

ТОИМ

Упражнение 5

Задача 1. Частица се движи по траектория, определена от

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{i} + (1 - \cos t) \mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Визуализирайте траекторията на частицата и пресметнете изминатия от нея път.

Задача 2. Дадена е областта Ω с гладка граница $\partial\Omega$. Потокът на вещество в Ω се задава с $\mathbf{j}$. Определете как можем да намерим количеството вещество, минаващо през $\partial\Omega$ за единица време. Ако границата на областта се задава параметрично с $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$ и $\mathbf{j}(x, y) = (2x + y, x)^T$, пресметнете това количество.

Задача 3. Използвайте теоремата на Грийн и проверете, че за крива C , удовлетворяваща условието й, е в сила формулата за пресмятане на лицето на областта D , заградена от нея

$$\iint_D dx dy = \oint_C x dy.$$

Използвайте кривата от *Green's_theorem_applications.nb* и пресметнете приближено лицето на областта, заградена от нея, като използвате точките, наричани върху кривата.

Задача 4. Разгледайте в *Youtube* клипчета за linear (rolling) planimeter. Пресметнете пътя, изминат от колелото на линеен планиметър, и определете как може да се използва той за пресмятане на лицето на фигурата, заградена от крива, удовлетворяваща условието от теоремата на Грийн.

Задача 5. Обект с маса m е хвърлен под ъгъл α с начална скорост v_0 . Пресметнете работата, извършена от гравитационната сила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, докато обектът не достигне земята.