$$h(x,k) = f(x,k)e^{ikx},$$

получаваме

$$h(x,k) = 1 + \int_x^\infty \frac{\sin k(t-x)}{k(t-x)} e^{ik(t-x)}(t-x)v(t)h(t,k)\,dt, \quad \mathrm{Im}k \geq 0. \tag{40.21}$$

Отчитайки неравенствата (40.14') и $0 \leq t - x \leq t$ получаваме, че последното уравнение можем да решим с изложения по–горе метод на последователните приближения, при това

$$|h(x,k)| \leq 1 + \int_x^\infty t|v(t)||h(t,k)|\,dt, \quad \mathrm{Im}k \geq 0. \tag{40.21}$$

От тук използвайки следното обобщение на неравенството на Белман–Гронуел: ако $\int_0^\infty |g(t)| < \infty$ и

$$h(x) \leq C + \int_x^\infty |g(t)|h(t)\,dt \to h(x) \leq C\exp(\int_x^\infty |g(t)|\,dt), \tag{40.22}$$

получаваме оценката

$$|h(x,k)| \leq \exp(\int_x^\infty t|v(t)|\,dt), \quad \mathrm{Im}k = \tau \geq 0, \tag{40.23}$$

която е еквивалентна на (40.9). Сега, отчитайки неравенството (40.19'), получаваме че от (40.6), т.е. от уравнението

$$h(x,k) = 1 + \int_x^\infty \frac{\sin k(t-x)}{k} e^{ik(t-x)}v(t)h(t,k)\,dt, \tag{40.24}$$

следва неравенството

$$|h(x,k) - 1| \leq \frac{1}{|k|}\int_x^\infty |v(t)||h(t,k)|\,dt, \tag{40.25}$$

От тук използвайки оценката (40.9), имаме

$$|h(x,k) - 1| \leq \frac{1}{|k|}\int_x^\infty |v(t)|\exp(\int_t^\infty t|v(s)|\,ds)\,dt, \tag{40.26}$$

с което асимптотиката (40.19) е доказана.

Нека означим с

$$f(k) = f(0,k) = W(f(x,k),\varphi(x,k)) \quad (W(f,g) = fg' - f'g) \tag{40.27}$$

функцията на Йост за оператора (40.1), (40.2).

При реални $k \neq 0$ функциите $f(x,k)$ и $f(x,-k) = \overline{f(x,k)}$ образуват фундаментална система от решения за уравнението (40.1). Вронскианът им

$$W(f(x,k), f(x,-k)) = \lim_{x\to\infty} W(f(x,k), f(x,-k)) = 2ik. \tag{40.28}$$

От тук получаваме, че при реални k имаме представянето

$$\varphi(x,k) = \frac{1}{2ik}\left\{f(x,k)f(-k) - f(x,-k)f(k)\right\}. \tag{40.29}$$

Полагаме

$$f(k) = A(k)e^{i\eta(k)}, \quad A(k) = |f(k)|. \tag{40.30}$$

Функцията $A(k)$ се нарича амплитуда на разсейване, а $\eta(k)$-фаза на разсейване.

От $f(x,-k) = \overline{f(x,k)}$ следва, че

$$A(-k) = A(k), \quad \eta(k) = -\eta(-k). \tag{40.31}$$

От представянето (40.29) имаме, че при $x \to \infty$

$$\varphi(x,k) = \frac{A(k)}{k}\sin(kx - \eta(k)) + o(1). \tag{40.32}$$

Функцията на разсейване се определя по формулата

$$S(k) = e^{-2i\eta(k)} = \frac{f(-k)}{f(k)}. \tag{40.33}$$

Нека $\tau > 0$. От уравнението (40.1) за $f(x,k)$ и следващото от него уравнение

$$-\dot{f}''(x,k) + v(x)\dot{f}(x,k) = 2kf(x,k) + k^2\dot{f}(x,k), \quad \dot{} = \frac{\partial}{\partial k}, \tag{40.34}$$

лесно се получават тъждествата

$$f'(0,k)\overline{f(0,k))} - f(0,k)\overline{f'(0,k))} = 4i\sigma\tau\int_0^\infty |f(t,k)|^2\,dt, \tag{40.35}$$

$$\dot{f}'(0,k)f(0,k)) - \dot{f}(0,k)f'(0,k)) = 2k\int_0^\infty f^2(t,k)\,dt. \tag{40.36}$$

От (40.35) следва, че функцията $f(k)$ може да се анулира само при $\sigma = 0$ или $\tau = 0$. Случаят $\tau = 0$ се изключва, защото ако $f(k) = 0$ при реални $k \neq 0$ ($f(-k) = \overline{f(k)} = 0$) то от (40.29) получаваме, че $\varphi(x,k) \equiv 0$, което противоречи на началните условия (40.3). При $k = 0$ е възможно да имаме $f(0) = 0$. Ние ще предполагаме, че

$$f(0) \neq 0. \tag{40.37}$$

От тук, отчитайки асимптотиката (40.10), получаваме, че $f(k)$ може да има краен брой прости нули, които са разположени на имагинерната полуос:

$$k_j = i\tau_j,\ j = 1,\ldots,N,\ \dot{f}(k_j) \neq 0. \tag{40.38}$$

Доказателството на формулата

$$C_j^{-1} = \|\varphi(\,.\,,k_j)\|^2_{L^2(0,\infty)} = -\frac{\dot{f}(k_j)}{2k_jf'(0,k_j)} \tag{40.39}$$

тук няма да привеждаме.

41. Функция на Гриин за оператора на Шрьодингер:

$$G(x,t,k) = \frac{1}{f(k)} \begin{cases} \varphi(x,k) f(t,k), & x \le t \le \infty, \\ f(x,k)\varphi(t,k), & 0 \le t \le x \end{cases} \tag{41.1}$$

Формула за разлагане:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varphi(x,k)(f,\varphi(k)) \frac{k^2\, dk}{|f(k)|^2} + \Sigma_{j=1}^N M_j \varphi(x,k_j)(f,\varphi(k_j)) \quad f \in L^2(0,\infty). \tag{41.2}$$

Доказателство чрез метода на контурното интегриране.

43. Задача за разсейването за уравнението на Шрьодингер на цялата ос

В този параграф ще изложим накратко основните резултати свързани с правата задача за разсейване за уравнението на Шрьодингер

$$l(v)y \equiv -y'' + v(x)y = k^2 y, \quad -\infty < x < \infty, \tag{43.1}$$

в което реално-значният потенциал $v(x)$ е функция от L_2^1,

$$L_2^1 = \{v(x) : \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|^2)|v(x)|dx < \infty\}. \tag{43.2}$$

Да означим с $f^+(x,k)$ и $f^-(x,k)$ решенията на Йост за уравнението (43.1), които са дефинирани за реално k чрез своите асимптотики

$$\lim_{x\to\infty} f^+(x,k)e^{-ikx} = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} f^-(x,k)e^{ikx} = 1. \tag{43.3}$$

Тези условия определят еднозначно функциите $f^\pm(x,k)$ като аналитични в горната полуравнина $\operatorname{Im} k > 0$ и непрекъснати в $\operatorname{Im} k \geq 0$. В сила са следните оценки :

$$\left|f^\pm(x,k) - e^{\pm ikx}\right| \leq K \frac{e^{\mp \operatorname{Im} kx}}{1+|k|} (1 + \max(\mp x, 0)) \int_x^{\pm\infty} (1 + |t|)|v(t)|dt, \tag{43.4}$$

$$\left|f^{\pm'}(x,k) \mp ike^{\pm ikx}\right| \leq K_1 e^{\mp \operatorname{Im} kx} (1 + \max(\mp x, 0)) \int_x^{\pm\infty} (1 + |t|)|v(t)|dt, \tag{43.5}$$

където K, K_1 са константи, зависещи от интегралите $\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^j |v(x)|dx$, $j = 0, 1, 2$. За реални $k \neq 0$ двойките функции $f^+(x,k)$, $f^+(x,-k)$ и $f^-(x,k)$, $f^-(x,-k)$ са фундаментални системи от решения на (43.1) с Вронскиани

$$W(f^+(x,-k), f^+(x,k)) = W(f^-(x,k), f^-(x,-k)) = 2ik. \tag{43.5'}$$

Оттук получаваме следните представяния:

$$f^+(x,k) = b(k)f^-(x,k) + a(k)f^-(x,-k), \tag{43.6}$$

$$f^-(x,k) = -b(-k)f^+(x,k) + a(k)f^+(x,-k). \tag{43.7}$$

Функциите $a(k)$ и $b(k)$ са дефинирани чрез формулите:

$$a(k) = (2ik)^{-1} W(f^-(x,k), f^+(x,k)), \quad \operatorname{Im} k \geq 0, \tag{43.8}$$

$$b(k) = (2ik)^{-1} W(f^+(x,k), f^-(x,-k)), \quad \operatorname{Im} k = 0 \tag{43.9}$$

и удовлетворяват равенствата:

$$a(-k) = \overline{a(k)}, \quad b(-k) = \overline{b(k)}, \quad |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1. \tag{43.10}$$

Функцията $ka(k)$ е аналитична в $\operatorname{Im} k > 0$ и непрекъсната при $\operatorname{Im} k \geq 0$. За $|k| \to \infty$ е в сила асимптотиката

$$a(k) = 1 + O\left(|k|^{-1}\right), \quad |k| \to \infty. \tag{43.10$'$}$$

При $\operatorname{Im} k > 0$ $a(k)$ има краен брой прости нули, които лежат върху имагинерната k-ос. Ще означим със $\sigma(v)$ съответното множество от нули:

$$\sigma(v) = \{k_j :\ k_j = i\tau_j,\ \tau_j > 0,\ a(k_j) = 0,\ j = 1, \ldots, N\}. \tag{43.10$''$}$$

Операторът на Шрьодингер $l(v)$ (43.1), разглеждан като оператор в Хилбертовото пространство $L^2 = L^2(\mathbb{R})$ със скаларно произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}, \tag{43.11}$$

е самоспрегнат оператор. Той има двоен и абсолютно непрекъснат спектър при $k^2 > 0$ и краен брой собствени стойности $\lambda_j = -\tau_j^2$, $j = 1, \ldots, N$. Зависимостта (43.8) води до равенствата:

$$f^+(x, k_j) = b_j f^-(x, k_j), \tag{43.12}$$

които определят собствените функции $f^\pm(x, k_j) \in L^2$. Да означим с $C_j^\pm$ нормировъчните константи

$$C_j^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \|f^\pm(x, k_j)\|^{-2} = -ib_j^{\mp 1}\dot{a}^{-1}(k_j), \tag{43.13}$$

където точката означава диференциране по k. Последното уравнение в (43.13) може да се получи от тъждеството

$$\frac{d}{dx}W(\dot{y}(x, k), z(x, k)) = 2ky(x, k)z(x, k) \tag{43.13$'$}$$

посредством (43.12) и оценките

$$\dot{f}^+(x, k_j) \sim xe^{ik_jx},\ \ x \to \infty,\ \ \dot{f}^+(x, k_j) \sim \dot{a}(k_j)e^{ik_jx},\ \ x \to -\infty. \tag{43.14}$$

Да отбележим по-специално, че в общия случай $a(k)$ и $b(k)$ имат сингулярност от вида k^{-1} в началото. Това е следствие от факта, че при $k = 0$ решението $f^-(x, 0)$ на (43.1), което е ограничено при $x \to -\infty$: $f^-(x, 0) = 1 + o(1)$, е линейна комбинация на ограничено и линейно нарастващо решение при $x \to \infty$: $f^-(x, 0) \sim \operatorname{ctg}(\alpha/2) + \beta x$, $|\alpha| \leq \pi$. В общия случай $\beta \neq 0$ имаме

$$a(k) = \frac{ic}{k} + O(1), \quad b(k) = -\frac{ic}{k} + O(1), \quad k \to 0, \tag{43.15}$$

където c е реална константа. При наличието на виртуално ниво $\beta = 0$ е в сила

$$a(k) = \frac{1}{\sin\alpha} + o(1), \quad b(k) = -\operatorname{ctg}\alpha + o(1), \quad k \to 0. \tag{43.16}$$

Ще отбележим, че (43.16) е изключителен, но достатъчно важен случай тъй като всички многосолитонни потенциали попадат в този клас потенциали.

44. Формули за разлагане. Равенство на Парсевал.

Ще отбележим, че за всяка функция $h \in L^2(-\infty, \infty)$ имаме следните формули за разлагане

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,k) F(h;-k)\, dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,k) F(h;k) \frac{b(-k)}{a(k)}\, dk$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x, i\tau_j) F(h; i\tau_j), \quad F(h;k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(y,k)\, dy, \tag{44.1}$$

и

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,k) G(h;-k)\, dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,k) G(h;k) \frac{b(k)}{a(k)}\, dk$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} C_j^- g(x, i\tau_j) G(h; i\tau_j), \quad G(h;k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) g(y,k)\, dy. \tag{44.2}$$

45. Обратна задача за разсейването на цялата ос.

Да въведем сега двете множества от функции и числа

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{s}^+(v) = \{r^+(k) = \frac{b(-k)}{a(k)},\ k \in \mathbb{R},\ k_j,\ C_j^+ = -\frac{i}{b_j \dot{a}_j},\ j = 1, \ldots, N\} \qquad (45.-3)$$

$$\mathbf{s}^- = \mathbf{s}^-(v) = \{r^-(k) = \frac{b(k)}{a(k)},\ k \in \mathbb{R},\ k_j,\ C_j^- = -\frac{ib_j}{\dot{a}_j},\ j = 1, \ldots, N\}, \qquad (45.-2)$$

които се наричат съответно *десни и леви данни на разсейване*. Функциите $r^{\pm}(k)$ са известни като *коефициенти на отражение*, а функцията $t(k) = 1/a(k)$ се нарича *коефициент на пропускане*. Дисперсионното съотношение

$$a(k) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1 - |r^{\pm}(l)|)}{l - k} dl\right\} \prod_{j=1}^{N} \frac{k - i\tau_j}{k + i\tau_j} \qquad (45.-1)$$

позволява определянето на $\mathbf{s}^+$ чрез $\mathbf{s}^-$ и обратно.

Не е трудно да се покаже, че всяко от множествата $\mathbf{s}^{\pm}$ определя еднозначно потенциала $v(x)$ в уравнението (43.1).

Обратната задача за разсейване (ОЗР) се състои в намиране на алгоритъм за построяване на $v(x)$ при известни $\mathbf{s}^+$ или $\mathbf{s}^-$, а също така в намиране на необходимо и достатъчно условие за множеството $\{r(k), i\tau_j, C_j\}$, при което то да представлява леви (или десни) данни на разсейване за даден реално-значен потенциал $v(x)$ принадлежащ на подходящо функционално пространство (например, v удовлетворява условието (43.2) или $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$).

Тук ще приведем кратък извод на класическото уравнение на Гелфанд-Левитан-Марченко (Г Л М) в обратната задача за разсейването за уравнението (43.1).

То се базира на следните представяния за решенията на Йост (43.3):

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} A^+(x,t) e^{ikt}\, dt, \qquad (45.1)$$

$$g(x,k) = e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} A^-(x,t) e^{-ikt}\, dt, \qquad (45.2)$$

където

$$v(x) = -2\frac{d}{dx} A^+(x,x) = 2\frac{d}{dx} A^-(x,x). \qquad (45.3)$$

Доказателството на тези представяния ще приведем в края на този параграф. Нека запишем равенството на Парсевал за уравнението (43.1) в следния символичен вид:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\overline{f(y,k)}\, dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k) f(y,k) \frac{b(-k)}{a(k)}\, dk$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} C_j^+ f(x, i\tau_j) f(y, i\tau_j) = \delta(x - y). \qquad (45.4)$$

Имаме още и класическата формула за интеграл на Фурие:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\,dk = \delta(x-y). \tag{45.5}$$

Заместваме в (45.4) $f(y,k)$ с представянето (45.1). При $x<y$ получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{y}^{\infty} A^{+}(y,t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk\right\}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{y}^{\infty} A^{+}(y,t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk\right\}dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{C_j^{+}f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y} + \int_{y}^{\infty} A^{+}(y,t)C_j^{+}f(x,k)e^{-\tau_j t}dt\right\} = 0. \tag{45.6}$$

Нека означим

$$h_x(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^{+}f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y}. \tag{45.7}$$

Тогава (45.6) дава

$$h_x(y) + \int_{y}^{\infty} A^{+}(y,t)h_x(t)\,dt = 0, \quad x<y. \tag{45.8}$$

Като уравнение на Волтера от втори род има единствено решение $h_x(y)=0$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)e^{-iky}\,dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,k)\frac{b(-k)}{a(k)}e^{iky}\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^{+}f(x,i\tau_j)e^{-\tau_j y} = 0, \quad x<y. \tag{45.9}$$

Заместваме тук $f(x,k)$ с представянето (45.1). Получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\,dk + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(t-y)}\,dk\right\}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+y)}\frac{b(-k)}{a(k)}\,dk - \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)}e^{ik(t+y)}\,dk\right\}dt$$

$$+\sum_{j=1}^{n} C_j^{+}e^{-\tau_j(x+y)} + \int_{x}^{\infty} A^{+}(x,t)\left\{\sum_{j=1}^{n} C_j^{+}e^{-\tau_j(t+y)}\right\}dt = 0, \quad x<y. \tag{45.10}$$

От формулата (45.5) получаваме за (45.10) уравнението на Г Л М :

$$A^+(x,y) + F^+(x+y) + \int_x^\infty A^+(x,t)F^+(t+y)\,dt = 0, \quad x < y, \tag{45.11}$$

където

$$F^+(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)} e^{ikx}\,dk + \sum_{j=1}^n C_j^+ e^{-\tau_j x}. \tag{45.12}$$

Аналогично, изхождайки от формулата за разлагане (43.18) и представянето (45.2) получаваме уравнението

$$A^-(x,y) + F^-(x+y) + \int_{-\infty}^x A^-(x,t)F^-(t+y)\,dt = 0, \quad y < x, \tag{45.13}$$

където

$$F^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(k)}{a(k)} e^{-ikx}\,dk + \sum_{j=1}^n C_j^- e^{\tau_j x}. \tag{45.14}$$

Нека отбележим, че уравненията (45.11) и (45.13) са уравнения на Фредхолм от втори род относно функциите $A^+(x,y)$, $A^-(x,y)$ съответно. Ще докажем, че така построените уравнения имат единствено решение. По-точно имаме следната

Теорема за единственост. Ако $|\frac{b(k)}{a(k)}| < 1$, то уравнението (45.11) при всяко фиксирано x има единствено решение, т.е. уравнението

$$\varphi(y) + \int_x^\infty \varphi(t)F^+(t+y)\,dt = 0, \quad x < y \tag{45.15}$$

няма ненулеви решения в $L^2(x,\infty)$.

