Теоретични основи на индустриалната математика, 2018/2019
Контролна работа No 1

Задача 1. Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$$

е безвихрово, т.е. $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

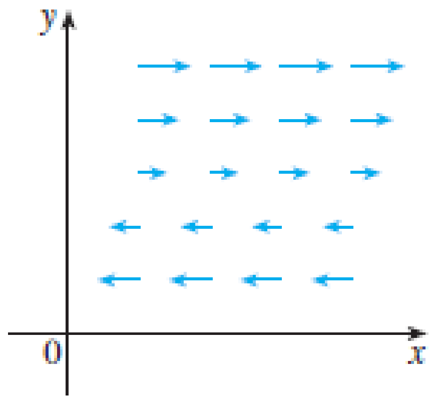
Задача 2. Нека

$$f(x,y) = \sin x + \sqrt{y^2+1}$$

означава концентрацията на вещество. Илюстрирайте графично адвективния поток, породен от движението на флуид с поле на скоростите

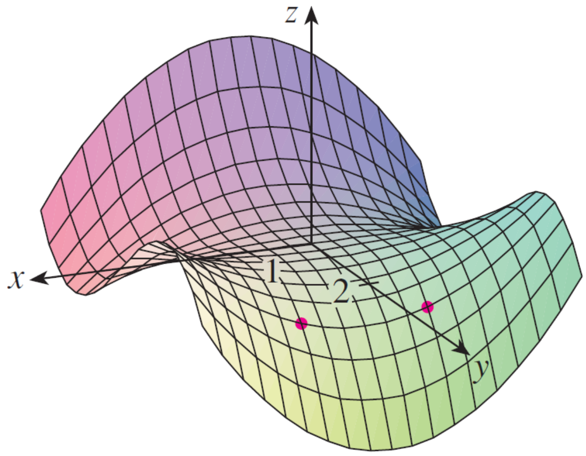
$$\mathbf{v}(x,y) = y(1-y)\mathbf{i} + x(y-1/2)^2\mathbf{j}.$$

Задача 3. Какъв е знакът на $\nabla \cdot \mathbf{F}$ и $2Dcurl\ \mathbf{F}$, където $\mathbf{F}$ е илюстрирано по-долу? Обосновете се.



Обосновете се.

Задача 4. Какъв е знакът на f_x, f_y, f_{yy} в точката $(1,2)$, където графиката на f е дадена по-долу? Обосновете се.



Задача 5. Намерете линеаризацията на векторното поле

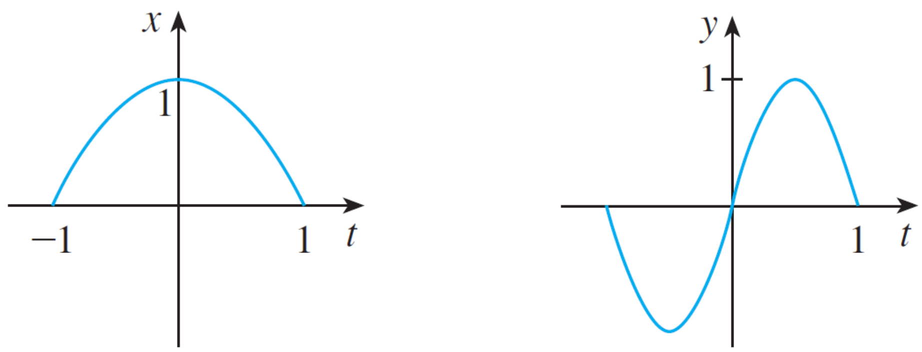
$$\mathbf{F}(x, y) = \sin x\mathbf{i} + \cos xy\mathbf{j}$$

около точката (0,0). Използвайте я, за да намерите $\tilde{\mathbf{F}} \approx \mathbf{F}(0.1, 0.1)$. Каква е грешката $\|\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{F}(0.1, 0.1)\|_2$?

Задача 6. Обект с маса m се движи хоризонтално в резистивна среда. Какво разстояние изминава той за време t, ако $v(0) = v_0, s(0) = s_0$ и големината на съпротивлението е kv?

Задача 7. Каква е тангенциалната компонента на потока $\mathbf{F}(x, y) = \sin(x^2 + 1)\mathbf{i} + \cos(x^2 + y^2)\mathbf{j}$ в точката $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ от границата на областта Ω, заградена от $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$, $t \in [0, 2\pi]$?

Задача 8. Скицирайте графиката на $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))^T$,ако



Задача 9. Дадена е функцията $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^4+y^4}$. Съществува ли границата на функцията при $(x, y) \to (0, 0)$? Обосновете отговора си.

Задача 10. Изведете $\nabla \cdot \mathbf{u}$ в полярни координати, ако $u = u_r\mathbf{r} + u_\varphi\boldsymbol{\varphi}$ и знаете, че

$$\nabla = \boldsymbol{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\boldsymbol{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \mathbf{i} = \cos\varphi\boldsymbol{r} - \sin\varphi\boldsymbol{\varphi}, \quad \mathbf{j} = \sin\varphi\boldsymbol{r} + \cos\varphi\boldsymbol{\varphi}.$$