Теоретични основи на индустриалната математика, 2018/2019
Контролна работа No 2

Задача 1. Тяло с маса m се движи за време $t \in [0,1]$ под действието на сила $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. В началния момент от време тялото се намира в покой в точката $(0,0,0)$. Намерете допирателен и нормален вектор към траекторията в момента от време $t = 1$.

Задача 2. Дадено е силовото поле

$$\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Частица се движи по права линия между точките $(0,0,0)$ и $(2,1,3)$.

(а) Направете визуализация;

(б) Намерете извършената от силата работа.

Задача 3. Дадена е линейната система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Определете размерностите и базисите на $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$. Какви условия трябва да изпълнява $\mathbf{b}$, за да има системата решение? При тези условия, намерете общото решение на системата.

Задача 4. Дадени са три линейно независими вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Конструирайте матрица A така, че $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ да са съвместими, а $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$ да няма решение.

Задача 5. Да се провери, че за векторното поле $\mathbf{v} = x^2y(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ е в сила

$$\Delta\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}).$$

Задача 6. Опишете "column picture" на следната система, без да рисувате нищо, като се обосновете:

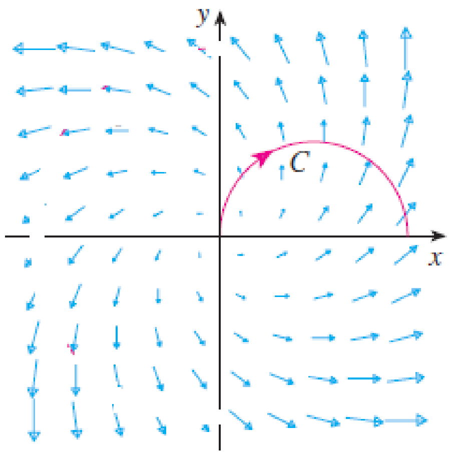
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x + 2y + 2z &= 2, \\ x + 2y + 3z &= 3. \end{aligned}$$

Задача 7. Една функция $f(x,y)$ ще наричаме хармонична, ако удовлетворява уравнението на Лаплас

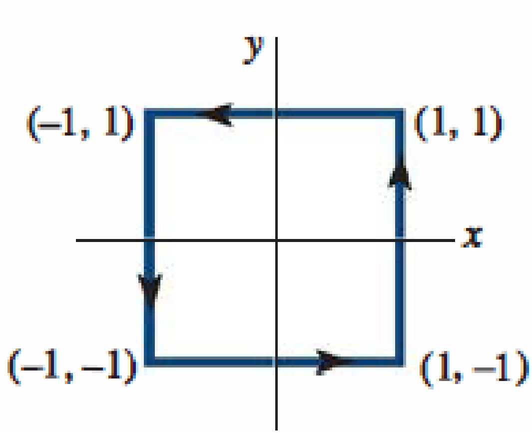
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Ако f е хармонична и C е положително ориентирана, по части гладка, проста затворена крива, която е контур на областта Ω и $\mathbf{n}$ е външната нормала към кривата C, пресметнете $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{n} ds$.

Задача 8. Векторното поле $\mathbf{F}$ и кривата C са изобразени по-долу. Какъв е знакът на $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$? Обосновете се.



Задача 9. Без да използвате теоремата на Green, пресметнете $\oint_C x^2y^3dx - xy^2dy$, където затворената крива C е дадена по-долу:



Задача 10. Формулирайте математически модел на разпространението на замърсител в дадена област Ω вследствие на дифузия и адвективен поток, насочен по направлението на $\mathbf{j}$ и имащ константна скорост c. Приемете, че замърсителят не може да напуска областта.

Основни теореми на интегралното смятане:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (Pdx + Qdy).$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}d\Omega.$$

$$\iint_\Omega (2Dcurl\ \mathbf{F})d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$