Доказателство. Допускаме противното. Умножаваме (45.15) с $\varphi(y)$ и интегрираме по y, от x до ∞. Получаваме

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\,dy + \int_x^\infty \varphi(t)\left(\int_x^\infty \varphi(y)F^+(t+y)\,dy\right)dt = 0, \tag{45.16}$$

където

$$F^+(t+y) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)} e^{ik(t+y)}\,dk + \sum_{j=1}^n C_j^+ e^{-\tau_j(t+y)}. \tag{45.17}$$

Следователно

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\,dy + \sum_{j=1}^n C_j^+ \left(\int_x^\infty \varphi(t)e^{-\tau_j t}\right)^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(-k)}{a(k)}\Phi^{+2}(k)\,dk = 0, \tag{45.18}$$

където $\Phi^+(k) = \int_x^\infty \varphi(t)e^{ikt}\,dt$. Имаме равенството на Парсевал

$$\int_x^\infty \varphi^2(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^+(k)|^2\,dk. \tag{45.19}$$

Полагаме

$$\Phi^+(k) = |\Phi(k)|e^{i\theta(k)}, \quad \frac{b(-k)}{a(k)} = |\frac{b(-k)}{a(k)}|e^{i\eta(k)}. \tag{45.20}$$

От (45.19), (45.20) получаваме за (45.18)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^+(k)|^2 \left\{1 - |\frac{b(-k)}{a(k)}| \exp[i(2\theta(k) + \eta(k))]\right\} dk$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} C_j^+ \left(\int_x^\infty \varphi(t)e^{-\tau_j t)}\right)^2 = 0 \tag{45.21}$$

Следователно реалната част на последното равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi^+(k)|^2 \left\{1 - |\frac{b(-k)}{a(k)}| \cos(2\theta(k) + \eta(k))\right\} dk$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} C_j^+ \left(\int_x^\infty \varphi(t)e^{-\tau_j t)}\right)^2 = 0. \tag{45.22}$$

От условието $|\dfrac{b(k)}{a(k)}| < 1$ имаме, че $|\Phi^+(k)| = 0$, което вследствие на (45.19) дава $\varphi(y) = 0$. $\square$

Ще отбележим също, че трябва да отговорим на естествения въпрос дали данните на разсейване $\mathbf{s}^+$ и $\mathbf{s}^-$, (чрез които са построени уравненията (45.11) и (45.12)) действително водят до един и същ потенциал $v(x)$ в (45.3). Следващите две условия са необходими и достатъчни, така че множествата $\mathbf{s}^+$, $\mathbf{s}^-$ да бъдат съответно леви и десни данни на разсейване за един и същи потенциал.
(i) При реални $k \neq 0$ функциите $r^\pm(k)$ са непрекъснати, $r^\pm(-k) = \overline{r^\pm(k)}$, $|r^\pm(k)| < 1$ и $r^\pm(k) = O(k^{-1})$ когато $k \to \pm\infty$. Преобразуванията на Фурие

$$R^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^+(k)e^{ikx}\, dk, \quad R^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r^-(k)e^{ikx}\, dk.$$

са реални, абсолютно непрекъснати функции в L^2 и за всяко $a > -\infty$ са в сила неравенствата:

$$\int_a^\infty |R^\pm(\pm x)|\, dx < \infty, \quad \int_a^\infty (1 + |x|)|R^{\pm'}(\pm x)|\, dx < \infty.$$

(ii) Коефициентите на отражение $r^+(k)$ и $r^-(k)$ са свързани чрез равенството $r^-(k) = r^+(-k)a(-k)/a(k)$, а нормировъчните константи $C_j^\pm$ — чрез (43.13), т.е. $C_j^+C_j^- = \dot{a}^{-2}(k_j)$, където $a(k)$ се определя от (45.-3). Освен това функцията $ka(k)$ е непрекъсната в горната полуравнина $\operatorname{Im} k \geq 0$ и $\lim_{k\to 0} ka(k)[r^\pm(k) + 1] = 0$.

Ще отбележим, че тези условия дават точна характеризация, ако потенциалът v удовлетворява $\int_{\mathbb{R}}(1 + |x|)|v(x)|dx < \infty$, докато $R^\pm(k)$ е от класа на Шварц $\mathcal{S}$ при условие, че v е от същия клас.

46. Оператори на преобразуване.

Тук накратко ще изложим идеята на получаване на представяния от вида (45.1), (45.2). Нека напомним, че за решението на Йост $f(x,k)$ имаме оценката

$$f(x,k) = e^{ikx} + O\left(\frac{e^{-\tau x}}{|k|}\right), \quad |k| \to \infty, \quad \mathrm{Im}k = \tau \geq 0. \tag{46.1}$$

Да разгледаме контурния интеграл

$$J_R(x,y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{(-R,R)\bigcup \gamma_R} (f(x,k) - e^{ikx})e^{-iky}\, dk, \quad y < x, \tag{46.2}$$

където $\gamma_R = R \exp i\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. От (46.1), означавайки с $F(x,y,k)$ подинтегралната функция в (46.2), получаваме, че при $\mathrm{Im}k \geq 0$ и фиксирани $x, y, y < x$ имаме

$$|F(x,y,k)| \leq \frac{C}{|k|} e^{-\tau(x-y)}, \quad (C = Const).$$

По лемата на Жордан

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} F(x,y,k)\, dk = 0, \quad y < x.$$

Следователно

$$A^+(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x,k) - e^{ikx})e^{-iky}\, dk = 0, \quad y < x.$$

Отчитайки, че от (46.1) следва, че за всяко x, $f(x,k) - e^{ikx} \in L^2(-\infty,\infty)$. Прилагайки формулата за обръщане на интеграла на Фурие, получаваме исканото представяне (45.1):

$$f(x,k) - e^{ikx} = \int_x^{\infty} A^+(x,t)e^{ikt}\, dt, \quad A^+(x,y) \in L^2(x,\infty). \tag{46.3}$$

Нека отбележим, че ако заместим представянето (45.1) в уравнението на Шрьодингер (43.1) получаваме за $A^+(x,y)$ уравнението

$$A^+_{xx}(x,y) - v(x)A^+(x,y) = A^+_{yy}(x,y), \quad A^+(x,y) \to 0,\, x,y \to \infty, \tag{46.4}$$

където

$$A^+(x,x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} v(y)\, dy. \tag{46.5}$$

47. Безотражателни потенциали.

Тук ще приведем класическия метод за построявяне на явни формули за потенциалите, съответстващи на случая, когато в данните на разсейване **s**+ функцията $r^{\pm}(k) \equiv 0$, базиращ се на уравнението на ГЛМ:

$$F(x+y) + A(x,y) + \int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt = 0, \quad x \le y < \infty, \tag{47.1}$$

където потенциала $v(x)$ се дава с формулата

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} v(t)\,dt. \tag{47.2}$$

В частния случай на безотражателен потенциал $b(k) = 0$ имаме:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} C_n^{+} e^{-\tau_n x}, \tag{47.3}$$

$$C_n^{+} = \frac{b_n}{i\dot{a}(i\tau_n)}. \tag{47.4}$$

В случая на уравнението на КдФ

$$\tau_n(t) = \tau_n(0), \quad b_n(t) = b_n(0)e^{8\tau_n^3 t}. \tag{47.5}$$

За да решим уравнението (47.1) отначало полагаме

$$A(x,y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-\tau_n y}. \tag{47.6}$$

Имаме:

$$\begin{gathered}\int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt = \sum_{n,m=1}^{N} K_m(x)\int_x^{\infty} e^{-\tau_m t}C_n^{+}e^{-\tau_n(t+y)}\,dt = \\ \sum_{n=1}^{N} C_n^{+}\left(\sum_{m=1}^{N} K_m(x)\int_x^{\infty} e^{-(\tau_n+\tau_m)t}\,dt\right)e^{-\tau_n y} = \\ \sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y}\sum_{m=1}^{N}\frac{C_n^{+}K_m(x)e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m}.\end{gathered} \tag{47.7}$$

Замествайки (47.3), (47.6) и (47.7) в (47.1) получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} C_n^{+}e^{-\tau_n x}e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} K_n(x)e^{-\tau_n y} + \sum_{n=1}^{N} e^{-\tau_n y}\sum_{m=1}^{N}\frac{C_n^{+}K_m(x)e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n+\tau_m} = 0. \tag{47.8}$$

Тъй като функциите $e^{-\tau_n y}$ са линейно независими, то коефициентите им са нули, т.е.

$$K_n(x) + C_n^+ e^{-\tau_n x} + \sum_{m=1}^{N} \frac{C_n^+ K_m(x) e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m} = 0. \tag{47.9}$$

Така получаваме системата уравнения

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^{N} t_{nm} K_m(x) = -C_n^+ e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{47.10}$$

където

$$t_{nm} = \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m}, \quad n, m = 1, \ldots, N. \tag{47.11}$$

Да означим

$$A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N}, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m}, \tag{47.12}$$

т.е. имаме линейната система

$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm} K_m = B_n, \quad B_n = -C_n^+ e^{-\tau_n x}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{47.13}$$

Решението на тази система се дава с известната формула

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{47.14}$$

където матрицата $A^{(n)}(x)$ се получава заменяйки в $A(x)$ n–ия стълб с елементите на стълба $B = (B_1, \ldots, B_N)^T$, т.е. $A^{(n)}_{mn} = -C_m^+ e^{-\tau_m x}$, $m = 1, 2, \ldots, N$. От (47.6) получаваме

$$A(x, x) = (\det A(x))^{-1} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x}. \tag{47.15}$$

Но от (47.12) имаме

$$A'_{nm}(x) = -C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x} \tag{47.16}$$

и, следователно, използвайки правилото за диференциране на детерминанта, получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\tau_n x} = \frac{d}{dx} \det A(x), \tag{47.17}$$

т.е. имаме формулата

$$A(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x), \tag{47.18}$$

която заедно с (47.2) и (47.12) дава

$$v(x) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x), \quad A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N} = \left(\delta_{nm} + \frac{C_n^+ e^{-(\tau_n+\tau_m)x}}{\tau_n + \tau_m}\right)_{n,m=1}^{N}. \tag{47.19}$$

За да получим оттук N–солитонното решение

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\triangle(x,t) \tag{47.20}$$

$$\triangle(x,t) = Det\left(\delta_{nm} + C_n^+\frac{e^{-(\tau_n+\tau_m)x+8\tau_m^3 t}}{\tau_n+\tau_m}\right)_{n,m=1}^{N}, \tag{47.21}$$

остава да заместим в (47.19) $C_n^+(t)$ съгласно (47.5). При $N=1$ получаваме солитонното решение :

$$v(x,t) = \frac{-2\tau^2}{\cosh^2\tau(x-4\tau^2 t-\varphi)}, \quad \varphi = \frac{1}{2\tau}\ln\frac{\beta}{2\tau}. \tag{47.22}$$

3. НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

51.Метод на характеристиките за уравнението $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$.

Разглеждаме задачата на Коши за ураненнието

$$\rho_t(x,t) + c(\rho(x,t))\rho_x(x,t) = 0, \quad \rho(x,0) = f(x), \, -\infty < x < \infty, \tag{51.1}$$

където $c(\rho)$ е зададена функция.

Нека разгледаме семейството прави

$$\rho = f(\xi) \quad c = F(\xi) = c(f(\xi)) \tag{51.2a}$$

$$x = \xi + F(\xi)t. \tag{51.2b}$$

Нека определим от последното уравнение $\xi = \xi(x,t)$.

Теорема. Функцията

$$\rho(x,t) = f(\xi(x,t)) \tag{51.3}$$

е решение на уравнението (51.1).

Доказателството ще извършим с непосредствена проверка. Диференцирайки (51.3) по t и x получаваме

$$\rho_t = f'(\xi)\xi_t \quad \rho_x = f'(\xi)\xi_x. \tag{51.4}$$

Диференцираме по t и x (51.2b), като $\xi = \xi(x,t)$:

$$1 = \xi_x + F'(\xi)t\xi_x, \quad 0 = \xi_t + F(\xi) + F'\xi)t\xi_t, \tag{51.5}$$

т.е.

$$\xi_t = \frac{-F(\xi)}{1 + F'(\xi)t} \quad \xi_x = \frac{1}{1 + F'(\xi)t}. \tag{51.6}$$

Използвайки (51.4) от тук намираме

$$\rho_t = \frac{-f'(\xi)F(\xi)}{1 + F'(\xi)t} \quad \rho_x = \frac{f'(\xi)}{1 + F'(\xi)t}. \tag{51.7}$$

Умножавайки последното равенство с $F(\xi) = c(\rho)$ и събирайки го с първото получаваме уравнението (51.1). За да получим началното условие в (51.1) остава да отбележим, че при $t = 0$ от (51.2b) имаме $\xi = x$, $\rho(x,0) = f(x)$. Теоремата е доказана.

52. Уравнение на Бюргерс. Смяна на Коул - Хопф. (Граничен преход. Метод на Лаплас.)

Нека разгледаме задачата на Коши за уравнението

$$c_t(t,x) + c(t,x)c_x(t,x) = \nu c_{xx}(t,x), \quad c(0,x) = F(x),\ -\infty < x < \infty,\ t \geq 0, \quad (52.1)$$

където ν е параметър. Това уравнение се нарича уравнение на Бюргерс. Основният резултат тук е доказателството на следната

Теорема на Хоул- Копф Решението на (52.1) се дава с формулата

$$c(t,x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{G/2\nu}\, d\nu}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{G/2\nu}\, d\nu}, \tag{52.2}$$

където

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta')\, d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}. \tag{52.3}$$

Доказателство ще извършим посредством смяната

$$c = -2\nu\varphi_x/\varphi, \tag{52.4}$$

която е удобно да направим в два етапа. Отначало ще положим в (52.1)

$$c = \psi', \tag{52.5}$$

което води до уравнението

$$\psi_{tx} + \psi_x\psi_{xx} = \nu\psi_{xxx}. \tag{52.6}$$

Интегрирайки по x, получаваме

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \nu\psi_{xx}. \qquad (52.6)$$

Сега полагаме

$$\psi = -2\nu \ln\varphi. \tag{52.7}$$

Получаваме уравнението на топлопроводността

$$\varphi_t(x,t) = \nu\varphi_{xx}(x,t) \quad \varphi(x,0) = \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{52.8}$$

Както е добре известно, решението му се дава с формулата на Поасон:

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4\nu t}\right)\, d\eta. \tag{52.9}$$

От тук, за да получим (52.2) остава да отбележим, че

$$\Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int_0^x F(\xi)\, d\xi\right). \tag{52.10}$$

Теоремата е доказана.

За пълнота на изложението ще приведем извода на (52.9). Имаме ($\nu = 1$)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4t} \right) \right] d\eta. \qquad (52.11)$$

Сега остава да отбележим, че непосредствено се проверява

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-(x-\eta)^2}{4t} \right) = 0, \quad t > 0. \qquad (52.12)$$

За да получим началното условие е удобно да направим в (52.9) смяната

$$\frac{\eta - x}{2\sqrt{t}} = \xi, \qquad (52.13)$$

от където получаваме

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \Phi(x + 2\xi\sqrt{t})\, d\xi = \lim_{t\to 0} \Phi(x). \qquad (52.14)$$

Метод на Лаплас

Нека разгледаме интеграла

$$F(\lambda) = \int_a^b f(x) \exp\{\lambda S(x)\}\, dx, \quad \lambda \to \infty, \qquad (52.15)$$

където $f(x)$ е непрекъсната функция ,а реалната функция $S(x)$ има един максимум в интервала $I = [a, b]$

53. Уравнение на Кортевег- де Фриз. а. Скобка на Поасон- Гарднер. б. Теорема за единственост.

Имаме задачата на Коши за уравнението

$$v_t(x,t) = 6v(x,t)v_x(x,t) - v_{xxx}(x,t), \quad v(x,0) = v_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{53.1}$$

където $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ е пространството на Шварц от безкрайно диференцируеми функции, клонящи към нула заедно с производните си при $|x| \to \infty$.

Ще отбележим две характерни свойства на уравнението на КдФ, доказателството на които ще приведем по-късно.

Твърдение 1 Функцията

$$v(x,t) = \frac{-2\kappa^2}{\cosh^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t + \varphi)}, \quad \kappa > 0,\, \varphi = Const. \tag{53.2}$$

наричана солитон, е решение на КдФ.

Докато горното твърдение може да се провери непосредствено и е било известно още от 19 век, то следващото е едно далеч нетривиално обобщение, което в опеделяща степен оправдава интереса към това уравнение.

Твърдение 2 (N-солитонно решение.) Нека са зададени $2N$ константи m_j, κ_j такива, че $m_j > 0, \kappa_j > 0$, $\kappa_j \neq \kappa_l, j, l = 1, 2 \dots N$. Тогава функцията

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2} \ln \triangle(x,t),$$

$$\triangle(x,t) = Det\left(\delta_{jl} + m_j^2 \frac{e^{-(\kappa_j+\kappa_l)x + 8\kappa_l^3 t}}{\kappa_j + \kappa_l}\right)$$

е решение на уравнението на Кортевег–де Фриз.

53.а. Скобка на Поасон- Гарднер.

Нека $F = F(v)$, $H = H(v)$ са функционали над пространството на Шварц със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\, dx. \tag{53.3}$$

Градиент на функционала F ще определим по формулата

$$G_F = \frac{\partial F}{\partial v} : \frac{d}{d\varepsilon} F(v + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = (G_F(v), h). \tag{53.4}$$

Скобката на Поасон–Гарднер определяме като

$$[F,H] = (G_F, \partial G_H), \quad \partial = \frac{d}{dx}. \tag{53.5}$$

Теорема Уравнението на Кортевег- де Фриз е хамилтонова система:

$$v_t = \partial \frac{\partial H}{\partial v}, \quad H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{v_x^2}{2} + v^3)\, dx. \tag{53.6}$$

Преди да докажем тази теорема ще проверим, че по-горе дефинираната скобка удовлетворява условията (12.8)–(12.10). Първите две условия са очевидни. (Кососиметричността се проверява интегрирайки по части.) Остава да докажем тъждеството на Якоби. Имаме

$$(G_{[F,H]}, h) = \frac{d}{d\varepsilon}[F(v+\varepsilon h), H(v+\varepsilon h)]|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}(G_F(v+\varepsilon h), \partial G_H(v+\varepsilon h))|_{\varepsilon=0}$$

$$= (G'_F(v)h, \partial G_H(v)) + (G_F(v), \partial G'_H(v)h)). \tag{53.7}$$

Ще покажем, че операторите G'_F и G'_H са симетрични, т.е.

$$(G'_F h, f) = (h, G'_F f). \tag{53.8}$$

Отчитайки последното равенство имаме

$$(G_{[F,H]}, h) = (h, G'_F(v)\partial G_H(v)) - (h, G'_H(v)\partial G_F(v))). \tag{53.9}$$

Следователно

$$G_{[F,H]} = G'_F \partial G_H - G'_H \partial G_F. \tag{53.10}$$

Ще докажем (53.8). Производна на Фреше означава, че за всеки две функции v и h съществува производната

$$\frac{d}{d\varepsilon}F(v+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = (G_F(v), h), \tag{53.11}$$

която е линеен функционал относно h при фиксирано v. Нека $G'_F(v)$ е втората производна на F, т.е. оператора определен с равенството

$$\frac{d}{d\eta}G_F(v+\eta w)|_{\eta=0} = G'_F(v)w. \tag{53.12}$$

Да подставим (53.11) в (53.12). Имаме

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(v+\varepsilon h+\eta w)|_{\varepsilon=0,\eta=0} = \frac{\partial}{\partial\eta}(G_F(v+\eta w), h)|_{\eta=0} = (G'_F(v)w, h), \tag{53.13}$$

но

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{53.14}$$

и следователно

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\eta}F(v+\varepsilon h+\eta w)|_{\varepsilon=0,\eta=0} = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}(G_F(v+\varepsilon h), w)|_{\varepsilon=0} = (G'_F(v)h, w). \tag{53.15}$$

Сравнявайки последното равенство с (53.13) получаваме (53.8). Сега, използвайки (53.10), ще получим

$$[[F,H],K] + [[H,K],F] + [[K,F],H] = (G'_F\partial G_H - G'_H\partial G_F, \partial G_K) +$$

$$(G'_H\partial G_K - G'_K\partial G_H, \partial G_F) + (G'_K\partial G_F - G'_F\partial G_K, \partial G_H) = 0, \tag{53.16}$$

където в последното равенство използвахме (53.8). Тъждеството на Якоби е доказано.

Сега за да докажем (53.6) остава да отбележим, че

$$G_H = -v_{xx} + 3v^2. \tag{53.17}$$

53. б. Теорема за единственост.

Нека $u(x,t)$ е друго решение на уравнението (53.1), т.е. имаме

$$u_t(x,t) = 6u(x,t)u_x(x,t) - u_{xxx}(x,t), \quad u(x,0) = v_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{53.18}$$

Означаваме $w = v - u$ и изваждаме (53.18) от (53.1). Получаваме

$$w_t(x,t) = 6w(x,t)v_x(x,t) + 6u(x,t)w_x(x,t) - w_{xxx}(x,t). \tag{53.19}$$

Умножаваме по w и интегрираме по x от $-\infty$ до ∞. Получаваме

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(6w^2v_x + 6uw_xw - w_{xxx}w)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}(6v_x - 3u)w^2\,dx, \tag{53.20}$$

тъй като

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{xxx}w\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} w_{xx}w_x\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}w_x^2\,dx = 0. \tag{53.21}$$

Нека означим

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} w^2\,dx = E(t), \quad m = \max_x|6v_x - 3u|. \tag{53.22}$$

Тогава от (53.20) получаваме

$$\frac{d}{dt}E(t) \le mE(t) \quad \Rightarrow \quad E(t) \le E(0)e^{mt}. \tag{53.23}$$

Следователно, ако $E(0) = 0$ то $E(t) = 0$, $t > 0$, което и трябваше да докажем.

