ТОИМ
Упражнение 1

Задача 1. Дадена е функцията $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)^T$. Скицирайте кривата, определена от $\mathbf{r}(t)$, за достатъчно голям интервал за t така, че да се види ясно поведението ѝ и пресметнете $\mathbf{r}'(t)$. Визуализирайте кривата заедно с радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, допирателния вектор $\mathbf{r}'(t)$ и единичния допирателен вектор $\mathbf{T}(t)$. Използвайте вградената функция Manipulate.

Задача 2. Кривите на Безие са полиномиални криви, които често се използват в компютърната графика, анимация, моделиране на движението на даден обект и т.н. Кривата на Безие от трета степен има следния вид:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P_0}(1-t)^3 + 3\mathbf{P_1}(1-t)^2 t + 3\mathbf{P_2}(1-t)t^2 + \mathbf{P_3}t^3, \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

където $\mathbf{P_0}, \mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}$ са така наречените контролни точки.

(а) Начертайте кривата на Безие от трета степен за контролните точки $\mathbf{P_0} = (1,1)$, $\mathbf{P_1} = (2,2)$, $\mathbf{P_2} = (3,2)$, $\mathbf{P_3} = (4,1)$, заедно с отсечките P_0P_1, P_1P_2 и P_2P_3;

(б) Докажете колинеарността на векторите $\overrightarrow{\mathbf{P_0P_1}}$ и $\overrightarrow{\mathbf{P_2P_3}}$ съответно с допирателните вектори $\mathbf{B}'(\mathbf{0})$ и $\mathbf{B}'(\mathbf{1})$.

(в) Изберете четирите контролни точки така, че да образувате буквата "C".

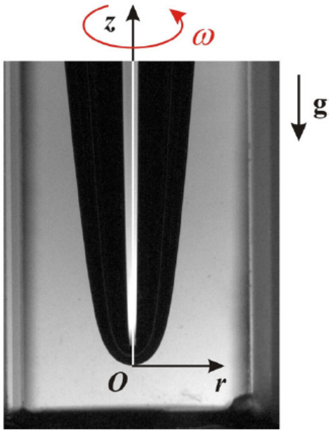
(г) Постройте две криви на Безие така, че заедно с контролните си точки да образуват буквата "S". За да се свържат двете криви гладко, поставете условие за колинеарност на допирателните вектори към кривите в точката им на свързване.

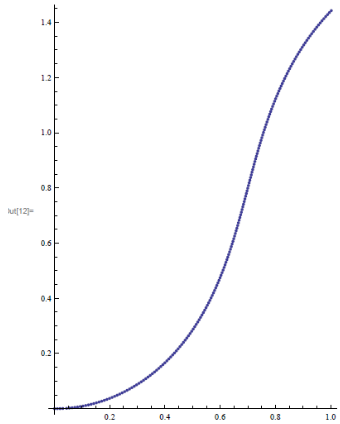
Задача 3. Да се реши системата

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{ds} &= \cos\theta, \\
\frac{dz}{ds} &= \sin\theta, \\
\frac{d\theta}{ds} &= \frac{2}{b} - \frac{\sin\theta}{r} + \epsilon_g B z, \\
r(0) &= z(0) = \theta(0) = 0, \\
\frac{d\theta}{ds}\Big|_{s=0} &= \frac{1}{b}.
\end{aligned} \tag{2}$$

и да се визуализира $\mathbf{u}(s) = (r(s), z(s))^T$, като се използват следните параметри: $\frac{1}{b} = \frac{10}{13}, \epsilon_g = -1, B = 2.4$.

Забележка: Величините в задачата са скалирани така, че радиусът на капиляра, от който се капва капката, е 1. Да се визуализира кривата до достигане на радиуса на капиляра, т.е. до $r(s) = 1$.





Задача 4. Да се намери векторната функция $\mathbf{u}(t) = (N(t), P(t))^T$, която е решение на системата:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P\frac{aN}{b+N}, \\ \frac{dP}{dt} &= -cP + \lambda P\frac{aN}{b+N}, \\ N(0) &= N_0,\ P(0) = P_0 \end{aligned} \tag{2}$$

съответно с параметри:

(i) $r = 1,\ K = 10,\ b = 1,\ a = 3,\ \lambda = 1,\ c = 2,\ P_0 = 3,\ N_0 = 5$;

(ii) $r = 1,\ K = 3,\ b = 1,\ a = 3,\ \lambda = 1,\ c = 2,\ P_0 = 3,\ N_0 = 5$.

За тази цел:

(а) визуализирайте решението за всяка една от неизвестните скаларни функции $P(t)$ и $N(t)$ по отношение на времето t;

(б) визуализирайте параметричната крива $\mathbf{r}(t) = (N(t), P(t))^T$.

Забележка: Системата (2) може да бъде записана във вида

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - P\frac{aN}{b+N} \\ -cP + \lambda P\frac{aN}{b+N} \end{pmatrix}.$$