ТОИМ
Упражнение 8

Задача 1. Нека пространството на матриците 2×2 се задава с четирите базисни елемента:

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ако T е линейната трансформация, която транспонира всяка матрица 2×2, то намерете матрицата на тази линейна трансформация.

Задача 2. Нека $1, x, x^2$ и $1, x, \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$ са два базиса, които пораждат пространството P_2. Дадена е линейна трансформация T, такава че $T(p(x)) = \left(\left(x^2 - 1\right) p'(x)\right)'$, $p(x) \in P_2$. Намерете матрицата на трансформация от стандартния базис към новия базис.

Задача 3. Определете дали са диагонализируеми матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -4 \\ 5 & -11 & -6 \\ -6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -3 & -6 & 1 \\ 9 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Диагонализирайте матрицата и използвайте диагонализацията, за да намерите нейната обратна матрица.

Задача 5. Като използвате вградената функция в *Mathematica HilbertMatrix*, диагонализирайте матрицата на Хилберт от 15-ти ред. Намерете числото на обусловеност $\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, където λ_{max} и λ_{min} са максималното и минималното собствено число на A.

Задача 6. Посочете вярно ли е твърдението.

(а) Ако стълбовете на матрицата X, образувана от собствените вектори на матрицата A, са линейно независими, то:

- A е обратима;
- A е диагонализируема;
- X е обратима;
- X е диагонализируема.

(б) Ако собствените стойности на матрицата $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ са 2, 2, 5, тогава матрицата е със сигурност е:

- обратима;
- диагонализируема;
- не може да се диагонализира.