54. Представяне на Лакс за уравнението на Кортевег - де Фриз

Основният резултат тук е доказателството на следната важна

Теорема 1. За уравнението на КдФ $v_t = 6vv_x - v_{xxx}$ е справедливо следното представяне

$$L_t = [A, L], \tag{54.1}$$

където операторите

$$L = -D^2 + v(x,t), \quad A = -4D^3 + 6vD + 3v', \quad D = \frac{d}{dx}. \tag{54.2}$$

1. Унитарна еквивалентност. Имаме семейство самоспрегнати оператори

$$L(t), \quad L(t) = L^*(t) \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{54.3}$$

и нека $U(t)$ е семейство унитарни оператори

$$U^*(t)U(t) = U(t)U^*(t) = I, \quad U(0) = I. \tag{54.4}$$

Ще казваме, че операторите $L(t)$ са унитарно - еквивалентни, ако

$$U^*(t)L(t)U(t) = L(0), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{54.5}$$

Лема 1. Нека $U(t)$ е семейство унитарни оператори, т.е. удовлетворява условията (54.4). Тогава $U(t)$ удовлетворява уравнението

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad \dot{} = d/dt, \tag{54.6}$$

където $A(t)$ е кососиметричен оператор

$$A^*(t) = -A(t). \tag{54.7}$$

Доказателство. Диференцираме по t първото от равенствата в (54.4): $\dot{U}^*(t)U(t) + U^*(t)\dot{U}(t) = 0$ и умножаваме отляво по $U(t)$. Получаваме

$$\dot{U}(t) = A(t)U(t), \quad A(t) = -U(t)\dot{U}^*(t). \tag{54.8}$$

Нека диференцираме второто равенство в (54.4). Получаваме $\dot{U}(t)U^*(t) + U(t)\dot{U}^*(t) = 0$, което заедно с $A^*(t) = -\dot{U}(t)U^*(t)$ дава (54.7).

Теорема 1. Условието

$$\dot{L} = AL - LA = [A, L], \tag{54.9}$$

където оператора $A(t)$ е кососиметричен, т.е.$A^* = -A$ е необходимо и достатъчно за унитарна еквивалентност на семейството оператори $L(t)$.

Доказателство. Диференцирайки (54.5) по t и отчитайки (54.7), (54.8), получаваме

$$\dot{U}^* L U + U^* \dot{L} U + U^* L \dot{U} = -U^* A L U + U^* L A U + U^* \dot{L} U = 0. \tag{54.10}$$

Като умножим отляво с U^* и отдясно с U получаваме (54.9).

Доказателство на теорема 1. Директно от (54.2) получаваме

$$L_t = v_t(x,t), \tag{54.11}$$

$$AL - LA = 2vD^3 + 3v'D^2 + 4D^3v - 6vDv - 6D^2vD + 6vD - 3D^2v'. \tag{54.12}$$

Сега нека отбележим, че

$$4D^3v = 4v''' + 12v''D + 12v'D^2 + 4vD^3,$$

$$-6DvD = -6vv' - 6v^2D,$$
$$-6D^2vD = -6v''D - 12v'D^2 - 6vD^3,$$
$$-3D^2v' = -3v''' - 6v''D - 3v'D^2.$$

Заместивайки тези равенства в дясната страна на (54.12), получаваме

$$AL - LA = -6v(x,t)v_x(x,t) + v_{xxx}(x,t), \tag{54.13}$$

с което теоремата е доказана.

55. Метод на обратната задача -основна идея.

Нека разгледаме уравнението на Шрьодингер

$$y'' + (k^2 - v(x,t))y = 0, \quad -\infty < x < \infty,\, t \geq 0, \tag{55.1}$$

където потенциала $v(x,t)$ удовлетворява уравнението на КдФ (54.1), t разглеждаме като параметър.

Лема 1. Нека $f(x,t,k)$ е решението на Йост на уравнението (55.1), определено от асимптотиката (43.3). Тогава $f(x,t,k)$ удовлетворява уравнението

$$\dot{f} = -Af - 4ik^3 f, \tag{55.2}$$

където оператора A се определя както в (54.2).

Доказателство. Нека диференцираме по t уравнението (55.1), отчитайки, че $dk/dt = 0$:

$$Ly = k^2 y \quad \Rightarrow \dot{L}y + Ly = k^2 \dot{y}. \tag{55.3}$$

Използвайки представянето на Лакс (54.1) получаваме

$$(LA - AL)y + L\dot{y} = k^2\dot{y}, \quad LAy - k^2 Ay + L\dot{y} = k^2\dot{y},$$

т.е.

$$(L - k^2)(Ay + \dot{y}) = 0. \tag{55.4}$$

Следователно функцията

$$\tilde{y} = Ay + \dot{y} \tag{55.5}$$

е решение на уравнението $(L - k^2)\tilde{y} = 0$. Полагаме $y = f(x,t,k)$, с което определяме $\tilde{f}$ еднозначно тъй като $\lim_{x\to\infty} \tilde{f}$ не зависи от t. Следователно при $x \to \infty$ получаваме

$$\tilde{f} \sim -ik^3 e^{ikx} \Rightarrow \tilde{f} = -ik^3 f(x,t,k), \tag{55.6}$$

което доказва (55.2).

Теорема 1. Нека потенциалът $v(x,t)$ в уравнението (55.1) удовлетворява уравнението на КдФ, тогава построените съгласно (43.9) функции $a(k,t)$, $b(k,t)$ удовлетворяват линейните (по t) диференциални уравнения

$$\dot{a}(k,t) = 0, \quad \dot{b}(k,t) = -8ik^3 b(k,t). \tag{55.7}$$

Доказателство. Имаме представянето (43.6), т.е.

$$f(x,t,k) = b(k,t)g(x,t,k) + a(k,t)g(x,t,-k). \tag{55.8}$$

Поставяме (55.8) в (55.3) и устремяваме $x \to -\infty$, отчитайки, че $v(x,t) \to 0$, $|x| \to \infty$ и $g(x,t,\pm k) \sim \exp(\mp ikx)$. Получаваме

$$\dot{b}(k,t)e^{-ikx} + \dot{a}(k,t)e^{ikx} =$$

$$-4ik^3b(k,t)e^{-ikx}+4ik^3a(k,t)e^{ikx}-4ik^3b(k,t)e^{-ikx}-4ik^3a(k,t)e^{ikx}. \qquad (55.9)$$

Сравнявайки коефициентите пред $\exp(\pm ikx)$, получаваме (55.7).

Забележка. Сега ще покажем директно, че ако потенциалът $v(x,t)$ в уравнението (55.1) удовлетворява уравнението на КдФ то собствените значения $k_j^2 = \lambda_j(t)$ не зависят от t : $\dot{\lambda}_j = 0$. (Това твърдение следва от представянето на Лакс, тъй като то е еквивалентно на унитарната еквивалентност на семейството оператори $L(t)$ (вж. напр. (54.5))

Нека положим в първото уравнение на (55.3) $k^2 = \lambda_j(t)$. Тогава второто уравнение дава

$$\dot{L}y + Ly = \dot{\lambda}_j y + \lambda_j \dot{y} \qquad (55.10)$$

и следователно (55.4) се трансформира в

$$(L-\lambda_j)(A\psi_j + \dot{\psi}_j) = \dot{\lambda}_j \psi_j. \qquad (55.11)$$

Сега умножаваме с

$$\psi_j : L\psi_j = \lambda_j \psi_j \qquad (55.12)$$

и интегрираме по x от $-\infty$ до ∞. Получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j (L-\lambda_j)(A\psi_j + \dot{\psi}_j)\, dx = \dot{\lambda}_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^2\, dx. \qquad (55.13)$$

От тук, отчитайки (55.11) и факта, че L е самоспрегнат оператор $((Lf,g) = (f,Lg))$ получаваме , че лявата страна на последното равенство е равна на нула. Следователно

$$\dot{\lambda}_j = 0, \qquad (55.14)$$

което и искахме да покажем.

Забележка Като следствие от теорема 1 може да се покаже, че номировъчните константи (43.12): $b_j = b_j(t)$ удовлетворяват уравненията

$$\dot{b}_j(t) = -8\kappa_j^3 b_j(t), \quad j = 1, 2, \ldots N. \qquad (55.15)$$

56. N-солитонно решение на КдФ.

Тук ще приведем класическия метод за построяване на N-солитонно решение на КдФ (вж. Твърдение 2 Ц 53), базиращ се на уравнението на Гелфанд–Левитан– Марченко

$$F(x+y)+A(x,y)+\int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt=0, \quad x\le y<\infty, \tag{56.1}$$

където потенциала $v(x)$ се дава с формулата

$$A(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^{\infty} v(t)\,dt. \tag{56.2}$$

В частния случай на безотражателен потенциал $b(k)=0$ имаме

$$F(x)=\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\kappa_n x}, \tag{56.3}$$

$$\beta_n=\frac{b_n}{i\dot{a}(i\kappa_n)}. \tag{56.4}$$

В случая на уравнението на КдФ

$$\kappa_n(t)=\kappa_n(0), \quad b_n(t)=b_n(0)e^{8\kappa_n^3 t}. \tag{56.5}$$

За да решим уравнението (56.1) отначало полагаме

$$A(x,y)=\sum_{n=1}^{N}K_n(x)e^{-\kappa_n y}. \tag{56.6}$$

Имаме

$$\int_x^{\infty} A(x,t)F(t+y)\,dt=\sum_{n,m=1}^{N}K_m(x)\int_x^{\infty} e^{-\kappa_m t}\beta_n e^{-\kappa_n(t+y)}\,dt=$$

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n\left(\sum_{m=1}^{N}K_m(x)\int_x^{\infty} e^{-(\kappa_n+\kappa_m)t}\,dt\right)e^{-\kappa_n y}=$$

$$\sum_{n=1}^{N}e^{-\kappa_n y}\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_n K_m(x)e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n+\kappa_m}. \tag{56.7}$$

Замествайки (56.3), (56.6) и (56.7) в (56.1) получаваме

$$\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{-\kappa_n x}e^{-\kappa_n y}+\sum_{n=1}^{N}K_n(x)e^{-\kappa_n y}+\sum_{n=1}^{N}e^{-\kappa_n y}\sum_{m=1}^{N}\frac{\beta_n K_m(x)e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n+\kappa_m}=0. \tag{56.8}$$

Тъй като функциите $e^{-\kappa_n y}$ са линейно независими, то коефициентите са нула, т.е.

$$K_n(x) + \beta_n e^{-\kappa_n x} + \sum_{m=1}^{N} \frac{\beta_n K_m(x) e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} = 0. \tag{56.9}$$

Така получаваме системата уравнения

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^{N} t_{nm} K_m(x) = -\beta_n e^{-\kappa_n x}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{56.10}$$

където

$$t_{nm} = \frac{\beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m}, \quad n, m = 1, \ldots, N. \tag{56.11}$$

Да означим

$$A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N}, \quad A_{nm} = \delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m}, \tag{56.12}$$

т.е. имаме линейната система

$$\sum_{m=1}^{N} A_{nm} K_m = B_n, \quad B_n = -\beta_n e^{-\kappa_n x}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{56.13}$$

Решението на тази система се дава с известната формула

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)}, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{56.14}$$

където матрицата $A^{(n)}(x)$ се получава заменяйки в $A(x)$ n–ия стълб с елементите на стълба $B = (B_1, \ldots, B_N)^T$, т.е. $A^{(n)}_{mn} = -\beta_m e^{-\kappa_m x}$, $m = 1, 2, \ldots, N$. От (56.6) получаваме

$$A(x, x) = (\det A(x))^{-1} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\kappa_n x}. \tag{56.15}$$

Но (56.12) имаме

$$A'_{nm}(x) = -\beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x} \tag{56.16}$$

и, следователно, използвайки правилото за диференциране на детерминанта, получаваме

$$\sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\kappa_n x} = \frac{d}{dx} \det A(x), \tag{56.17}$$

т.е. имаме формулата

$$A(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x), \tag{56.18}$$

която заедно с (56.2) и (56.12) дава

$$v(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x), \quad A = (A_{nm})_{n,m=1}^{N} = \left(\delta_{nm} + \frac{\beta_n e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}}{\kappa_n + \kappa_m} \right). \tag{56.19}$$

За да получим оттук N–солитонното решение

$$v(x,t) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\triangle(x,t) \tag{56.20}$$

$$\triangle(x,t) = Det\left(\delta_{jl} + \beta_j \frac{e^{-(\kappa_j+\kappa_l)x+8\kappa_l^3 t}}{\kappa_j+\kappa_l}\right), \tag{56.21}$$

остава да заместим в (56.19) $\beta_n(t)$ съгласно (56.5). При $N = 1$ получаваме солитонното решение (53.12):

$$v(x,t) = \frac{-2\kappa^2}{\cosh^2\kappa(x-4\kappa^2 t-\varphi)}, \quad \varphi = \frac{1}{2\kappa}\ln\frac{\beta}{2\kappa}. \tag{56.22}$$

6. НЕЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ СВЪРЗАНИ С ОПЕРАТОРА НА ДИРАК.

61.Обобщение на схемата на Лакс, нелинейно уравнение на Шрьодингер и уравнението sin -Гордон.

Тук ще приведем основната идея, по която изложената по-горе схема за интегриране на уравнението на КдФ се модифицира с оглед интегрирането на други нелинейни еволюционни уравнения.

В основата на интегрирането на уравнението на КдФ имахме системата уравнения

$$\psi_{xx} - v(x,t)\psi = -k^2\psi, \tag{61.1}$$

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6v(x,t)\psi_x + 3v_x(x.t)\psi. \tag{61.2}$$

Тази система уравнения относно функцията $\psi(x,t,k)$ е преопределена. Условието за съвместимост така, че решението $\psi(x,t,k)$ на уравнението на Шрьодингер (61.1) да е решение и на уравнението (61.2) налага условие за потенциала $v(x,t)$, което е уравнението на КдФ

$$v_t = 6vv_x - v_{xxx}. \tag{61.3}$$

За да се убедим, че (61.3) е условие за съвместимост на (61.1) и (61.2) е удобно да постъпим по следния начин. Отначало ще запишем уравнението от втори ред като система уравнения от първи ред, въвеждайки нова неизвестна функция ψ_1 така че

$$\psi_x = ik\psi + \psi_1. \tag{61.4}$$

Тогава от (61.1) имаме

$$\psi_{1x} = -ik\psi_1 + v\psi. \tag{61.5}$$

Очевидно системата (61.4), (61.5) е еквивалентна на уравнението (61.1). По-нататък с помощта на системата (61.4), (61.5) изключваме производните по x в уравнението (61.2). Така получаваме

$$\psi_t = 4ik^3\psi + 4k^2\psi_1 + 2ikv\psi - v_x\psi + 2v\psi_1. \tag{61.6}$$

От тук, използвайки отново системата (61.4), (61.5), получаваме аналогично уравнение за ψ_1:

$$\psi_{1t} = -4ik^3\psi_1 + 4k^2\psi + 2ikv_x\psi - 2ikv\psi_1 + (2v^2 - v_{xx})\psi + v_x\psi_1. \tag{61.7}$$

Нека означим

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_1 \end{pmatrix}. \tag{61.8}$$

Тогава системите (61.4),(61.5) и (61.6),(61.7) можем да запишем в следния компактен вид

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \tag{61.9}$$

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \tag{61.10}$$

където матриците

$$U(\lambda) = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix}, \tag{61.11}$$

$$V(\lambda) = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} v & 0 \\ v_x & -v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_x & 2v \\ 2v^2 - v_{xx} & v_x \end{pmatrix}. \tag{61.12}$$

Системата уравнения (61.9), (61.10) относно вектор-функцията φ е преопределена. Условието за съвместимост $\varphi_{xt} = \varphi_{tx}$ дава уравнението

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0. \tag{61.13}$$

Това равенство, което е полином относно параметъра λ, следва да бъде изпълнено за всички $\lambda \in \mathbb{C}$. Следователно коефициентите му, като функции на променливите x, t се анулират. Структурата на матриците U и V обезспечава анулирането на всички коефициенти на полинома с изключение на свободния му член, т. е. лявата страна на равенството (61.13) има вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_t - 6vv_x + v_{xxx} & 0 \end{pmatrix}. \tag{61.14}$$

Така получихме, че равенството (61.13) е еквивалентно на изискването функцията $v(x, t)$ да удовлетворява уравнението на КдФ. Равенството (61.13) дава едно ново комутационно представяне за уравнението на КдФ. Предимството му, в сравнение с представянето на Лакс, е че може да бъде обобщено за други еволюционни уравнения, интегруеми с идеята за метода на обратната задача. Нека матрицата $U(x, t; \lambda)$ има вида

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \tag{61.15}$$

където в общия случай q, r са комплекснозначни функции на x и t. Матрицата V ще избираме от условието щото равенството (61.13) да се свежда до уравнение в частни производни относно q и r.

Нека V има вида

$$V = 2i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}. \qquad (61.16)$$

Тогава (61.13) дава системата на Абловиц–Кауп–Нюел и Сегюр (АКНС)

$$\begin{aligned} ir_t + r_{xx} - 2qr^2 = 0 \\ iq_t - q_{xx} + 2rq^2 = 0. \end{aligned} \qquad (61.17)$$

При $r = \bar{q}$ или $r = -\bar{q}$ получаваме нелинейните уравнения на Шрьодингер (НУШ $\pm$)

$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0, \quad (r = \bar{q}) \qquad (61.18a)$$

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0, \quad (r = -\bar{q}). \qquad (61.18)$$

Нека

$$V = 4i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2\lambda \begin{pmatrix} qr & -q_x \\ r_x & qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} qr_x + rq_x & iq_{xx} - 2q^2 r \\ r_{xx} - 2r^2 q & qr_x - rq_x \end{pmatrix}. \qquad (61.19)$$

Получаваме системата уравнения

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} - 6rqq_x = 0 \\ r_t + r_{xxx} - 6qrr_x = 0. \end{aligned} \qquad (61.20)$$

При $r = 1$ имаме уравнението на КдФ, а при $r = \pm r$ –модифицираното уравнение на КдФ (МКдФ):

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} - 6q^2 q_x = 0 \\ q_t + q_{xxx} + 6q^2 q_x = 0. \end{aligned} \qquad (61.20)$$

При

$$U = -i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{u_x}{2} \\ \frac{u_x}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (61.21)$$

$$V = \frac{i}{4\lambda} \begin{pmatrix} \cos u0 & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}, \qquad (61.22)$$

получаваме уравнението sin-Gordon

$$u_{xt} = \sin u.$$

60. Хилбертово пространство. Скаларно произведение и норма.

Нека $\mathcal{H}$ е линейно пространство над $\mathbf{C}$. Казваме, че в $\mathcal{H}$ е зададено скаларно произведение, ако е зададено изображение

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \overset{(\,,\,)}{\rightarrow} \mathbf{C}$$

със следните свойства: За всеки два вектора $x, y \in \mathcal{H}$ и числа $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ имаме

$$\begin{array}{ll} 1. & (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z) \\ 2. & (x,y) = \overline{(y,x)} \\ 3. & (x,x) \geq 0, (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{array} \tag{60.1}$$

(Тук и занапред с черта ще отбелязваме комплексното спрягане.)

С помощта на зададеното скаларно произведение в $\mathcal{H}$ можем да въведем норма. Наистина, достатъчно е да положим

$$||x|| \equiv \sqrt{(x,x)},$$

след което две от свойствата на нормата

$$\begin{array}{ll} 1. & ||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x|| \\ 2. & ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \end{array}$$

се проверяват веднага. Колкото до неравенството на триъгълника, то е непосредствено следствие от така нареченото неравенство на Коши-Буняковски-Шварц, което ще докажем със следващата лема.

Лема 0.1 *За всеки два вектора $f, g \in \mathcal{H}$ е в сила следното неравенство:*

$$|(f,g)| \leq ||f|| \, ||g||,$$

като равенство имаме тогава и само тогава, когато векторите са линейно зависими.

Доказателство. Нека допуснем, че $(f,g) \neq 0$ (ако $(f,g) = 0$, твърдението на лемата е очевидно). Да положим

$$\theta = \frac{(f,g)}{|(f,g)|}.$$

За всяко $\lambda \in \mathbf{R}$ имаме

$$(\bar{\theta}f + \lambda g, \bar{\theta}f + \lambda g) = \lambda^2(g,g) + 2\lambda|(f,g)| + (f,f) \geq 0.$$

Следователно, за дискриминантата на квадратния тричлен по необходимост имаме:

$$D = |(f,g)|^2 - (f,f)(g,g) \leq 0,$$

което е еквивалентно на неравенството, което искаме да докажем.

