ТОИМ
Упражнение 3
Скаларна функция на векторен аргумент.

Задача 1. Да се начертаят графиките и съответните линии на ниво на функциите

(а) $f(x,y) = \sin x - \sin y$;

(б) $f(x,y) = \left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$.

Задача 2. Като начертаете подходящи графики, обяснете защо следните граници не съществуват.

(а) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$,

(б) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Докажете го аналитично.

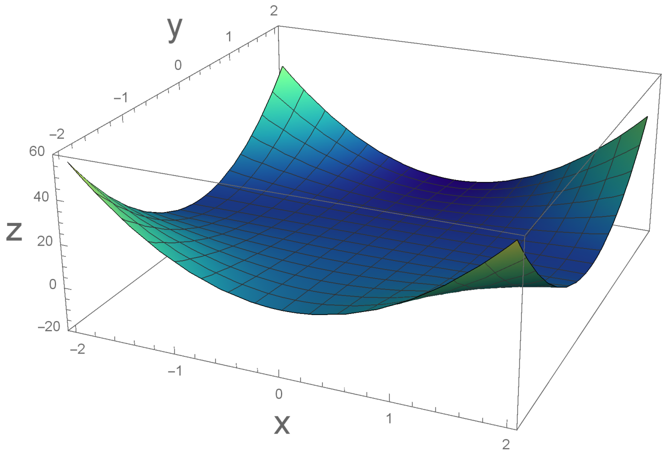
Задача 3. Направете предположение за стойността на

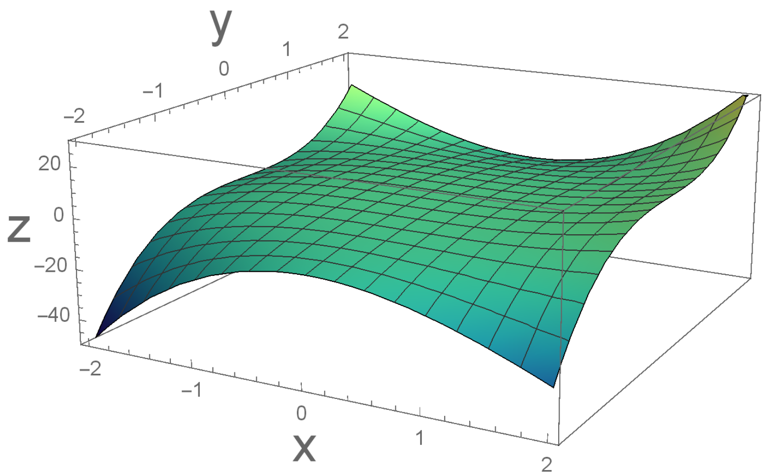
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}.$$

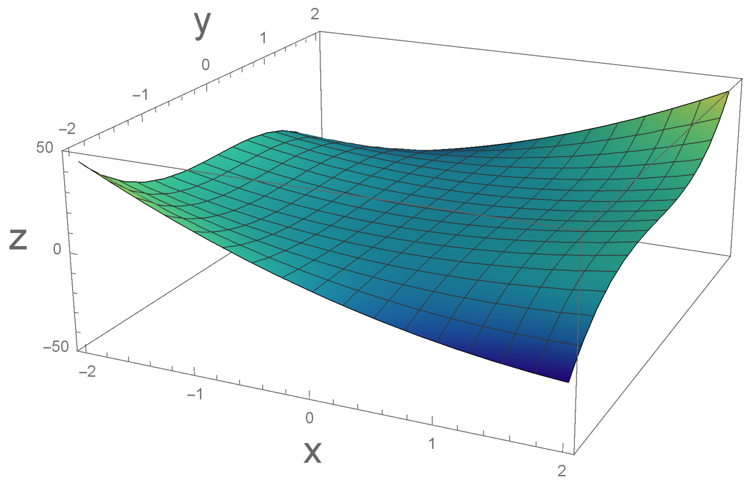
Като използвате $\varepsilon - \delta$ дефиницията, го докажете.

Задача 4. Да се линеаризира функцията $f(x,y) = \ln(x-2y)$ около т.P(3,1,0) и да се визуализира повърхнината заедно с допирателната равнина. Да се начертаят линиите на ниво на повърхнината и равнината в достатъчно малка околност на точката, така че те да станат визуално неразличими.

Задача 5. Следните три графики визуализират дадена функция и двете ѝ частни производни. Преценете коя от графиките коя е.


x
y
z
−2
−1
0
1
2
−2
−1
0
1
2
60
40
20
0
−20


x
y
z
−2
−1
0
1
2
−2
−1
0
1
2
20
0
−20
−40


x
y
z
−2
−1
0
1
2
−2
−1
0
1
2
50
0
−50

Задача 6. Според закона на Нютон за гравитацията, гравитационната сила между два обекта с маса m, разположена в точката (x, y, z) и M, разположена в началото на координатната система, е равна на

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{\|r\|^3}\mathbf{r},$$

където $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $\|r\|$ е разстоянието между двата обекта, а G е гравитационната константа. Покажете, че F е градиентът на функцията $f(x, y, z) = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|}$.

Задача 7. Уравнението на Лаплас в операторен вид е $\Delta u = 0$, където Δ е операторът на Лаплас. В декартови координати в $2D$ е изпълнено $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ или още $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Покажете, че при смяна в полярни координати (r, θ), т.е. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, уравнението е

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Задача 8. В дадена област $\Omega \subset R^2$ има организми с концентрация u. Ако организмите в средата се движат свободно, то можем да моделираме процеса с диференциалната задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Наложете подходящо гранично условие, описващо изолирана система (тоест при която организмите не могат да напускат областта). Използвайте вградената функция *NDSolve* в *Mathematica* и визуализирайте концентрацията във всеки момент t, като областта Ω вземете да бъде кръг с център (10,10) и радиус 10.