

# ТОИМ

## Упражнение 4

**Задача 1.** Дадено е векторното поле  $\mathbf{F}(x, y) = (y^3 - 9y, x^3 - 9x)^T$ .

- (а) Визуализирайте векторното поле в квадрата  $[-5, 5] \times [-5, 5]$ .
- (б) Определете знака на ротацията в точките  $(0, -3)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(-3, 0)$ .
- (в) Какво можете да кажете за дивергенцията във всяка точка?

**Задача 2.** Визуализирайте градиентното поле, което описва дифузионния поток в уравнението на дифузията от предното упражнение. Определете знака на дивергенцията в центъра на кръга, като нарисувате кръгче около точката. Направете анимация с линиите на ниво на функцията, описваща концентрацията, и градиентното поле на една графика.

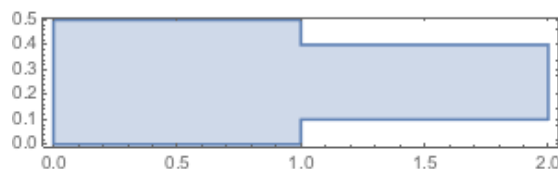
**Задача 3.** Нека са дадени електричен заряд  $Q$ , който се намира в началото на декартова координатна система, и електричен заряд  $q$ , който се намира в точка  $\mathbf{x} = (x, y)^T$ . Според закона на Кулон, електричната сила  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ , която зарядът  $Q$  оказва на  $q$ , се задава с

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon q Q}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x},$$

където  $\epsilon$  е константата на Кулон,  $\epsilon \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ .

Визуализирайте силовото поле, което се поражда от силата  $\mathbf{F}$ , като се използват параметрите  $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$ ,  $Q = 5 \times 10^{-5} \text{ C}$ . Да се направи анимация на движението на частица в силовото поле, ако тя има маса  $m = 9 \times 10^{-2} \text{ kg}$ , начална позиция  $\mathbf{x} = (10, -10)^T$  и начална скорост  $\mathbf{v} = (0, 0)^T$ . Какъв е знакът на дивергенцията на векторното поле в центъра на координатната система?

**Задача 4.** Разгледайте *Stokes\_flow.nb*, в който са решени уравненията на Стокс за симулиране на стационарен поток в стесняващ се канал, който има следната геометрия:



Като използвате получените резултати:

- (а) визуализирайте полето на скоростта на потока;
- (б) визуализирайте налягането в канала.

Определете какви са математическите обекти, които описват двете величини.

**Задача 5.** Като използвате резултатите от задачата за *Stokes flow* в канал (по-точно за скоростта на потока), формулирайте математически модел, който описва разпространението на вещество в канала при следните предположения

- (а) веществото не може да напуска канала (например на изхода му има мрежа такава, че частиците не могат да преминават през нея);
- (б) в началния момент от време веществото е концентрирано в горния ляв ъгъл, например в областта

$$\text{substance} = \{(x, y) \in \Omega : 0 \leq x \leq 0.1, 0.3 \leq y \leq 0.5\}.$$

Запишете модела в операторен вид, а след това в координатна форма.