Равенство ще имаме само в случая, когато тричленът има двоен корен, т.е. ако за някое μ, $(\bar{\theta} f + \mu g, \bar{\theta} f + \mu g) = 0$. Това обаче означава, че

$$\bar{\theta} f + \mu g = 0.$$

Да докажем сега неравенството на триъгълника. Очевидно, за всеки два вектора $f, g \in \mathcal{H}$ използувайки неравенството на Коши-Буняковски-Шварц имаме:

$$||f+g||^2 = (f+g, f+g) = (f, f)+(f, g)+(g, f)+(g, g) = ||f||^2+||g||^2+2Re(f, g) \leq$$

$$\leq ||f||^2 + ||g||^2 + 2|(f, g)| \leq ||f||^2 + ||g||^2 + 2||f||\ ||g|| = (||f|| + ||g||)^2.$$

Коренувайки, получаваме неравенството на триъгълника

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

Равенство можем да имаме само ако $(f, g) = ||f||\ ||g||$ и ако f, g са линейно зависими. Ако $f = 0$ горното очевидно е изпълнено. Ако $f \neq 0$, от лемата следва, че $g = \lambda f$, където λ е число. Тогава

$$\lambda(f, f) = ||f||^2 |\lambda| \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

С други думи, в неравенството на триъгълника равенство имаме само тогава, когато f и g са пропорционални и коефициентът на пропорционалност е неотрицателен.

С доказването на неравенството на триъгълника доказахме, че $\sqrt{(x, x)}$ е действително норма. Следователно, всяко пространство, в което е въведено скаларно произведение е и нормирано векторно пространство.

Определение 0.1 *Сепарабелно пространство $\mathcal{H}$ наричаме хилбертово, ако в него има скаларно произведение, определящо норма, относно която $\mathcal{H}$ е пълно.*

Забележка 0.1 *Обикновено, допълнително се предполага, че пространството $\mathcal{H}$ е безкрайномерно, макар, очевидно всички конструкции и резултати да са в сила и за крайномерни пространства.*

Примери

- Пространството l_2.

$$l_2 = \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbf{C}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}.$$

l_2 е линейно пространство ако определим операциите събиране и умножение с число по следния начин:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\lambda \mathbf{x} = \{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

(Поради неравенството $|x_n + y_n|^2 \leq 2|x_n|^2 + 2|y_n|^2$, редът $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$).

Скаларното произведение ще определим съгласно формулата:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Не е трудно да се провери, че дефиницията е коректна, тъй като

$$|x_n \overline{y}_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$$

и редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$ е абсолютно сходящ. Неравенството от доказаната по-горе лема тук придобива вида

$$|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n| \leq (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2)^{\frac{1}{2}}$$

и е доказано от Коши.

l_2 е безкрайномерно пространство, защото векторите

$$\mathbf{e}^m = \{e_n^m = \delta_n^m\}_{n=1}^{\infty}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

са линейно независими.(Тук δ_n^m е символа на Кронекер). Единственото свойство, което не е очевидно, е пълнотата. За да я докажем, нека да вземем редица на Коши $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$. За всяко $\epsilon > 0$ съществува число $N(\epsilon)$, такова, че при $m, n > N(\epsilon)$

$$||\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m|| < \epsilon.$$

С други думи, при $m, n > N(\epsilon)$

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^n - x_s^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

и с още по-голямо основание, за всяко фиксирано s

$$|x_s^n - x_s^m| < \epsilon,$$

при $m, n > N(\epsilon)$. Оттук поради пълнотата на $\mathbf{C}$ следва, че съществува границата

$$\lim_{n \to \infty} x_s^n = x_s.$$

За произволно естествено число p

$$\left(\sum_{s=1}^{p} |x_s^n - x_s^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \Rightarrow \left(\sum_{s=1}^{p} |x_s - x_s^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

при $m, n > N(\epsilon)$. Ако положим $M = \left(\sum\limits_{s=1}^{\infty} |x_s^m|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, то използувайки неравенството на триъгълника в $\mathbf{C}^p$ получаваме

$$\left(\sum_{s=1}^{p} |x_s|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq (M + \epsilon),$$

поради което редът $\left(\sum\limits_{s=1}^{\infty} |x_s|^2\right)$ е сходящ и $\{x_s\}_{s=1}^{\infty} \equiv \mathbf{x} \in l_2$. Тъй като за всяко p при $m, n > N(\epsilon)$,

$$\left(\sum_{s=1}^{p} |x_s^m - x_s|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

то

$$\left(\sum_{s=1}^{\infty} |x_s^m - x_s|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon,$$

което означава, че при $m > N(\epsilon)$ ще е изпълнено $||\mathbf{x}^m - \mathbf{x}|| \leq \epsilon$,

$$\lim_{m \to \infty} \mathbf{x}^m = \mathbf{x},$$

т.е. редицата на Коши $\{\mathbf{x}^n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

Пространството l_2 е сепарабелно. Наистина, не е трудно да се види, че множеството от финитните редици, чиито елементи имат рационални реални и имагинерни части е гъсто в l_2.

- Пространство $L^2_{[a,b]}$ на квадратично интегруемите по Лебег функции върху интервала $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

$$L^2_{[a,b]} = \{f : \int\limits_{[a,b]} |f|^2(t)dt < \infty\},$$

(Интервалът $[a, b]$ може да бъде и безкраен.)

Скаларното произведение се дефинира както следва:

$$(f, g) = \int\limits_{[a,b]} f\overline{g}(t)dt,$$

като съществуването на интеграла се обезспечава от неравенството

$$|f\overline{g}(t)| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2).$$

Очевидно е обаче, че от условието $(f, f) = 0$ не следва $f = 0$, а просто $f = 0$ почти навсякъде, тоест мярката $\mu(A)$ на множеството:

$$A = \{t \in [a, b] : f(t) \neq 0\}$$

е равна на нула. Изходът от тази ситуация беше посочен по-горе и в конкретния случай конструкцията се свежда до разглеждането не на самите функции, а на класовете на еквивалентност, състоящи се от функциите, които са равни почти навсякъде. Именно в такъв смисъл ще разглеждаме елементите на $L^2_{[a,b]}$. Неравенството на Коши-Буняковски-Шварц има вида

$$|\int\limits_{[a,b]} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int\limits_{[a,b]} |f|^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{[a,b]} |g|^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

и е било доказано от Буняковски за интеграли. Отново използувайки елементарното неравенство

$$|f(t)+g(t)|^2 \leq 2(|f(t)|^2+|g(t)|^2)$$

доказваме, че $L^2_{[a,b]}$ е векторно пространство. Неговата безкрайномерност е очевидна. Колкото до сепарабелността, от самата конструкция на интеграла на Лебег следва, че множеството от крайните линейни комбинации от финитни функции, които са константни върху някакъв краен интервал е гъсто. От своя страна в посоченото множество е гъсто подмножеството на функциите, чиито значения имат рационални реални и имагинерни части и чиито точки на прекъсване са също рационални. Последното множество очевидно е изброимо. За да докажем, че пространството $L^2_{[a,b]}$ е хилбертово, остава да докажем следната

Лема 0.2 *Пространството $L^2_{[a,b]}$ е пълно.*

Доказателство.

Нека $\{f_n(t)\}_1^\infty$ е фундаментална редица, т.е. за всяко $\epsilon > 0$ съществува число $N(\epsilon)$, такова, че ако $m, n > N(\epsilon)$ то

$$\left(\int\limits_{[a,b]} |f_n(t)-f_m(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon.$$

Използувайки горното свойство, можем да построим редица от цели числа $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$, такава, че:

$$\int\limits_{[a,b]} |f_s(t)-f_{k_r}(t)|^2dt < \frac{1}{8^r},$$

за $s \geq k_r$. В частност, очевидно имаме

$$\int\limits_{[a,b]} |f_{k_{r+1}}(t)-f_{k_r}(t)|^2dt < \frac{1}{8^r}.$$

За доказателството ще ни е необходимо още и неравенството на Чебишев, според което за всяка неотрицателна функция $\varphi(x)$, интегруема върху E и за всяко положително число c имаме:

$$\frac{1}{c}\int\limits_E \varphi(x)dx \geq \mu(\{x : \varphi(x) \geq c\}).$$

Забележка 0.2 *Неравенството на Чебишев е следствие от следната верижка неравенства:*

$$\int\limits_E \varphi(x)dx = \int\limits_{\{x:\varphi<c\}} \varphi(x)dx + \int\limits_{\{x:\varphi\geq c\}} \varphi(x)dx \geq c\mu(\{x : \varphi \geq c\}).$$

Използвайки неравенството на Чебишев, получаваме, че ако

$$I_r = \{x : |f_{k_{r+1}}(x) - f_{k_r}(x)| < \frac{1}{2^r}\},$$

то

$$\mu(\{[a,b] \setminus I_r\}) < \frac{1}{2^r}.$$

Наистина,

$$\frac{1}{2^r} > \frac{1}{4^{-r}}\int\limits_{[a,b]} |f_{k_{r+1}}(t) - f_{k_r}(t)|^2 dt \geq \mu(\{x : |f_{k_{r+1}}(x) - f_{k_r}(x)|^2 \geq 4^{-r}\}) =$$

$$\mu(\{x : |f_{k_{r+1}}(x) - f_{k_r}(x)| \geq \frac{1}{2^r}\}).$$

Да положим

$$C_r = \bigcap_{s=1}^{\infty} I_s,$$

очевидно

$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \ldots.$$

От друга страна

$$\mu(\{(a,b) \setminus C_r\}) = \mu\left(\bigcup_{s=r}^{\infty}(a,b) \setminus I_s\right) \leq \sum_{s=r}^{\infty} \mu\left((a,b) \setminus I_s\right) \leq \sum_{s=r}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2^{r-1}}$$

откъдето следва, че

$$\lim_{r\to\infty} \mu\left((a,b) \setminus C_r\right) = 0.$$

Следователно

$$\mu\left((a,b) \setminus C\right) = 0,$$

където

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_n.$$

Редът

$$\sum_{s=1}^{\infty} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|$$

очевидно е равномерно сходящ върху всяко C_n, тъй като се мажорира от реда с общ член $\frac{1}{2^r}$, а значи той е равномерно сходящ и върху C. Следователно, той е сходящ почти навсякъде в (a, b). От неравенствата

$$\left|\sum_{s=m}^{n} f_{k_{s+1}} - f_{k_s}\right| \leq \sum_{s=m}^{n} |f_{k_{s+1}} - f_{k_s}|$$

следва, че почти навсякъде в (a, b) съществува границата

$$\lim_{r\to\infty} f_{k_r} = f(x).$$

f като граница на измерими функции е измерима. Да си припомним сега, че съгласно по построение на редицата k_r имахме свойството: при $s > k_r$

$$||f_s - f_{k_r}||^2 = \int_a^b |f_s - f_{k_r}|^2 dx < \frac{1}{8^r}.$$

Да направим граничен преход $r \to \infty$. Съгласно теоремата на Фату можем да направим преход под знака на интеграла, при $s \geq k_r$ получаваме:

$$\int_a^b |f_s - f|^2 dx \leq \frac{1}{8^r}.$$

От това неравенство с лекота следва, че $f \in L^2_{[a,b]}$ и тогава можем да напишем, че при $s > k_r$

$$||f_s - f||^2 \leq \frac{1}{8^r},$$

което означава, че $f_s \to f$ в смисъл на нормата в $L^2_{[a,b]}$, и следователно $L^2_{[a,b]}$ е пълно.

0.1 Разстояние до изпъкнало множество

Нека K е изпъкнало подмножество в $\mathcal{H}$ и нека $k \in K$. За $h \in \mathcal{H}$ да положим

$$\delta_h \equiv \inf_{k \in K} ||h - k||.$$

δ_h се нарича разстояние от h до K. Дали съществува $g \in K$, реализиращо този инфинимум?

Теорема 0.1 *Нека K е изпъкнало, затворено подмножество в $\mathcal{H}$. Съществува единствен елемент $g \in K$, такъв, че $||g - h|| = \delta_h$.*

Доказателство

Единственост Нека g_1 и g_2 са два вектора имащи нужното свойство. Тъй като K е изпъкнало, то $\frac{1}{2}(g_1 + g_2) \in K$ и следователно

$$||h - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)|| \geq \delta_h.$$

От друга страна обаче,

$$||h - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)|| = \frac{1}{2}||h - g_1 + h - g_2|| \leq \frac{1}{2}||h - g_1|| + \frac{1}{2}||h - g_2|| \leq \delta_h.$$

Следователно,

$$||h - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)|| = \delta_h.$$

За всеки два елемента f_1, f_2 от $\mathcal{H}$ е в сила тъждеството

$$||f_1 - f_2||^2 + ||f_1 + f_2||^2 = 2||f_1||^2 + 2||f_2||^2,$$

наричано тъждество на паралелограма. Ако положим в него $f_1 = h - g_1, f_2 = h - g_2$ ще получим

$$||g_1 - g_2||^2 + 4||h - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)||^2 = 2||h - g_1||^2 + 2||h - g_1||^2.$$

Следователно, $||g_1 - g_2|| = 0$ т.е. $g_1 = g_2$.

Съществуване

Нека $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от елементи на K, такава, че

$$\lim_{n \to \infty} ||h - g_n|| = \delta_h.$$

Тъй като

$$||h - \frac{1}{2}(g_n + g_m)|| \leq \frac{1}{2}(||h - g_m|| + ||h - g_n||),$$

то очевидно

$$\limsup_{m,n \to \infty} ||h - \frac{1}{2}(g_m + g_n)|| \leq \delta_h.$$

По дефиниция обаче

$$||h - \frac{1}{2}(g_m + g_n)|| \geq \delta_h,$$

откъдето следва, че

$$\lim_{m,n\to\infty} ||h - \frac{1}{2}(g_m + g_n)|| \leq \delta_h.$$

Полагайки в тъждеството на паралелограма $f_1 = h - g_m, f_2 = h - g_n$ получаваме

$$||g_m - g_n||^2 + 4||h - \frac{1}{2}(g_m + g_n)||^2 = 2||h - g_m||^2 + 2||h - g_n||^2,$$

откъдето виждаме, че редицата $\{g_n\}_1^\infty$ е фундаментална, а значи и сходяща. Нека

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g.$$

Множеството K е затворено и следователно $g \in K$. По нататък, тъй като нормата е непрекъсната функция окончателно получаваме:

$$\lim_{n\to\infty} ||h - g_n|| = ||h - g|| = \delta_h.$$

0.2 Проекция върху подпространство

Нека $L = \overline{L}$ е затворено подпространство в хилбертовото пространство $\mathcal{H}$. Според теоремата от предишната подточка за всяко $h \in \mathcal{H}$ съществува единствен елемент $g \in L$ такъв, че

$$||h - g|| = \inf_{g' \in K} ||h - g'||.$$

Точката (вектора) g се нарича ортогонална проекция на h върху L поради следното свойство

Теорема 0.2 *Векторът $h - g$ е ортогонален на всички вектори от L.*

Доказателство

Нека g_0 е вектор от L, и $(h - g, g_0) \neq 0$. Нека положим

$$g^* = g + \frac{(h - g, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0.$$

Тогава

$$||h - g^*|| = ||h - g - \frac{(h - g, g_0)}{(g_0, g_0)} g_0||^2 = ||h - g||^2 - \frac{|(h - g, g_0)|^2}{(g_0, g_0)} \leq ||h - g||^2,$$

което е противоречие с определението на g. Да въведем пространството

$$L^\perp = \{g' \in \mathcal{H} : (g', g) = 0, \quad g \in L\}.$$

Това пространство очевидно е затворено, то се нарича ортогонално допълнение на L. Можем да напишем $h = g + f$, $f \equiv h - g$. Тогава $(f, g') = 0$ за всяко $g' \in L$. Тъй като очевидно $L \bigcap L^\perp = \{0\}$, то

$$\mathcal{H} = L \oplus L^\perp.$$

Доказаната теорема позволява да се формулира критерий, кога дадено линейно подпространство M е гъсто в $\mathcal{H}$.

Следствие 0.1 *За да бъде линейното подмногообразие M гъсто в $\mathcal{H}$, необходимо и достатъчно е да не съществува елемент $x \neq 0$, ортогонален на M (т.е. на всички вектори от M).*

Необходимост Ако $x \perp M$, то очевидно $x \perp \overline{M} = \mathcal{H}$, а значи $x \perp x$, откъдето $x = 0$. *Достатъчност* Нека M не е гъсто в $\mathcal{H}$, тоест $\overline{M} \neq \mathcal{H}$. Тогава съществува $x \in \mathcal{H}, \quad x \neq 0, \quad x \notin \overline{M}$. Векторът x може да бъде представено по следния начин:

$$x = f + g, \quad f \in \overline{M}, \quad g \in (\overline{M})^{\perp}.$$

Тъй като $x \notin \overline{M}$, то $g \neq 0, \quad g \perp \overline{M}$, което противоречи на условието.

0.3 Ортонормирани системи

Определение 0.2 *Нека системата от вектори* $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ *е такава, че*

$$(e_m, e_n) = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Такава система се нарича ортонормирана.

Пример за такива системи са векторите

$$\begin{array}{c} e_1 = (1, 0, 0, \ldots), \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

в пространството l_2 или функциите

$$e^{2\pi int}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

в $L^2_{[0,1]}$. Тъй като една безкрайна система от вектори се нарича линейно независима точно тогава, когато е независима всяка една нейна крайна подсистема, то очевидно всяка една ортонормирана система е линейно независима. По-долу ще предполагаме, че в $\mathcal{H}$ съществува ортонормирана система $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$. Да отбележим, че от всяка независима система може да се получи ортонормирана система чрез процеса на ортогонализация на Грам и Шмид. Нека L е подпространството, породено от $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ (затворената линейна обвивка на $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$). Ако $x \in L$, то $\forall \epsilon > 0, \quad \exists d_p \in \mathbf{C}, \quad p = 1, 2, \ldots, n$, такива, че

$$||x - \sum_{p=1}^{n} d_p e_p|| < \epsilon.$$

Да разгледаме следната верижка от равенства:

$$||x - \sum_{p=1}^{n} d_p e_p||^2 = ||x||^2 - \sum_{p=1}^{n} \overline{d}_p (x, e_p) - \sum_{p=1}^{n} d_p (e_p, x) + \sum_{p=1}^{n} \overline{d}_p d_p =$$

$$= ||x||^2 - 2\text{Re} \sum_{p=1}^{n} d_p (e_p, x) + \sum_{p=1}^{n} |d_p|^2 =$$

$$||x||^2 - \sum_{p=1}^{n} |(x, e_p)|^2 + \sum_{p=1}^{n} |d_p - (x, e_p)|^2.$$

Определение 0.3 *Числата* $c_p \equiv (x, e_p)$ *се наричат коефициенти на Фурие за елемента* x*.*

Горното неравенство показва, че $||x - \sum\limits_{p=1}^{n} d_p e_p||^2$ е минимално, когато $c_p = d_p$. В този случай

$$||x - \sum_{p=1}^{n} c_p e_p||^2 = ||x||^2 - \sum_{p=1}^{n} |c_p|^2.$$

Тези формули показват, че

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k = x$,

2. Редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ е сходящ и $||x||^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

Нека сега x е произволен елемент от $\mathcal{H}$. Тогава

$$x = f + g, \quad f \in L, g \in L^{\perp}.$$

Нека $c_i = (x, e_i)$ са коефициентите на Фурие за x (а значи и за f). Очевидно

$$||x||^2 = ||f||^2 + ||g||^2 \geq ||f||^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |c_s|^2.$$

Горното неравенство се нарича неравенсто на *Бесел.* Ако $\{e_i\}_1^\infty$ поражда $\mathcal{H}$, тоест затворената линейна обвивка на $\{e_i\}_1^\infty$ е $\mathcal{H}$, то очевидно

$$||x||^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |c_s|^2.$$

Това тъждество се нарича тъждество на *Парсевал.*

Системата вектори $\{e_i\}_1^\infty$ поражда $\mathcal{H}$ точно тогава, когато не съществува ненулев вектор, ортогонален на всички $\{e_i\}_1^\infty$. Система с това свойство се нарича пълна или затворена. Не е трудно да се покаже, че във всяко сепарабелно хилбертово пространство съществува пълна система $\{e_i\}_1^\infty$, и че една ортонормирана система е пълна точно тогава, когато за всяко x е в сила тъждеството на Парсевал.

60.с. Линейни функционали и ограничени линейни оператори.
char 9

0.4 Ограничени оператори в хилбертови пространства

Нека E_1, E_2 са нормирани пространства, с норми $|| \quad ||_1$ и $|| \quad ||_2$ и нека A е линеен оператор:

$$A : E_1 \to E_2.$$

Определение 0.4 *A се нарича ограничен, ако*

$$\sup_{||x||_1=1} ||Ax||_2 < \infty.$$

Определение 0.5 *Числото*

$$||A|| = \sup_{||x||_1=1} ||Ax||_2 = \sup_{x\in\mathcal{H}, x\neq 0} \frac{||Ax||_2}{||x||_1}$$

се нарича норма на оператора A.

