

**Теоретични основи на индустриалната математика,
2018/2019
Контролна работа No 1**

Задача 1. Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\mathbf{i} + g(x, z)\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k}$$

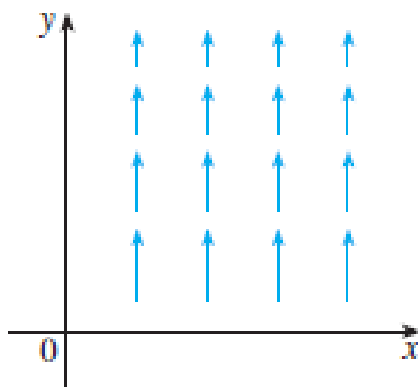
е несвиваемо, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

Задача 2. Илюстрирайте графично градиентното поле за функцията

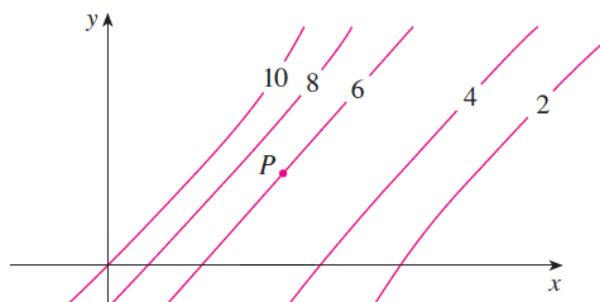
$$f(x, y) = \sin x + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Ако f означава концентрацията на вещество, то какво е направлението на дифузионния поток в точката $(0,0)$?

Задача 3. Какъв е знакът на $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $2D\text{curl } \mathbf{F}$, където $\mathbf{F}$ е илюстрирано по-долу? Обосновете се.



Задача 4. Какъв е знакът на f_x , f_y , f_{xx} в точката P , където линиите на ниво на f са дадени по-долу? Обосновете се.



Задача 5. Постройте графиката на $f(x, y)$ и нейната допирателна равнина в точката $(1, 1, \sin 14)$, ако

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2 + 12)$$

Задача 6. Частица се движи по траектория

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)^T.$$

Намерете тангенциалната компонента на ускорението. Илюстрирайте графично, като визуализирате траекторията и тангенциалното ускорение при $t = 2$.

Задача 7. Каква е нормалната компонента на потока $\mathbf{F}(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} \mathbf{i} + \sqrt{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ в точката $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ от границата на областта Ω , заградена от $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$? Намерете кривината на границата като функция на t .

Задача 8. Изведете ∇ в полярни координати, ако знаете, че

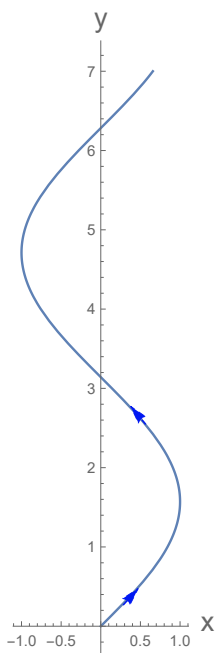
$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}, \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}.$$

Задача 9. Нека $F(x, y, z)$ е гладка функция, за която $\nabla F(1, -1, \sqrt{2}) = (1, 2, -2)^T$. Ако

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

то пресметнете $\frac{\partial F}{\partial \phi}$ в т. $(\rho, \phi, \theta) = (2, \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$.

Задача 10. Скицирайте графиките на $x(t)$ и $y(t)$, ако параметричната крива $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 7]$, има следния вид:



Стрелките означават посоката на обхождане на кривата.