Линейното пространство от ограничените оператори от посочения по-горе вид ще отбелязваме с $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. Може да се покаже без особени затруднения, че изображението $A \to ||A||$ действително задава норма и че пространството $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ е пълно ако е пълно E_2. Очевидно, $||Ax||_2 \leq ||A||||x||_1$, поради което всеки линеен оператор е непрекъснат в нулата, а значи е непрекъснат във всяка точка относно топологията в E_1. Обратно, A ако е непрекъснат, то за всяко $\epsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова, че при $||x||_1 < \delta$ имаме $||Ax||_2 < \epsilon$. Тогава, за какво да е $x \neq 0$,

$$y = \frac{x}{2||x||_1}\delta$$

има свойството $||y||_1 < \delta$, поради което $||Ay||_2 < \epsilon$, тоест

$$||Ax||_2 < 2\frac{\epsilon}{\delta}||x||_1.$$

Следователно, оператора A е ограничен. С други думи, понятията непрекъснат линеен оператор и ограничен линеен оператор са синоними. Разбира се, нищо не пречи да имаме $E_2 = \mathbf{C}$. Тогава въпросните линейни непрекъснати оператори са всъщност линейните непрекъснъти функционали. Пространството от тези функционали ще обозначаваме с E_1^*. Възможно е също така $E_1 = E_2 = \mathcal{H}$, където $\mathcal{H}$ е хилбертово пространство. Пространството от ограничените оператори от $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$ се обозначава с $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ или с $B(\mathcal{H})$. В този случай нормата освен обичайните свойства:

1. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||, \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$
2. $||\lambda A|| = |\lambda|||A||, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}), \quad \lambda \in \mathbf{C}$

притежава и две допълнителни:

3. $||AB|| \leq ||A||||B||, \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$
4. $||E|| = 1, \quad E \equiv id_{\mathcal{H}}.$

Умножението (композицията) на оператори превръща $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ в алгебра, свойствата $1-4$ заедно с пълнотата на $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ показват, че това е една банахова алгебра.

Забележка 0.3 *Една алгебра с единица се нарича банахова, ако тя е банахово линейно пространство, като освен това са изпълнени свойствата 3-4 (за умножението и за единицата на алгебрата).*

Ще приведем някои резултати за непрекъснатите линейни функционали в хилбертово пространство $\mathcal{H}$. Най съществения от тях е теоремата на Рис:

Теорема 0.3 *Ако f е линеен непрекъснат функционал, то съществува единствен елемент u, такъв, че $f(x) = (x, u)$ и $||f|| = ||u||$.*

Доказателство. Ако $f = 0$, теоремата е очевидна. Поради това, ще предполагаме, че $f \neq 0$. Тъй като f е непрекъснат, то $\ker f$ е затворено. Коразмерността на $\ker f$ е 1, тоест $\dim(\mathcal{H}/\ker f) = 1$. Наистина, тъй като $f \neq 0$, то съществува $a \neq 0$, такъв, че $f(a) = 1$. Тогава

$$x = (x - f(x)a) + f(x)a, \quad x - f(x)a \in \ker f, \quad f(x)a \in \mathbf{C}a.$$

Но, $\ker f \bigcap \mathbf{C}a = \{0\}$. Следователно

$$\ker f \oplus \mathbf{C}a = \mathcal{H}.$$

Да разбием сега $\mathcal{H}$ в ортогонална сума

$$\mathcal{H} = \ker f \oplus N.$$

Тъй като $\dim(H/\ker f) = 1$, то $\dim N = 1$. Нека обозначим проекциите на елемента a върху $\ker f$ и N с a_1 и a_2. $a_2 \neq 0$, тъй като в противен случай $a \in \ker f$, което е невъзможно. Тъй като

$$f(a) = f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2) = f(a_2) = 1,$$

то вместо a можем да използуваме a_2 за разбиването (0.4) и тогава това разбиване ще съвпадне с ортогоналното разбиване. Ще покажем, че

$$f(x) = (x, \frac{a_2}{||a_2||^2}).$$

Наистина, нека $x \in \mathcal{H}$. Можем да напишем

$$x = y + z, \quad y \in \ker f, \quad z = \lambda a_2.$$

Тогава,

$$f(x) = f(y) + \lambda f(a_2) = \lambda f(a_2) = \lambda.$$

От друга страна

$$(x, \frac{a_2}{||a_2||^2}) = (\lambda a_2, \frac{a_2}{||a_2||^2}) = \lambda,$$

така че можем да положим

$$u = \frac{a_2}{||a_2||^2}.$$

И така, $f(x) = (x, u)$. Единствеността е очевидна, поради което остава да се покаже, че $||f|| = ||u||$. От една страна, използувайки неравенството на Коши-Буняковски получаваме, че $||f(x)|| \leq ||u|| \ \ ||x||$, значи $||f|| \leq ||u||$. От друга страна, $f(u) = (u, u) = ||u||^2$. Тъй като

$$||f|| = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{|f(v)|}{||v||} \geq \frac{|f(u)|}{||u||} = ||u||.$$

61. Унитарни и изометрични оператори.

Дефиниция. Операторът U, дефиниран в пространството $\mathcal{H}, (D_U = \mathcal{H})$, чиято област от значения $\Delta_U = \mathcal{H}$, се нарича унитарен, ако

$$(Uf, Ug) = (f, g), \quad f, g \in \mathcal{H}. \tag{61.1}$$

Нека отбележим, че тук априори не искаме U да бъде линеен оператор. Отначало ще докажем следната теорема.

Теорема 61.1. Операторът U^{-1} съществува и е унитарен.

Доказателство. Напомняме, че за да съществува обратен оператор е необходимо и достатъчно от $Tf = Tg$ да следва $f = g$. Тогава обратният се строи съпоставяйки на $f' = Tf$ прообраза f. Нека предположим, че $Uf = Ug$, тогава от (61.1) имаме

$$\begin{aligned} 0 = (Uf - Ug, Uf - Ug) &= (Uf, Uf) - (Uf, Ug) - (Ug, Uf) + (Ug, Ug) \\ &= (f - g, f - g), \end{aligned} \tag{61.2}$$

т. е. $f = g$. Следователно U^{-1} съществува. Тъй като $D_{U^{-1}} = \Delta_U$, $\Delta_{U^{-1}} = D_U$, операторът U^{-1} аналогично на U е дефиниран в цялото пространство и го изобразява на цялото пространство. Нека положим $Uf = f', Ug = g'$, тогава $f = U^{-1}f'$, $g = U^{-1}g'$. От (61.1) получаваме

$$(f', g') = (U^{-1}f', U^{-1}g'), \tag{61.3}$$

с което унитарността на U^{-1} е доказана, защото f', g' могат да бъдат произволни елементи от пространството $\mathcal{H}$.

Следствие Спрегнатият на унитарен оператор съвпада с обратния:

$$U^* = U^{-1}, \tag{61.4}$$

т. е.

$$U^*U = UU^* = I. \tag{61.5}$$

Действително, нека $U^{-1}g = g'$, така, че $g = Ug'$. Тогава равенството

$$(Uf, Ug') = (f, g') \tag{61.6}$$

е еквивалентно на равенството

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g), \tag{61.7}$$

което и доказва (61.4). Сега ще докажем, че е справедлива следната теорема.

Теорема 61.2. Всеки унитарен оператор е линеен.

Доказателство Нека

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2. \tag{61.8}$$

Тогава от (61.7) получаваме

$$(Uf, g) = (f, U^{-1}g) = \alpha_1(f_1, U^{-1}g) + \alpha_2(f_2, U^{-1}g) = \alpha_1(Uf_1, g) + \alpha_2(Uf_2, g). \quad (61.9)$$

Тъй като g е произволен елемент, то от последното равенство имаме

$$Uf \;=\; \alpha_1 Uf_1 + \alpha_2 Uf_2, \quad f \;=\; \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \qquad (61.10)$$

което и трябваше да докажем.

Накрая на този параграф накратко ще се спрем на понятието изометричен оператор. Нека са дадени две хилбертови пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Ще означаваме скаларното произведение в първото пространство с индекс 1, а във второто пространство с индекс 2.

Дефиниция. Операторът V, дефиниран в цялото пространство $\mathcal{H}_1(D_V = \mathcal{H}_1)$ и изобразяващ го върху цялото пространство $\mathcal{H}_2(\Delta_V = \mathcal{H}_2)$, се нарича изометричен, ако за всеки $f, g \in \mathcal{H}_1$

$$(Vf, Vg)_2 = (f, g)_1. \qquad (61.11)$$

Ще отбележим, че Теоремите 61.1 и 2 остават в сила и за изометрични оператори. По - точно имаме:

1.) Всеки изометричен оператор има обратен оператор, който също е изометричен.

2.) Всеки изометричен оператор е линеен.

Ще завършим с едно важно понятие, което често ще използваме впоследствие.

Дефиниция. Нека T_1 и T_2 са линейни оператори, действуващи в пространствата $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, така, че $D_{T_1} \subseteq \mathcal{H}_1$, $\Delta_{T_1} \subseteq \mathcal{H}_1$, $D_{T_2} \subseteq \mathcal{H}_2, \Delta_{T_2} \subseteq \mathcal{H}_2$ (в, частност пространствата $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ могат да съвпадат.)

Операторите T_1 и T_2 се наричат *унитарно еквивалентни*, ако съществува изометричен оператор V, изобразяващ $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ така, че

$$D_{T_2} = VD_{T_1} \qquad (61.12)$$

и

$$T_1 = V^{-1}T_2V. \qquad (61.13)$$

61.а Проекционни оператори

Важен клас от ограничените оператори са проекционните оператори. Нека F е затворено подпространство на $\mathcal{H}$. Тогава съществува разлатането

$$\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp} \equiv F \oplus (\mathcal{H} \ominus F)$$

и за всеки елемент h можем да напишем $h = f_1 + f_2, \quad f_1 \in F, \quad f_2 \in F^{\perp}$.

Определение 0.6 *Операторът, определен с равенството*

$$P_F(h) = f_1,$$

се нарича проекционен оператор, или просто проектор върху подпространството F.

Очевидно е, че P е ограничен, $||P_F|| = 1$, и че е изпълнено

$$1) \quad P_F^2 = P_F$$

$$2) \quad P_F^* = P_F.$$

Обратно, от тези две равенства следва, че P_G е проектор върху някакво затворено подпространство.

Теорема 0.4 *Нека P е определен навсякъде в $\mathcal{H}$, за които при произволни h_1, h_2 е изпълнено*

$$(P^2 h_1, h_2) = (P h_1, h_2)$$
$$(P h_1, h_2) = (h_1, P h_2).$$

Тогава съществува подпространство S, такова че $P_S = P$.

Доказателство. Както видяхме, в (**??**) от условието на теоремата следва, че P е ограничен, но това може да се види и непосредствено от условието:

$$||Ph||^2 = (Ph, Ph) = (P^2 h, h) = (Ph, h) = |(Ph, h)| \le ||Ph|| \; ||h||,$$

откъдето $||Ph|| \le ||h||$. Нека $S(P) = \{x : Px = x\}$. Ще покажем, че $S(P)$ е затворено подпространство. Нека $\{x_n\}_1^{\infty}$ е редица от вектори, принадлежаща на $S(P)$ и нека $x_n \to x$. Имаме

$$Px - x_n = Px - Px_n = P(x - x_n),$$

откъдето $||Px - x_n|| \le ||P|| \; ||x - x_n||$. Следователно, при $x_n \to x$ имаме също, че $x_n \to Px$, което ни дава $Px = x$.

Нека P_S е проекторът, отговарящ на $S(P)$. Ще се опитаме да покажем, че $P = P_S$. Тъй като за всяко h имаме $P_S(h), P(h) \in S(P)$, достатъчно е да покажем, че $((P - P_S)h, x) = 0$ за всяко $h \in \mathcal{H}, \quad x \in S(P)$. Имаме

$$((P - P_S)h, x) = (Ph, x) - (P_S h, x) = (h, Px) - (h, P_S x) = 0.$$

Следователно, $P = P_S$.

Да отбележим, че от свойствата (0.4) следва, че P е положителен, тоест, че

$$(Px, x) \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Наистина,

$$(Px, x) = (P^2 x, x) = (Px, Px) \geq 0.$$

Свойства на проекционните оператори

Ще докажем някои елементарни свойства на проекционните оператори.

Предложение 0.1 *Произведението на два проектора P_{G_1}, P_{G_2} е проектор точно тогава, когато те комутират, в този случай $P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_1 \cap G_2}$.*

Доказателство. Ако $P_{G_1}P_{G_2}$ е проектор, то

$$(P_{G_1}P_{G_2})^* = P_{G_2}^* P_{G_1}^* = P_{G_2}P_{G_1} = P_{G_1}P_{G_2}.$$

Обратно, ако $P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$, то първо имаме $(P_{G_1}P_{G_2})^* = P_{G_1}P_{G_2}$, а второ

$$(P_{G_1}P_{G_2})^2 = P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_1}^2 P_{G_2}^2 = P_{G_1}P_{G_2}.$$

Нека G е подпространството, върху което проектира $P_{G_1}P_{G_2}$, тоест $P_{G_1}P_{G_2} = P_G$. За всяко $h \in G$

$$h = P_G(h) = P_{G_1}P_{G_2}, \quad h = P_{G_2}PG_1, \quad h \in G_1 \cap G_2$$

и $G \subset G_1 \cap G_2$. От друга страна, ако $h \in G_1 \cap G_2$, то

$$h = P_{G_1}P_{G_2}h = P_G(h) \in G,$$

което означава, че $G_1 \cap G_2 \subset G$. Двете релации показват, че $G_1 \cap G_2 = G$.

Особено важен е следния частен случай: подпространствата G_1, G_2 са ортогонални. Тогава, $G_1 \cap G_2 = \{0\}$ и необходимото и достатъчно условие G_1 и G_2 да са ортогонални е $P_{G_1}P_{G_2} = 0$. Непосредствено обобщение на този резултат е следното твърдение

Предложение 0.2 *Сумата от проекторите*

$$S = \sum_{s=1}^{n} P_{G_s}$$

е проектор точно тогава, когато $P_{G_i}P_{G_j} = \delta_{ij}P_{G_i}$ за всеки $i, j \leq n$. В този случай $S = P_G$, където

$$G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n.$$

Доказателство. Ако G_s са две по две ортогонални, то $P_{G_i}P_{G_j} = \delta_{ij}P_{G_i}$, и лесно се вижда, че S е проектор. Това, че $S = P_G$ се проверява веднага. Обратно, ако S е проектор, то за всяко $x \in \mathcal{H}$ и всеки два индекса i, j

$$||x||^2 \geq (Sx, x) = \sum_{s=1}^{n}(P_{G_s}x, x) \geq (P_{G_i}x, x) + (P_{G_j}x, x),$$

откъдето,

$$||x||^2 \geq ||P_{G_i}x||^2 + ||P_{G_j}x||^2.$$

Да положим $x = P_{G_j}h, \quad h \in \mathcal{H}$. Получаваме

$$||P_{G_j}h||^2 \geq ||P_{G_i}P_{G_j}h||^2 + ||P_{G_j}h||^2,$$

а оттук веднага следва, че $P_{G_j}P_{G_i} = 0$.

Предложение 0.3 *Разликата на два проектора $P_{G_1} - P_{G_2}$ е проектор точно тогава, когато $G_2 \subset G_1$. В този случай*

$$P_{G_1} - P_{G_2} = P_{G_1 \ominus G_2}.$$

Доказателство. Ако $P_G = P_{G_1} - P_{G_2}$ е проектор, то $P_{G_1} = P_{G_2} + P_G$, откъдето следва, че $G_2 \oplus G = G_1$. Обратно, ако $G_2 \subset G_1$, то съществува G, такова, че $G_2 \oplus G = G_1$ и $P_{G_1} = P_{G_2} + P_G$.

Предложение 0.4 *За две подпространства G_1, G_2 условието $G_2 \subset G_1$ е еквивалентно на условието*

$$||P_{G_2}h|| \leq ||P_{G_1}h||, \quad h \in \mathcal{H}$$

и на условието $P_{G_2} \leq P_{G_1}$.

Забележка 0.4 *$P_{G_2} \leq P_{G_1}$ означава, че $P_{G_1} - P_{G_2}$ е положителен оператор.*

Доказателство. Двете неравенства са еквивалентни, защото са еквивалентни на неравенството

$$(P_{G_1}h, h) \geq (P_{G_2}h, h), \quad h \in \mathcal{H},$$

така че е достатъчно да покажем еквивалентността на едно от тях с релацията $G_2 \subset G_1$. Нека $G_2 \subset G_1$. Тогава очевидно $P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1}$ и следователно

$$||P_{G_2}h|| = ||P_{G_2}P_{G_1}h|| \leq ||P_{G_1}h||, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Обратно, нека за всяко h е изпълнено горното неравенство. Тогава от $P_{G_1}h = 0$ следва, че $P_{G_2}h = 0$, тоест от $x \in \mathcal{H} \ominus G_1$ следва $x \in \mathcal{H} \ominus G_2$. Това означава, че $\mathcal{H} \ominus G_1 \subset \mathcal{H} \ominus G_2$, и следва, че $G_2 \subset G_1$.

Редици от проекционни оператори

За проекционните оператори сходимостта, задавана от операторната норма не е удачна, защото всички проектори имат норма единица. За тях е важна така наречената силна сходимост, за която $A_n \to A$, ако за всяко $x \in \mathcal{H}$ имаме $||(A_n - A)x|| \to 0$. Пишем $A = s : \lim_{n\to\infty} A_n$.

Употребява се също и така наречената слаба сходимост: $A = w : \lim_{n\to\infty} A_n$, ако за всяко $y \in \mathcal{H}, \quad A_n y \to Ay$ в слаб смисъл, тоест за всяко $x \in \mathcal{H}$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} (A_n y, x) = (Ay, x).$$

С други думи, силната сходимост е поточковата сходимост по нормата на $\mathcal{H}$, а слабата сходимост е поточковата сходимост в смисъл на слаба топология в $\mathcal{H}$.

В сила е следната теорема:

Теорема 0.5 *Ако* $\{P_n\}_1^\infty$ *е монотонна редица от проекционни оператори, то съществува границата*

$$P = s : \lim_{n\to\infty} P_n,$$

която е също проекционен оператор.

Доказателство. Нека например $\{P_n\}_1^\infty$ е ненамаляваща: $P_{n+1} \geq P_n$. Разбира се, тази редица е ограничена, защото за всеки проектор P_G е в сила $E \geq P_G \geq 0$. Да разгледаме при $n > m$

$$||(P_n - P_m)x||^2 = ((P_n - P_m)x, x),$$

($(P_n - P_m)$ е проекционен оператор). Имаме

$$((P_n - P_m)x, x) = (P_n x, x) - (P_m x, x) = ||P_n x||^2 - ||P_m x||^2 \geq 0.$$

Числовата редица $\{||P_n x||\}_1^\infty$ е монотонно растяща и ограничена и следователно сходяща. Оттук непосредствено следва, че редицата $\{P_n x\}_1^\infty$ е фундаментална и съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} P_n x \equiv Px.$$

Не е трудно да се види, че $P : x \to Px$ е линеен оператор, а тъй като $||P_n x|| \leq ||x||$ следва, че $||Px|| \leq ||x||$, т.е. P е ограничен. Освен това, за всяко n и за произволни вектори x, y

$$(P_n x, P_n y) = (P_n x, y) = (x, P_n y),$$

откъдето чрез граничен преход получаваме

$$(Px, Py) = (Px, y) = (x, Py),$$

което означава, че P е проектор.

С аналогични разсъждения се доказва следната теорема

Теорема 0.6 *Всяка монотонна ограничена редица* $\{A_n\}_1^\infty$ *от ограничени положителни оператори е силно сходяща към ограничен оператор.*

Доказателство. Нека $A_{k+1} \geq A_k \geq 0, \quad A_k \leq C$. Тогава, при $n > m$

$$|((A_n - A_m)x, y)| \leq ((A_n - A_m)x, x)^{\frac{1}{2}}((A_n - A_m)y, y)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (Cx, x)^{-\frac{1}{2}}((A_n - A_m)y, y)^{\frac{1}{2}} \leq ||C||\,||x||((A_n - A_m)y, y)^{\frac{1}{2}}.$$

Да положим $y = (A_n - A_m)x$. Имаме

$$||(A_n - A_m)y|| \leq ||C|| \left((A_n y, y)^{\frac{1}{2}} - (A_m y, y)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тъй като $\{(A_n y, y)^{\frac{1}{2}}\}_1^\infty$ монотонно расте и е ограничена, то тя е сходяща, откъдето следва, че редицата $\{A_n y\}_1^\infty$ е фундаментална и съществува

$$\lim_{n\to\infty} A_n y \equiv Ay.$$

Операторът A е ограничен като следствие от теоремата на Банах-Щайнхаус. Наистина, $\{A_n y\}_1^\infty$ е сходяща, а значи $||A_n y|| \leq M_y$. Оттук следва, че за всяко n имаме $||A_n|| < M$, където M е някаква константа. Седователно,

$$||A_n x|| \leq ||A_n||\,||x|| < M||x||$$

и след граничен преход получаваме $||Ax||| \leq M||x||$, тоест A е ограничен.

Следствие 0.2 *Всяка монотонна ограничена редица* $\{A_n\}_1^\infty$

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq C$$

от ограничени оператори е силно сходяща към ограничен оператор.

Действително, достатъчно е да положим $B_n = C - A_n$ за да сведем нещата до предишния случай, когато операторите A_n бяха положителни.

62. Преобразование на Фурие–унитарен оператор в $L^2(-\infty,\infty)$.

Основната цел тук е доказателството на следната класическа

Теорема на Фурие. Нека разгледаме оператора на Фурие

$$(\mathcal{F}g)(t) = h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-its}\,ds, \quad g(t)\in L^2(-\infty,\infty). \tag{62.1}$$

Тогава обратния оператор се дава с формулата

$$g(t) = (\mathcal{F}^{-1}h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{its}\,ds, \tag{62.2}$$

при това е в сила равенството на Фурие–Маншерел

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt. \tag{62.3}$$

По точно оператора на Фурие се определя по следния начин. Нека $g(t)$ е произволна функция от L^2 и нека

$$g_N(t) = \begin{cases} g(t) & (-N\le t\le N) \\ 0 & (|t|>N) \end{cases}. \tag{62.3a}$$

Следователно $g_N(t)$ е абсолютно интегруема. Тук можем да приложим директно (62.1):

$$(\mathcal{F}g_N)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g_N(s)e^{-its}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} g(s)e^{-its}\,ds. \tag{62.3b}$$

От унитарността на $\mathcal{F}$ следва ограничеността и следователно

$$\lim_{N\to\infty}\|\mathcal{F}g-\mathcal{F}g_N\| = 0 \tag{62.3c}$$

или

$$(\mathcal{F}g)(t) = h(t) = \text{l.i.m.}_{N\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N} g(s)e^{-its}\,ds,, \tag{62.3d}$$

което може да се приеме за определение на оператора на Фурие в L^2.

Доказателството на теоремата на Фурие ще проведем по следната схема. Отначало ще докажем, че оператора определен чрез (62.1) върху множество от функции $L\subset L^2$, което е плътно в L^2, не изменя нормата, при това образа на L е множество плътно в L^2. След това ще разширим по непрекъснатост в L^2 и по този начин ще получим оператора (62.3d). За да завършим доказателството следва да покажем още, че обратният оператор се получава, заменяйки i с $-i$.

За тази цел ще използваме функциите на Чебишев–Ермит

$$\varphi_k(t) = (-1)^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} = H_k(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad k=0,1,\dots, \tag{62.4}$$

където $H_k(t)$ са полиноми от степен k. Имаме съотношенията на ортогоналност

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ 2^m m!\sqrt{\pi} & (k = m) \end{cases}. \tag{62.5}$$

Нека разгледаме навсякъде плътното в $L^2 = L^2(-\infty, \infty)$ множество от всички функции от вида

$$f(t) = P(t)e^{-\frac{t^2}{2}}, \tag{62.6}$$

където $P(t)$ пробягва съвкупността от всички полиноми. Нека напомним, че всяка функция от вида (62.6) може да бъде представена във вида:

$$f(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + \alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(t). \tag{62.7}$$

От (62.5) имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n} 2^k k! |\alpha_k|^2. \tag{62.8}$$

Сега нека приложим към $f(t)$ оператора $\mathcal{F}$. За тази цел ще се възползваме от следното съотношение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}}\frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\,ds = i^k e^{\frac{t^2}{2}}\frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{62.9}$$

Оттук имаме

$$\mathcal{F}\varphi_k = (-i)^k\varphi_k \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{62.10}$$

Следователно

$$h(t) \equiv (\mathcal{F}f)(t) = \alpha_0\varphi_0(t) + (-i)^1\alpha_1\varphi_1(t) + \ldots + (-i)^n\alpha_n\varphi_n(t). \tag{62.11}$$

и значи

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\,dt. \tag{62.12}$$

Оттук следва, че оператора $\mathcal{F}$ не изменя нормата на елементите от вида (62.7), което е навсякъде плътно в L^2. Сравнявайки (62.7) с (62.11) виждаме, че за да получим от оператора $\mathcal{F}$ оператора $\mathcal{F}^{-1}$ следва да заменим i на $-i$. Ще докажем (62.9):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist}(-1)^k e^{\frac{s^2}{2}}\frac{d^k e^{-s^2}}{ds^k}\,ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}\left(e^{-ist+\frac{s^2}{2}}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2}\frac{d^k}{ds^k}\left(e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\right)ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} i^k e^{-s^2}\frac{d^k}{dt^k}\left(e^{\frac{(s-it)^2}{2}}\right)ds =$$

$$= \frac{i^k}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k}{dt^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} - ist}\, ds = i^k e^{\frac{t^2}{2}} \frac{d^k e^{-t^2}}{dt^k} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{62.13}$$

Накрая използвахме известното равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} e^{-ist}\, ds = e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{62.14}$$

Допълнение 1. Пълнота на функциите на Чебишев –Ермит в $L^2(-\infty, \infty)$

Ще докажем следната

Теорема Ако за функция $f(t) \in L^2$ имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_k(t)\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{62.15}$$

то $f(t) \equiv 0$.

Доказателство От (62.4) следва, че равенствата (62.15) са еквивалентни на равенствата

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k f(t) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{62.16}$$

Нека разгледаме функцията

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}\, dt, \tag{62.17}$$

която, очевидно, е определена и непрекъсната за всяко (крайно) комплексно z. При това функцията $F(z)$ има за всяко z крайна производна

$$F'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} it f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itz}\, dt. \tag{62.18}$$

Следователно $F(z)$ е холоморфна функция в $\mathbb{C}$. От (62.17) получаваме

$$F^{(k)}(0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (it)^k f(t) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{62.19}$$

т.е. $F(z) \equiv 0$. Оттук имаме

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2}} e^{itx}\, dt = 0, \quad (-\infty < x < \infty). \tag{62.20}$$

Сега остава да се възползваме от следния известен факт: Ако $g(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ (в нашия случай $g(t) = f(t)e^{-\frac{t^2}{2}}$) и ако за всички $x \in (-\infty, \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{itx}\, dt = 0, \tag{62.21}$$

то $g(t) = 0$ почти навсякъде. Теоремата е доказана.

Допълнение 2. Унитарна еквивалентност на операторите на умножение и диференциране.

Нека, както обикновено, в пространството $\mathcal{H} = L^2(-\infty, \infty)$, където скаларното произведение

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g}(x)\, dx, \tag{62.22}$$

дефинираме оператора на умножение Q на независимата променлива посредством равенството

$$Q\varphi = x\varphi(x). \tag{62.23}$$

Тук дефиниционната област D_Q се състои от функциите $\varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, за които $xv\varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Операторът на диференциране P ще определим по формулата

$$P = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}, \quad P\psi = \frac{1}{i}\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{1}{i}\psi'(x), \tag{62.24}$$

където дефиниционната област D_P се състои от абсолютно -непрекъснатите функции $\varphi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ такива, че $x\psi(x) \in L^2(-\infty, \infty)$.

Нека напомним, че така определените оператори са самоспрегнати в пространството $L^2(-\infty, \infty)$. Тук ще докажем следната теорема.

Теорема за унитарна еквивалентност на операторите Q и P. Нека операторите $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ са дефинирани както в (62.1-2), а Q и P както в (62.23-24). Тогава

$$Q = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1} \Longleftrightarrow P = \mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F}. \tag{62.25}$$

Доказателство. Имаме

$$Pg(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} sh(s)e^{its}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (Qh)(s)e^{its}\, ds = \mathcal{F}^{-1}Qh(t) = \mathcal{F}^{-1}Q\mathcal{F}g(t),$$

с което доказахме второто равенство в (62.25). Първото е следствие на второто. Може и директно да проверим, че:

$$Qh(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} tg(s)e^{-its}\, ds = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g'(s)e^{-its}\, ds =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\frac{d}{ds}g(s)\right) e^{-its}\, ds = \mathcal{F}P\mathcal{F}^{-1}h(t).$$

65. Класическата формула за ред на Фурие като задача за собствени значения за оператора $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(\pi) = 0$. Доказателство чрез метода на контурното интегриране. Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

Основният резултат тук е доказателството на класическата формула за развитие в ред на Фурие на произволна функция $f(x) \in L^2(0,\pi)$, където както обикновено

$$L^2(0,\pi): \quad (f,g) = \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx \quad \|f\| = (f,f)^{1/2}. \tag{65.1}$$

Приведеният тук извод е удобен с оглед обобщаването му за регулярния оператор на Щурм-Лиувил, което ще направим в следващия параграф. Имаме следната

Основна теорема- Теорема на Фурие. Нека

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \quad n = 1,2,\dots, \quad (\varphi_n,\varphi_m) = \delta_{nm}. \tag{65.2}$$

Тогава
а. За всяка два пъти диференцируема функция $f(x) \in C^2[0,\pi]$ такава, че $f(0) = f(\pi) = 0$ е справедливо разлагането

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n\varphi_n(x), \quad c_n = (f,\varphi_n), \tag{65.3}$$

където редът е равномерно и абсолютно сходящ при $0 \le x \le \pi$.
б. Ако $f(x) \in L^2(0,\pi)$ в разлагането (65.3) сходимостта е по нормата на $L^2(0,\pi)$:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \sum_{n=1}^N c_n\varphi_n\|_{L^2} = 0. \tag{65.4}$$

Нека отбележим, че разлагането (65.4) е еквивалентно на равенството

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty c_n^2, \tag{65.4a}$$

което се нарича равенство на Парсевал.

Преди да докажем тази теорема ще приведем една лема.

Лема 1. Нека от комплексната равнина $\mathbf{C}$ извадим кръгчетата $C_\rho(n) : |z-n| < \rho,\ \rho < 1/2$. Тогава в областта $Z_\rho = \mathbf{C} \setminus \cup_n C_\rho(n)$ е справедлива следната оценка

$$|\sin\pi z| \ge K_\rho \exp(|\mathrm{Im}\, z|\pi), \quad z \in Z_\rho, \tag{65.5}$$

където K_ρ е положителна константа.

Доказателство. Отначало ще отбележим, че функцията

$$f(z) = |\sin\pi z|^{-1}\exp|\mathrm{Im} z\pi|$$

е четна и периодична с период 2 $(\exp|\mathrm{Im}z\pi| = \exp|\mathrm{Im}(z+2)\pi|,\ \sin\pi z = \sin\pi(z+2))$. Следователно за да докажем лемата е достатъчно да установим, че константата

$$K_\rho = \sup_{z\in Z_\rho} |\sin\pi z|^{-1}\exp|\mathrm{Im}z\pi| = \sup_{z\in Z_\rho\bigcap\Pi_+} |\sin\pi z|^{-1}\exp|\mathrm{Im}z\pi| =$$

$$\sup_{z\in Z_\rho\bigcap\Pi_+} |(\sin\pi z)^{-1}\exp(-iz\pi)| < \infty,$$

където Π_+ е ивицата $0\le x\le\pi$, $y\ge 0$. Функцията

$$\varphi(z) = (\sin\pi z)^{-1}\exp(-iz\pi)$$

е аналитична в областта $Z_\rho\bigcap\Pi_+$, непрекъсната на границата ѝ. По-нататък имаме, че равномерно по $0\le x\le\pi$ при $y\to\infty$ съществува границата

$$\lim_{y\to infty}\varphi(z) = -2i, \quad 0\le x\le 2.$$

От тук по теоремата за максимума на модула получаваме исканата оценка $K_\rho < \infty$. □

Нека разгледаме граничната задача, определена от уравнението

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0\le x\le\pi \quad (\lambda = k^2) \tag{65.6}$$

и граничните условия

$$y(0) = y(\pi) = 0. \tag{65.7}$$

Общото решение на (65.6) е

$$y(x,k) = A\frac{\sin kx}{k} + B\cos kx. \tag{65.8}$$

Сега да определим тези k_n, за които са изпълнени условията (65.7). От първото условие в (65.7) получаваме $B = 0$, тогава второто води до уравнението $\sin k\pi = 0$. Решенията на това уравнение са $k_n = n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Следователно собствените числа и съответните собствени функции са:

$$\lambda_n = n^2, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \quad n = 1,2,\ldots, \quad (\|\varphi_n\|_{L^2} = 1). \tag{65.9}$$

Нека построим функцията на Гриин

$$\Gamma(x,t,k) = \frac{1}{k\sin k\pi}\begin{cases} \sin kx\sin k(t-\pi), & x\le t\le\pi, \\ \sin k(x-\pi)\sin kt, & 0\le t\le x \end{cases} \tag{65.10}$$

където функцията $f(x)\in C^2[0,\pi]$ и удовлетворява условията $f(0) = f(\pi) = 0$. Да разгледаме функцията

$$F(f;x,k) = \int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f(t)\,dt =$$

$$\frac{\sin k(x-\pi)}{k\sin k\pi}\int_0^x \sin kt f(t)\,dt + \frac{\sin kx}{k\sin k\pi}\int_x^\pi \sin k(t-\pi)f(t)\,dt = I_1 + I_2. \tag{65.11}$$

Нека отбележим, че функцията $F(f;x,k)$, $\lambda \neq n^2$ удовлетворява нееднородната гранична задача

$$F'' + \lambda F = f(x), \quad F(0) = F(\pi) = 0. \tag{65.12}$$

Интегрирайки два пъти по части в (65.11) получаваме

$$F(f;x,k) = \int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f(t)\,dt = \frac{f(x)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f''(t)\,dt. \tag{65.13}$$

Нека положим

$$\frac{1}{k}\int_0^\pi \Gamma(x,t,k)f''(t)\,dt =$$

$$\frac{\sin k(x-\pi)}{k^2\sin k\pi}\int_0^x \sin kt f''(t)\,dt + \frac{\sin kx}{k^2\sin k\pi}\int_x^\pi \sin k(t-\pi)f''(t)\,dt = I_1 + I_2. \tag{65.14}$$

Нека $C_N : k = (N+1/2)e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ е окръжност с радиус $N + 1/2$ и нека разгледаме контурния интеграл

$$I_N(f;x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_N} F(f;x,k)k\,dk. \tag{65.15}$$

Доказателството на формулата за разлагане ще получим отначало за функции $f(x) \in C^2[0,\pi]$, удовлетворяващи условията $f(0) = f(\pi) = 0$. С помощта на лема 1 ще покажем, че

$$\lim_{N\to\infty} I_N(f;x) = f(x). \tag{65.16}$$

След това по теоремата за резидуумите получаваме

$$I_N(f;x) = \sum_{n=-N}^{N} \operatorname{Res} kF(f;x,k)|_{k=n}$$

$$\sum_{n=-N}^{N} \frac{\sin nx}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt = \sum_{n=1}^{N}\frac{2}{\pi}\sin nx\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt. \tag{65.17}$$

Сравнявайки (65.16) с (65.17) при $N \to \infty$ получаваме (65.3) за указания клас от функции. Ще получим отначало (65.17). Тъй като полюсите на функцията $kF(f;x,k)$ се определят от нулите на $\sin k\pi$, то за резидуума в $k = n$ имаме

$$\operatorname{Res} kF(f;x,k)|_{k=n} = \frac{1}{\pi\cos n\pi}\left[\int_x^\pi \sin n(t-\pi)f(t)\,dt + \sin n(x-\pi)\int_0^x \sin nt f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{\sin nx}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt. \tag{65.18}$$

Нека $k \in C_N$, тогава от (65.5), отчитайки

$$|\sin kx| \leq \exp(|\operatorname{Im} k|x), \quad k \in \mathbb{C},\ 0 \leq x \leq \pi \tag{65.19}$$

получаваме

$$|I_1| \leq K_\rho^{-1} \frac{1}{|k|^2} e^{-|\operatorname{Im} k|\pi} e^{|\operatorname{Im} k|(\pi-x)} \int_0^x |f''(t)| e^{-|\operatorname{Im} k|t}\, dt \leq C_\rho \frac{1}{|k|^2} \quad k \in C_N \tag{65.20}$$

където $C_\rho = K_\rho^{-1} \int_0^\pi |f''(t)|\, dt$. Оттук и аналогичната оценка за $|I_2|$ имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{1}{k} \left(\int_0^\pi \Gamma(x,t,k) f''(t)\, dt \right) dk = O(\frac{1}{N}). \tag{65.21}$$

което дава (65.16), като вземем предвид, че

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_N} \frac{dk}{k} = 1. \tag{65.22}$$

Равномерната и абсолютна сходимост на реда (65.3) следва от равенствата

$$\int_0^\pi f(t) \sin nt\, dt = \frac{-1}{n^2} \int_0^\pi f''(t) \sin nt\, dt. \tag{65.23}$$

Твърдението (б) следва непосредствено от следващата теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

в.Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$.

Нека в пространството $L^2(0,\pi)$ е дадена пълна ортонормирана система

$$v_n(x),\ (v_n,v_m)=\delta_{nm} \quad n,m=1,2,\dots. \tag{65.24}$$

Имаме равенството

$$\|f-\sum_{n=1}^{\infty}a_nv_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2. \tag{65.25}$$

Дясната част на това равенство

$$\int_0^\pi f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2, \quad a_n=\int_0^\pi f(x)v_n(x)\,dx. \tag{65.26}$$

се нарича равенство на Парсевал, а лявата - формула за разлагане по системата v_n. Сега ще покажем, че е в сила следната

Теорема за попълване по норма в $L^2(0,\pi)$ Ако равенството на Парсевал е справедливо за гладки (диференцируеми) функции $f(x)\in C^2[0,\pi]$, $f(0)=f(\pi)=0$, то същото е в сила и за всяка функция $f(x)\in L^2(0,\pi)$.

Доказателство Действително, нека $f(x)\in L^2(0,\pi)$ и нека $f_k(x)$ е редица от гладки функции, които клонят към f по нормата на L^2, т.е.

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^2}=0. \tag{65.27}$$

От (65.26) имаме

$$\int_0^\pi\{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n^{(k)}-a_n^{l)}\}^2, \quad a_n^{(k)}=\int_0^\pi f_k(x)v_n(x)\,dx. \tag{65.28}$$

От (65.26) имаме, че при $k,l\to\infty$ лявата страна на (65.28) клони към нула , а следователно, и дясната. От неравенството на Коши–Буняковски следва, че

$$|a_n-a_n^{(l)}|\le\left\{\int_0^\pi\{f(x)-f_l(x)\}^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{65.29}$$

т.е. за всяко фиксирано $n=1,2,\dots$ съществува границата

$$\lim_{k\to\infty}a_n^{(k)}=a_n. \tag{65.30}$$

От (65.28) имаме при фиксирано N

$$\sum_{n=1}^{N}\{a_n^{(k)}-a_n^{(l)}\}^2\le\int_0^\pi\{f_k(x)-f_l(x)\}^2\,dx. \tag{65.31}$$

Оттук при $k\to\infty$, отчитайки (65.30), получаваме

$$\sum_{n=1}^{N}\{a_n-a_n^{(l)}\}^2\le\int_0^\pi\{f(x)-f_l(x)\}^2\,dx. \tag{65.32}$$

Тъй като дясната страна не зависи от N, то при $N \to \infty$ имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n - a_n^{(l)}\}^2 \leq \int_0^{\pi} \{f(x) - f_l(x)\}^2\, dx, \tag{65.33}$$

откъдето, в частност, следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ е сходящ. По - нататък имаме

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2}| = |\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_n^{(l)})(a_n + a_n^{(l)})| \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - a_n^{(l)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + a_n^{(l)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{65.34}$$

Така получихме, че

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \tag{65.35}$$

За да завършим доказателството остава да забележим, че от сходимостта в (65.27) следва, че

$$\lim_{l\to\infty} \|f_l\|^2 \equiv \int_0^{\pi} f_l^2(x)\, dx = \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx \tag{65.36}$$

и следователно в равенството на Парсевал

$$\int_0^{\pi} f_l^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(l)^2} \tag{65.37}$$

можем да извършим граничен преход $l \to \infty$, с което доказахме (65.26) за всяка функция $f(x) \in L^2(0, \pi)$. Теоремата е доказана.

66. Регулярен оператор на Щурм - Лиувил.

В този и следващите два параграфа ще изложим основните въпроси, свързани със спектралната теория за регулярния оператор на Щурм - Лиувил,които наред с многочислените приложения в различни задачи от математическата физика може да служи и като въведение в общата спектрална теория на самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство.

Нека означим както обикновенно чрез $L^2(0,\pi)$ пространството на квадратично - сумируемите функции, със скаларно произведение

$$(f,g) = \int_0^\pi f(x)\overline{g}(x)\,dx, \quad \|f\| = (f,f)^{\frac{1}{2}}. \tag{66.1}$$

Централно място тук ще играе линейния оператор

$$L = -D^2 + q(x), \tag{66.2}$$

където $q(x)$ е реална, непрекъсната функция в интервала $[0,\pi]$. По -точно тук ще разглеждаме задачата за намиране решенията на уравнението

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{66.3}$$

удовлетворяващи граничните условия

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,\; y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0. \tag{66.4}$$

Тази задача се нарича задача на Щурм - Лиувил. Ще отбележим, че важно място в приложенията играе и периодичната (антипериодичната) задача, която се определя от уравнението (66.3) и граничните условия

$$y(0) = y(\pi),\, y'(0) = y'(\pi), \quad y(0) = -y(\pi),\, y'(0) = -y'(\pi), \tag{66.5}$$

която тук няма да изследваме.

Забележка. Към вида (66.3) се свежда по-общото уравнение

$$y'' + p(x)y' + \{l(x) + \lambda r(x)\}y = 0, \tag{66.6}$$

където функцията $r(x)$ е положителна в интервала $[0,\pi]$. Действително, ако $p(x)$ има непрекъсната първа производна, а $r(x)$ - непрекъсната втора производна, то уравнението (66.6) се свежда към каноничния вид

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \{\lambda + q(\xi)\}\eta = 0 \tag{66.7}$$

посредством *смяната на Лиувил*

$$\xi = \int_0^x \sqrt{r(t)}\,dt, \quad \eta(\xi) = \Phi(x)y(x), \quad \Phi(x) = \sqrt[4]{r(x)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^x p(t)\,dt\right), \tag{66.8}$$

при това граничните условия (66.4) не изменят вида си. Нека отбележим още, че разглеждането на оператора L върху интервала $[0, \pi]$ не е ограничение, тъй като смяната $t = \frac{x-a}{b-a}\pi$ преобразува интервала $[a, b]$ в интервала $[0, \pi]$, при което не се изменя вида на граничната задача (66.3-4).

Ако при някое λ_1 граничната задача (66.3-4) има нетривиално решение $y(x, \lambda_1) \neq 0$, то числото λ_1 се нарича *собствено число*, а съответното решение $y(x, \lambda_1)$ - *собствена функция* на граничната задача (66.3-4).

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати, два пъти диференцируеми функции. Интегрирайки два пъти по части, получаваме тъждеството

$$\int_0^\pi (Lf)(x)\overline{g}(x)\,dx = W(f,\overline{g})(0) - W(f,\overline{g})(\pi) + \int_0^\pi f(x)\overline{Lg}(x)\,dx, \tag{66.9}$$

където Вронскиана

$$W(f,g)(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x). \tag{66.10}$$

Нека $f = y(x, \lambda_1)$ и $g = y(x, \lambda_2)$ са собствени функции, отговарящи на собствените числа λ_1, λ_2. От граничните условия (66.4) следва, че $W(f, \bar{g})(\pi) = Wf, \bar{g})(0) = 0$. Оттук, вследствие на (66.9), получаваме

$$(\lambda_1 - \overline{\lambda}_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)\overline{y(x,\lambda_2)}\,dx \quad (Ly(x,\lambda_j) = \lambda_j y(x,\lambda_j), j = 1, 2.) \tag{66.11}$$

Оттук имаме следната лема.

Лема 1. Собствените значения на граничната задача (66.3-4) са реални, при това собствените функции $y(x, \lambda_1)$ и $y(x, \lambda_2)$, отговарящи на различни собствени числа са ортогонални, т.е.

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y(x,\lambda_1)\overline{y(x,\lambda_2)}\,dx = 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{66.12}$$

Забележка. Твърденията в тази лема са добре известни свойства на самоспрегнатите оператори в хилбертово пространство.

Доказателство. Нека $\lambda_1 = u + iv$ е комплексно собствено число. Тъй като функцията $q(x)$ е реална, а също α и β са реални числа, то числото $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = u - iv$ също е собствено значение със съответна собствена функция $\bar{y}(x, \lambda_2)$. В този случай равенството (66.11) дава

$$2iv\int_0^\pi |y(x,\lambda)|^2\,dx = 0, \tag{66.13}$$

т.е. $\operatorname{Im}\lambda \equiv v = 0$. Оттук (22.12) следва директно от (22.11), с което лемата е доказана.

67. Съществуване и асимптотики на собствените числа и собствените функции.

1. Нека положим $\mathrm{cotg}\alpha = -h, \ \mathrm{cotg}\beta = H$, където предполагаме, че h и H са крайни. Тогава граничните условия (66.4) се записват във вида

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{67.1}$$

(Ако числото $h(H) = \infty$, съответното гранично условие става $y(0) = 0(y(\pi) = 0)$.) Нека означим с $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ решенията на уравнението (66.3), удовлетворяващи началните условия

$$\varphi(x, \lambda) : \varphi(0, \lambda) = 1, \ \varphi'(0, \lambda) = h \tag{67.4}$$

и

$$\psi(x, \lambda) : \psi(\pi, \lambda) = 1, \ \psi'(\pi, \lambda) = -H. \tag{67.5}$$

в. **Теорема (Неравенство на Белман- Гронуол)** Нека $h(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни функции $0 \le x \le X$, при това $h(x)$ е непрекъсната и $g(x)$ интегруема. Тогава, ако

$$h(x) \le C + \int_0^x g(t)h(t)\, dt, \quad 0 \le x \le X, \tag{67.6}$$

то

$$h(x) \le C \exp(\int_0^x g(t)\, dt). \tag{67.7}$$

Доказателство. Полагаме

$$y(x) = \int_0^x g(t)h(t)\, dt. \tag{67.8}$$

От (67.6) получаваме

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(x) \le Cg(x) + g(x)y(x). \tag{67.9}$$

Отчитайки

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)e^{-\int_0^x g(t)\, dt}\right\} = y'(x)e^{-\int_0^x g(t)\, dt} - y(x)g(x)e^{-\int_0^x g(t)\, dt}, \tag{67.10}$$

получаваме, че (67.9) можем да запишем във вида

$$\frac{d}{dx}\left\{y(x)e^{-\int_0^x g(t)\, dt}\right\} \le Cg(x)e^{-\int_0^x g(t)\, dt}. \tag{67.11}$$

Интегрирайки от 0 до x получаваме

$$y(x) \le Ce^{\int_0^x g(t)\, dt} - C, \tag{67.12}$$

което заедно с (67.6) дава

$$h(x) \le y(x) + C \le Ce^{\int_0^x g(t)\, dt}, \tag{67.13}$$

което и трябваше да докажем.

Теорема 1. а. Решенията $\varphi(x,\lambda)$ и $\psi(x,\lambda)$ са цели функции на λ за всяко $x \in [0,\pi]$.

б. Съществува k_0 такова, че при $|k| \geq |k_0|$ имаме оценките

$$\varphi(x,k) = O(e^{|\tau|x}), \quad \psi(x,k) = O(e^{|\tau|(\pi-x)|})\tau = \mathrm{Im}k,\ k^2 = \lambda \tag{67.14}$$

и равномерно по $x \in [0,\pi]$ са справедливи асимптотиките

$$\varphi(x,k) = \cos kx + O(\frac{e^{|\tau|x}}{|k|}), \tag{67.15}$$

$$\psi(x,k) = \cos k(x-\pi) + O(\frac{e^{|\tau|(\pi-x)}}{|k|}). \tag{67.15a}$$

в. Имаме оценките

$$\varphi'(x,k) = -k\sin kx + O(e^{|\tau|x}), \tag{67.15b}$$

$$\psi'(x,k) = -k\sin k(x-\pi) + O(e^{|\tau|(\pi-x)}). \tag{67.15c}$$

Доказателство. Отначало ще докажем твърденията (б) и (в). Имаме интегралното уравнение

$$\varphi(x,k) = \cos kx + h\frac{\sin kx}{k} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)\varphi(t,k)\,dt. \tag{67.16}$$

Полагаме

$$\varphi(x,k) = e^{|\tau|x} f(x). \tag{67.17}$$

От (67.16) получаваме

$$f(x) = \{\cos kx + h\frac{\sin kx}{k}\}e^{-|\tau|x} + \int_0^x \frac{\sin k(x-t)}{k} e^{-|\tau|(x-t)} q(t) f(t)\,dt. \tag{67.18}$$

Полагаме

$$\mu = \max_{0\leq x\leq\pi}|f(x)|, \tag{67.19}$$

тъй като $|\sin kx|, |\cos kx| \leq \exp(|\tau|x)$, $x \geq 0$, то

$$\mu \leq 1 + \frac{|h|}{|k|} + \frac{\mu}{|k|}\int_0^x |q(t)|\,dt, \tag{67.20}$$

т.е.

$$\mu \leq (1 + \frac{|h|}{|k|})(1 - \frac{1}{|k|}\int_0^x |q(t)|\,dt)^{-1} \tag{67.21}$$

при $|k| > \int_0^\pi |q(t)|\,dt$, с което получаваме оценката (67.14), оценката (67.15) е директно следствие от (67.14) и уравнението (67.16). Диференцирайки по x уравнението (67.16) и изплзвайки оценката (67.15) получаваме (67.15а). Формулираните свойства на решението ψ се получават аналогично, изхождайки от уравнението

$$\psi(x,k) = \cos k(x-\pi) - H\frac{\sin k(x-\pi)}{k} + \int_x^\pi \frac{\sin k(t-x)}{k} q(t)\psi(t,k)\,dt. \tag{67.21a}$$

Ще напомним как се получава теоремата за съществуване на решението $\varphi(x,k)$, което е цяла функция на $k\in\mathbb{C}$, т.е. първото твърдение на лема 1. За целта ще използваме *метода на последователните приближения.* Нека положим

$$\varphi_0(x)=\cos kx+h\frac{\sin kx}{k}, \tag{67.23}$$

и при $n=1,2,\dots$

$$\varphi_n(x)=\varphi_0(x)+\int_0^x\frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\varphi_{n-1}(t)\,dt. \tag{67.24}$$

Нека $x\in[0,\pi]$, а k се мени в крайна област, тогава

$$|\sin k(x-t)/k|\le C,\quad |\varphi_0(x)|\le M. \tag{67.25}$$

Следователно

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\le CM\int_0^x|q(t)|\,dt=CMj(x). \tag{67.26}$$

По индукция получаваме, че ако

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)|\le\frac{C^nMj^n(x)}{n!}, \tag{67.27}$$

то

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|=|\int_0^x\frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\{\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)\,dt\,|\le$$

$$\frac{C^{n+1}M}{n!}\int_0^x|q(t)|j^n(t)\,dt=\frac{C^{n+1}M}{n!}\int_0^x j'(t)j^n(t)\,dt=\frac{C^{n+1}Mj^{n+1}(x)}{(n+1)!}. \tag{67.28}$$

Следователно итерационния процес е сходящ, при това граничната функция

$$\varphi(x,\lambda)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \tag{67.29}$$

е решение на уравнението (67.16), удовлетворява началните условия (67.4) и е цяла функция на $\lambda=k^2$. (За последното да напомним теоремата на Вайерщрас за равномерно сходящи редици от аналитични функции, като критерий за равномерна сходимост е мажорирането (67.27).) Теоремата е доказана.

68. Регулярен оператор на Щурм-Лиувил $L = -D^2+q(x)$.(Продължение)

Характеристичната функция даваме с израза

$$\omega(\lambda) = W(\psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)) \tag{68.2}$$

Ще докажем следната проста лема.
Лема 1. λ_n е собствено число тогава и само тогава, когато

$$\omega(\lambda_n) = 0. \tag{68.3}$$

При това

$$\|\varphi(\lambda_n)\|^2 = -\varphi(\pi,\lambda_n)\dot{\omega}(\lambda_n), \tag{68.4}$$

откъдето, в частност, следва, че собствените числа са прости нули на $\omega(\lambda)$, т.е.

$$,\dot{\omega}(\lambda_n) \neq 0. \tag{68.5}$$

Доказателство Нека $\varphi(x,\lambda_n) = C_n\psi(x,\lambda_n)$, тогава $\omega(\lambda_n) = 0$ и обратно, ако $\omega(\lambda_n) = 0$ то $\varphi(x,\lambda_n) = C_n\psi(x,\lambda_n)$. От уравнението (49.1) имаме тъждеството

$$-\frac{d}{dx}W(y(x,\lambda), z(x,\mu)) = (\lambda-\mu)y(x,\lambda)z(x,\mu). \tag{68.6}$$

Нека положим $\lambda = \lambda_n$, $y = \varphi(x,\lambda_n)$, $z = \varphi(x,\mu)$. Интегрирайки от 0 до π така полученото равенство имаме

$$\frac{\varphi(\pi,\lambda_n)(\varphi'(\pi,\mu)+H\varphi(\pi,\mu))}{\lambda_n-\mu} = -\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\mu)\,dx, \tag{68.7}$$

където отчетохме, че $W(\varphi(0,\lambda_n),\varphi(0,\mu)) = 0$ и $\varphi'(\pi,\lambda_n) = -H\varphi(\pi,\lambda_n)$. Последното равенство можем да запишем във вида

$$\frac{\varphi(\pi,\lambda_n)(\omega(\mu)-\omega(\lambda_n))}{\lambda_n-\mu} = (\varphi(\lambda_n),\varphi(\mu)). \tag{68.8}$$

Устремявайки $\mu \to \lambda_n$ получаваме исканото равенство (68.4). За да покажем (24.5) нека допуснем, че $\varphi(\pi,\lambda_n) = 0$. Тогава от $\omega(\lambda_n) = 0$ следва, че и $\varphi'(\pi,\lambda_n) = 0$, т.е. $\varphi(x,\lambda_n) \equiv 0$, което противоречи на началните условия (49.4). Лемата е доказана.

Съществуване на собствени значения и техния брой.

Нека напомним, че при реални $\lambda \to \infty$, $\lambda = k^2$ имаме асимптотиките :

$$\varphi(x,k) = \cos kx + O(\frac{1}{k}), \quad \varphi'(x,k) = \sin kx + O(1).$$

69. а. Функция на Гриин за задачата на Щурм-Лиувил.
Нека

$$G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{cases} \varphi(x,\lambda)\phi(t,\lambda), & x \le t \le \pi, \\ \phi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda), & 0 \le t \le x \end{cases}$$

и нека

$$F(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda) f(t)\, dt, \quad f \in L^2[0,\,\pi].$$

Да се докаже, че функцията $y = F(x,\lambda)$, $(\lambda \neq \lambda_n)$ е решение на нееднородната задача

$$y'' + (\lambda - q(x))y = f(x),\, 0 \le x \le \pi, \tag{8}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0,\, y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{9}$$

при това за всяка функция $f(x) \in C^2[0,\,\pi]$, удовлетворяваща граничните условия (9), имаме равенството

$$\int_0^\pi G(x,t,\lambda)(L-\lambda)f(t)\, dt = f(x). \quad (L = -D^2 + q(t)) \tag{10}$$

б. Формула за разлагане по собствени функции:

$$\lim_{N\to\infty} \|f - \Sigma_{n=0}^N c_n u_n\|_{L^2} = 0, \tag{11}$$

където $c_n = (f, u_n)$, $u_n(x) = \varphi_n(x)\|\varphi_n\|_{L^2}^{-1}$, $f(x) \in L^2[0,\pi]$. Доказателство чрез метод на контурното интегриране.
Равенство на Парсевал:

$$\|f - \Sigma_{n=0}^\infty c_n u_n\|_{L^2} = 0 \Leftrightarrow \|f\|^2 = \Sigma_{n=0}^\infty |c_n|^2. \tag{12}$$

в. Понятие за интеграл на Стилтес. Спектрална функция $\rho(\lambda) = \Sigma_{\lambda_n \le \lambda} \|\varphi_n\|_{L^2}^{-2}$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,\lambda)\Phi(\lambda)\, d\rho(\lambda), \quad \Phi(\lambda) = (f, \varphi(\lambda)). \tag{13}$$

70. а. Периодични задачи, свързани с оператора на Щурм-Лиувил.

В този параграф ще разгледаме спектралните задачи, определяни от уравнението

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{70.1}$$

и граничните условия

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi), \tag{70.2}$$

а също и граничните условия

$$y(0) = -y(\pi), \quad y'(0) = -y'(\pi). \tag{70.3}$$

Първата задача се нарича задача на Щурм-Лиувил с периодични гранични условия, а втората - с антипериодични гранични условия. Тук ще изложим накратко и задачата с нулеви гранични условия

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \tag{70.4}$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{70.5}$$

свойствата на която, както е добре известно, са тясно свързани с периодичните задачи.

Нека въведем решенията

$$c(x,\lambda): \quad c(0,\lambda) = 1,\ c'(0,\lambda) = 0, \tag{70.6}$$

$$s(x,\lambda): \quad s(0,\lambda) = 0,\ s'(0,\lambda) = 1. \tag{70.7}$$

Ще отбележим, че Вронскиана

$$W(c(x,\lambda), s(x,\lambda)) = c(0,\lambda)s'(0,\lambda) - c'(0,\lambda)s(0,\lambda) = 1. \tag{70.8}$$

Аналогично въвеждаме и решенията

$$\tilde{c}(x,\lambda): \quad \tilde{c}(\pi,\lambda) = 1,\ \tilde{c}'(\pi,\lambda) = 0, \tag{70.9}$$

$$\tilde{s}(x,\lambda): \quad \tilde{s}(\pi,\lambda) = 0,\ \tilde{s}'(\pi,\lambda) = 1, \tag{70.10}$$

където

$$W(\tilde{c}(x,\lambda), \tilde{s}(x,\lambda)) = 1. \tag{70.11}$$

Тъй като всяка от системите решения $c(x,\lambda), s(x,\lambda)$ и $\tilde{c}(x,\lambda), \tilde{s}(x,\lambda)$ е фундаментална, то имаме представянията

$$\tilde{c}(x,\lambda) = s'(\pi,\lambda)c(x,\lambda) - c'(\pi,\lambda)s(x,\lambda), \tag{70.12}$$

$$\tilde{s}(x,\lambda) = -s(\pi,\lambda)c(x,\lambda) + c(\pi,\lambda)s(x,\lambda). \tag{70.13}$$

и обратно

$$c(x,\lambda) = \tilde{s}'(0,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda) - \tilde{c}'(0,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda), \tag{70.14}$$

$$s(x,\lambda) = -\tilde{s}(0,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda) + \tilde{c}(0,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda). \tag{70.15}$$

Нека сега разгледаме нееднородната задача

$$\Phi'' + (\lambda - q(x))\Phi = f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{70.16}$$

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0, \tag{70.17}$$

Ще напомним, че намирането на решение $\Phi(f; x, \lambda) = \Phi(x, \lambda)$ се свежда до построяването на съответната функция на Гриин $G(x, y, \lambda)$, която удовлетворява следните условия:

1. За всяко λ, което не е собствено значение, функцията $G(x, y, \lambda)$ е непрекъсната за $0 \le x, y \le \pi$, при това $G'_x(x, y, \lambda)$ и $G''_{xx}(x, y, \lambda)$ са непрекъснати по x, y в триъгълниците $0 \le y \le x\pi$, $0 \le x \le y\pi$.

2.$G'_x(y + 0, y, \lambda) - G'_x(y - 0, y, \lambda) = 1$

3.$G(x, y, \lambda)$ по $x \neq y$ удовлетворява уравнението (70.1): $G''_{xx} + (\lambda - q(x))G = 0$.

3.$G(x, y, \lambda)$ по x удовлетворява граничните условия (70.5), т.е.

$$G(0, y, \lambda) = 0, \quad G(\pi, y, \lambda) = 0, \quad 0 \le y \le \pi. \tag{70.18}$$

Тогава решението на нееднородната задача (70.16), (70.17) се дава с формулата

$$\Phi(x, \lambda) = \int_0^\pi G(x, y, \lambda) f(y)\, dy, \tag{70.19}$$

където

$$G(x, y, \lambda) = \frac{1}{s(\pi, \lambda)} \left\{ \begin{array}{ll} s(x, \lambda)\tilde{s}(y, \lambda) & x \le y \le \pi \\ \tilde{s}(x, \lambda)s(y, \lambda) & 0 \le y \le x, \end{array} \right. . \tag{70.20}$$

За да построим така указаната функция на Грин нека напомним, че ако въведем функцията

$$K(x, y, \lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \le y \le 1 \\ s(x, \lambda)c(y, \lambda) - c(x, \lambda)s(y, \lambda), & 0 \le y \le x. \end{array} \right. , \tag{70.21}$$

то функцията

$$F(x, \lambda) = \int_0^x K(x, y, \lambda) f(y)\, dy \tag{70.22}$$

е едно частно решение на нееднородното уравнение (70.16). ($F'' + (\lambda - q(x))F = f(x)$.)

Нека положим

$$G(x, y, \lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(y)c(x, \lambda) + \beta(y)s(x, \lambda) & x \le y \le \pi \\ K(x, y, \lambda) + \alpha(y)c(x, \lambda) + \beta(y)s(x, \lambda) & 0 \le y \le x, \end{array} \right. . \tag{70.23}$$

Функциите $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ определяме от граничните условия (70.17), което дава

$$G(0, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(y)c(0, \lambda) + \beta(y)s(0, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(y) = 0 \tag{70.24}$$

$$G(\pi, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(\pi, \lambda)c(y, \pi) - c(\pi, \lambda)s(y, \pi) + \beta(y)s(\pi, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\beta(y) = \frac{c(\pi, \lambda)s(y, \lambda) - s(\pi, \lambda)c(y, \lambda)}{s(\pi, \lambda)} = \frac{\tilde{s}(y, \lambda)}{s(\pi, \lambda)}, \tag{70.25}$$

където в последното равенство използвахме представянето (70.13).

По аналогичен начин ще построим функцията на Гриин за периодичната задача (70.1), (70.2). Нека отбележим, че решението

$$\psi(x,\lambda) = -s(\pi,\lambda)c(x,\lambda) - (1-c(\pi,\lambda))s(x,\lambda) = -s(x,\lambda) + \tilde{s}(x,\lambda) \tag{70.26}$$

удовлетворява граничното условие $y(0) = y(\pi)$, а решението

$$\varphi(x,\lambda) = (1-s'(\pi,\lambda))c(x,\lambda) + c'(\pi,\lambda)s(x,\lambda) = c(x,\lambda) - \tilde{c}(x,\lambda) \tag{70.27}$$

удовлетворява граничното условие $y'(0) = y'(\pi)$. При това

$$W(\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)) = 2 - (c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)) = F_+(\lambda). \tag{70.28}$$

Следователно, ако $F_+(\lambda_0) = 0$, то

$$\psi(x,\lambda_0) = C_0\varphi(x,\lambda), \tag{70.29}$$

т.е. λ_0 е собствено значение на граничната задача (70.1), (70.2). Полагайки $x = 0$, за C_0 получаваме

$$-s'(\pi,\lambda_0) = C_0(1-s'(\pi,\lambda_0)) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{s(\pi,\lambda_0)}{s'(\pi,\lambda_0)-1}. \tag{70.30}$$

Функцията на Гриин ще построим, изхождайки от израза (70.23), където функциите α и β определяме от граничните условия (70.2):

$$G(0,y,\lambda) = G(\pi,y,\lambda), \tag{70.31}$$

$$G'_x(0,y,\lambda) = G'_x(\pi,y,\lambda). \tag{70.32}$$

Така получаваме уравненията

$$\alpha(y)(1-c(\pi,\lambda)) - \beta(y)s(\pi,\lambda) = s(\pi,\lambda)c(y,\lambda) - c(\pi,\lambda)s(y,\lambda), \tag{70.33}$$

$$-\alpha(y)c'(\pi,\lambda) + \beta(y)(1-s'(\pi,\lambda)) = s'(\pi,\lambda)c(y,\lambda) - c'(\pi,\lambda)s(y,\lambda). \tag{70.34}$$

За детерминантата на получената система имаме

$$D = \begin{vmatrix} (y)(1-c(\pi,\lambda) & -s(\pi,\lambda) \\ -c'(\pi,\lambda)+\beta & (1-s'(\pi,\lambda) \end{vmatrix} = 2 - (c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)) = F_+(\lambda). \tag{70.35}$$

Следователно, отчитайки представянията (70.26), (70.27), получаваме

$$\alpha(y) = -\frac{\psi(y,\lambda)}{F_+(\lambda)}, \quad \beta(y) = -\frac{\varphi(y,\lambda)}{F_+(\lambda)}. \tag{70.36}$$

Замествайки така получените значения на α и β намираме, че функцията на Грин за периодичната задача има следния вид

$$G_+(x,y,\lambda) = \frac{-1}{F_+(\lambda)} \begin{cases} c(x,\lambda)\psi(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) & x \le y \le \pi \\ \psi(x,\lambda)c(y,\lambda) + \varphi(x,\lambda)s(y,\lambda) & 0 \le y \le x. \end{cases} \tag{70.37}$$

Лесно се проверява тъждеството

$$c(x,\lambda)\psi(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi(y,\lambda) =$$

$$\psi(x,\lambda)c(y,\lambda) + \varphi(x,\lambda)s(y,\lambda) + F_+(\lambda)[s(x,\lambda)c(y,\lambda) - c(x,\lambda)s(y,\lambda)], \qquad (70.38)$$

откъдето следва, че

$$G_+(x,y,\lambda) = -F_+^{-1}(\lambda)[c(x,\lambda)\psi s(y,\lambda) + s(x,\lambda)\varphi s(y,\lambda)] -$$

$$[s(x,\lambda)c(y,\lambda) - c(x,\lambda)s(y,\lambda)], \quad 0 \le y \le x. \qquad (70.39)$$

За да изследваме антипериодичната задача (70.1), (70.3) въвеждаме решенията

$$\tilde{\psi}(x,\lambda) = s(\pi,\lambda)c(x,\lambda) - (1 + c(\pi,\lambda))s(x,\lambda) \quad (\tilde{\psi}(0,\lambda) = -\psi(\pi,\lambda)) \qquad (70.40)$$

и

$$\tilde{\varphi}(x,\lambda) = (1 + s'(\pi,\lambda))c(x,\lambda) - c'(\pi,\lambda)s(x,\lambda) \quad (\tilde{\varphi}(0,\lambda) = \tilde{\varphi}(\pi,\lambda), \qquad (70.41)$$

където

$$W(\tilde{\psi}(x,\lambda), \tilde{\varphi}(x,\lambda)) = 2 + (c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)) = F_-(\lambda). \qquad (70.42)$$

Следвайки изложената по–горе схема намираме, че функцията на Грин за антипериодичната задача (70.1), (70.3) се дава с формулата

$$G_-(x,y,\lambda) = \frac{-1}{F_-(\lambda)} \begin{cases} c(x,\lambda)\tilde{\psi}s(y,\lambda) + s(x,\lambda)\tilde{\varphi}(y,\lambda) & x \le y \le \pi \\ \tilde{\psi}(x,\lambda)c(y,\lambda) + \tilde{\varphi}(x,\lambda)s(y,\lambda) & 0 \le y \le x. \end{cases} \qquad (70.43)$$

71. Функции на Ермит.

Имаме уравнението

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{71.1}$$

Търсиме решенията $y(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Полагаме

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} u(x). \tag{71.2}$$

Получаваме

$$u'' - 2xu' + (\lambda - 1)u = 0. \tag{71.3}$$

Решението на последното уравнение търсим във вид на ред

$$u(x) = \sum_{u=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{71.4}$$

Получаваме

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + (\lambda - 1)a_k\}x^k = 0. \tag{71.5}$$

Следователно

$$a_{k+2} = \frac{2k - (\lambda - 1)}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{71.6}$$

При $a_0 \neq 0, a_1 = 0$ имаме четно по x решение, т.е. ред по степените x^{2k}, а при $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ имаме нечетно по x решение, т.е. ред по степените x^{2k+1}. При

$$\lambda = \lambda_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{71.7}$$

от (71.6) получаваме

$$a_{n+2} = a_{n+4} = \ldots = 0. \tag{71.8}$$

Нека отбележим, че при $n = 2m$ имаме

$$a_0 \neq 0, a_1 = 0, \Rightarrow a_3 = a_5 = \ldots = 0,$$

при това

$$a_0 a_2 \ldots a_{2m} \neq 0.$$

Аналогично при $n = 2m + 1$ имаме

$$a_0 = 0, a_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 \ldots a_{2m+1} \neq 0, a_{2m+3} = a_{2m+5} = \ldots = 0.$$

От (71.3) получаваме при $\lambda = 2n + 1, u = M_n$ уравнението

$$\frac{d^2 M_n}{dx^2} - 2x\frac{dM_n}{dx} + 2nM_n = 0, \tag{71.9}$$

$$y_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} M_n(x). \tag{71.10}$$

Ще покажем, че полиномите на Ермит M_n допускат представянето

$$M_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right). \tag{71.11}$$

Полагаме

$$v = e^{-x^2}, \quad \Rightarrow \quad v' = -2xe^{-x^2} = -2xv. \tag{71.12}$$

Диференцирайки $n+1$ пъти последното равенство, получаваме

$$\frac{d^n}{dx^n}(v' = -2xv) \Rightarrow v^{(n+2)} = -2xv^{(n+1)} - 2(n+1)v^{(n)},$$

т.е.

$$v^{(n+2)} + 2xv^{(n+1)} + 2(n+1)v^{(n)} = 0. \tag{71.13}$$

Полагаме

$$F_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2} v^{(n)},$$

т.е.

$$v^{(n)} = e^{-x^2} F_n(x). \tag{71.14}$$

Замествайки (71.14) в (71.13) получаваме (71.9), което и трябваше да покажем. Така получаваме, че за полиномите на Ермит е справедливо представянето

$$M_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \tag{71.15}$$

където множителят $(-1)^n$ е избран за удобство. В частност,

$$M_0(x) = 1, \quad M_1(x) = 2x, \quad M_2(x) = 4x^2 - 2, \quad M_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12...$$

От (71.15), отчитайки (71.2), получаваме за функциите на Ермит

$$y_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{71.16}$$

Непосредствено се пресмята нормата $\int_{-\infty}^{\infty} y_n^2(x)\, dx$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} M_n^2(x)\, dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Забележка. В общия случай, ако редът (71.4) не се свежда до полином, то поведението му при $|x| \to \infty$ се определя от далечните коефициенти, т.е. тези с големи индекси. За тях рекурентната формула (71.6) дава приближено $a_{k+2}/a_k \approx 2/k$. Следователно при $|x| \to \infty$, редът (71.6) $\sim \exp(x^2)$. От (73.2) имаме $y(x) \sim \exp(x^2/2)$. Приведените тук пресмятания могат да бъдат направени точни (вж. например, ...).

72. Функции на Льожандър.

Имаме уравнението

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] = -\lambda y, \quad -1 \le x \le 1. \tag{72.1}$$

Собствени значения са тези λ, за които имаме ограничено решение при $-1 \le x \le 1$. Полагайки в (72.1)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{72.2}$$

получаваме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_n + \lambda a_n\}x^n = 0. \tag{72.3}$$

От тук получаваме рекурентната формула

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{72.4}$$

където a_0, a_1 са произволни. При $a_0 \ne 0, a_1 = 0$ получаваме решение с четни степени по x, т.е. $a_{2k+1} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, а при $a_0 = 0, a_1 \ne 0$ получаваме решение с нечетни степени по x, т.е. $a_{2k} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. При

$$\lambda = \lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{72.5}$$

решението е полином. Нека отбележим, че ако индекса n е четно число, за да получим полином следва да положим $a_1 = 0$ и аналогично, ако индекса n е нечетно число, за да получим полином следва да положим $a_0 = 0$.

Формула на Родриг. Нека положим

$$u = (x^2-1)^n, \quad \to \frac{du}{dx} = 2nx(x^2-1)^{n-1}. \tag{72.6}$$

Следователно u удовлетворява уравнението

$$(x^2-1)\frac{du}{dx} - 2nxu = 0. \tag{72.7}$$

Диференцирайки n-пъти последното уравнение получаваме

$$(x^2-1)\frac{du^{(n)}}{dx} - 2n(n+1)u^{(n)} = 0. \tag{72.8}$$

Диференцирайки още веднъж по x получаваме уравнението

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y = 0, \quad y = u^{(n)}, \tag{72.9}$$

т.е.

$$y(x) = Cu^{(n)} = C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \tag{72.10}$$

е решение на уравнението (72.1) при $\lambda = n(n+1)$. Нормировъчната константа $C = 1/2^n n!$, с което получаваме

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \tag{72.11}$$

полиномите на Льожандър във форма на Родриг.

Присъединени функции на Льожандър. Нека сега разгледаме уравнението

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)y'] - \frac{k^2}{1-x^2}y = \lambda y, \quad -1 \le x \le 1, \quad = 0, 1, \ldots, \tag{72.12}$$

което при $k = 0$ съвпада с уравнението (72.1). Ще намерим тези значения на λ, за които съществуват решения, ограничени в интервала $[-1, 1]$. Полагаме

$$y(x) = (1-x^2)^{k/2}z(x). \tag{72.13}$$

Тогава функцията $z(x)$ удовлетворява уравнението

$$(1-x^2)z'' - 2x(k+1)z' + [\lambda - k(k+1)]z = 0 \tag{72.14}$$

или

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)^{k+1}z'] + [\lambda - k(k+1)](1-x^2)^k z = 0 \tag{72.15}$$

Сега да диференцираме k пъти уравнението (72.1):

$$\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}[(1-x^2)y'] = -\lambda y^{(k)}. \tag{72.16}$$

В резултат получаваме, полагайки $y^{(u)} = z$, уравнението (72.14). Следователно при $\lambda = n(n+1)$ ограничените решения се дават с формулата

$$z(x) = \frac{d^k}{dx^k}P_n(x), \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{72.17}$$

73. Резолвента на оператора $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$. Преобразувание на Фурие.

Тук върху примера на уравнението

$$\frac{1}{i}\frac{df}{dx} = \lambda f, \quad -\infty < x < \infty, \tag{73.1}$$

чието решение

$$f(x,\lambda) = e^{i\lambda x} \neq L^2(\mathbb{R}) \tag{73.2}$$

ще построим съответното разлагане на единицата, което ще даде формулите за разлагане в интеграл на Фурие. По-точно справедлива е следната

Теорема на Фурие. Нека разгледаме оператора на Фурие

$$(\mathcal{F}g)(t) = h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} g(s)e^{its}\,ds, \quad g(t) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{73.3}$$

Тогава обратния оператор се дава с формулата

$$g(t) = (\mathcal{F}^{-1}h)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-its}\,ds, \tag{73.4}$$

при това е в сила равенството на Фурие–Планшерел

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt. \tag{73.5}$$

Забележка. За краткост на изложението тук ще докажем тази теорема при някои допълнителни изисквания за гладкост и достатъчно бързо намаляване на $g(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$, по-точно $g(x)$ е два пъти непрекъснато дифренцируема, $g^{(j)}(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2$. Оттук верността на теоремата за всяка $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$ се установява по стандартен начин [вж. например,]

Нека сега разгледаме нееднородната задача

$$\frac{1}{i}\frac{dF}{dx} - \lambda F = g(x), \quad g(x) \in L^1(\mathbb{R}). \tag{73.6}$$

Не е трудно да се провери, че решението на последното уравнение, което при $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ принадлежи на $L^2(\mathbb{R})$ се дава с формулата

$$F(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x}\int_{-\infty}^{x} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy = F_+, & \mathrm{Im} \geq 0, \\ -e^{i\lambda x}\int_{x}^{\infty} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy = F_-, & \mathrm{Im} \leq 0. \end{cases} \tag{73.7}$$

Интегрирайки два пъти по части получаваме

$$e^{i\lambda x}\int_{-\infty}^{x} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy = \frac{g(x)}{i\lambda} + \frac{g'(x)}{\lambda^2} - \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{x} g''(y)e^{-i\lambda y}\,dy \tag{73.8}$$

$$-e^{i\lambda x}\int_x^\infty g(y)e^{-i\lambda y}\,dy = \frac{g(x)}{i\lambda} - \frac{g'(x)}{\lambda^2} - \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^2}\int_x^\infty g''(y)e^{-i\lambda y}\,dy. \tag{73.9}$$

Нека в λ -равнината въведем контура $\gamma_R^+ = (-R,R)\bigcup C_R^+$, $C_R^+ = R\exp(i\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ и нека γ_R^- е симетричния на γ_R^+ контур в долната полуравнина, където и двата контура се обхождат в положителна посока. По теоремата на Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_R^+} F_+(x,\lambda)\,d\lambda + \oint_{\gamma_R^-} F_-(x,\lambda)\,d\lambda = 0. \tag{73.10}$$

Върху реалната ос имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x}\left\{\int_{-\infty}^{x} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy\right\}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x}\left\{\int_{x}^{\infty} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy\right\}d\lambda =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy\right\}d\lambda. \tag{73.11}$$

От друга страна, вследствие на (73.8), (73.9), получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^+} F_+(x,\lambda)\,d\lambda + \int_{C_R^-} F_-(x,\lambda)\,d\lambda =$$

$$\frac{g(x)}{2\pi}\Big(\int_{C_R^+\bigcup C_R^-}\frac{d\lambda}{\lambda} + O(\frac{1}{R}) = ig(x) + O(\frac{1}{R}). \tag{73.12}$$

Събирайки последните две равенства получаваме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} e^{i\lambda x}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\lambda y}\,dy\right\}d\lambda + ig(x) + (\frac{1}{R}) = 0. \tag{73.13}$$

Оттук при $R \to \infty$ получаваме исканата формула (73.4). □

За пълнота на изложението тук ще приведем директно доказателство на споменатата по–горе оценка

$$g(x) = F(x,\lambda) \in L^2(\mathbb{R}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Im}\lambda = \tau \neq 0, \tag{73.14}$$

където $F(x,\lambda)$ се определя по формулата (73.7). По–точно, справедлива е следната

Лема 1. За всяка функция $f \in L^2(\mathbb{R})$ и $\tau > 0$ функцията

$$g(x) = e^{\tau x}\int_x^\infty e^{-\tau\xi} f(\xi)\,d\xi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|g\| \leq \frac{1}{\tau}\|f\|, \tag{73.15}$$

където $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$.

Доказателство. Нека $x < 0$, тогава

$$g(x) \leq e^{\tau x}\left[\int_x^{\frac{x}{2}} e^{-\tau\xi}|f(\xi)|\,d\xi + \int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-\tau\xi}|f(\xi)|\,d\xi\right] \leq$$

$$\leq e^{\tau x}\left(\int_x^{\frac{x}{2}} e^{-2\tau\xi}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{\frac{x}{2}} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+e^{\tau x}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} e^{-2\tau\xi}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(1-e^{\tau x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{\frac{x}{2}} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{e^{\frac{\tau x}{2}}}{\sqrt{2\tau}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\tau}}\left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{e^{\frac{\tau x}{2}}}{\sqrt{2\tau}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{73.16}$$

Следователно

$$g(x)\to 0,\quad x\to-\infty. \tag{73.17}$$

Сега да отбележим, че непосредствено от дефиницията на $g(x)$ имаме

$$\frac{dg(x)}{dx}=\tau g(x)-f(x),\quad g(x)\to 0,\quad x\to\infty. \tag{73.18}$$

От последното уравнение следва

$$\frac{d|g(x)|^2}{dx}=2\tau|g(x)|^2-f(x)\overline{g(x)}-\overline{f(x)}g(x). \tag{73.19}$$

Интегрирайки последното равенство от $-\infty$ до ∞, отчитайки (73.17-18), получаваме

$$0=2\tau\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}\,dx-\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}g(x)\,dx. \tag{73.20}$$

От тук, с помощта на неравенството на Коши-Буняковски получаваме исканата оценка (73.15).

Литература:

1. Л. Д. Фаддеев, О. Я. Якубовский, Лекции по квантовой механике (для студентов математиков), Ленинград, 1980.

2. В. И. Арнольд, Математические методы класической механики, М. Наука, 1974.

3. G. B. Whitham, Linear and nonlinear waves, John Wiley and Sons, New York, 1974

4. Л. Д. Ландау, Механика, М. Наука, 1988.