

Записки за курса
**“Теоретични основи на индустриалната
математика – част 1”**

Съдържание

1	Векторен анализ	2
1.1	Векторни функции на един скаларен аргумент	2
1.2	Движение на частица. Нютонова механика. Кривина	9
1.3	Скаларна функция на векторен аргумент	15
1.4	Векторна функция на векторен аргумент	24
1.5	Криволинейни интеграли. Приложение на теоремата на Грийн	27

Глава 1

Векторен анализ

1.1 Векторни функции на един скаларен аргумент

Величините, които изследваме, се изменят, както във времето, така и в пространството. Често обаче някои от пространствените променливи, които описват дадена величина, могат да бъдат пренебрегнати въз основа на някакви предположения.

Векторните функции на няколко променливи могат да описват:

- криви в равнината или в пространството;
- няколко величини, които заедно описват физическа система;
- траекторията, която описва движението на една частица в пространството;
- векторни величини, които се изменят във времето (например сила, скорост и т.н.).

Първото приложение на векторни функции на скаларен аргумент, което ще разгледаме, е задачата за описване на криви в равнината.

Задача 1. Дадена е функцията $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)^T$. Като използвате Wolfram Mathematica, визуализирайте кривата за достатъчно голямо t така, че да се види ясно поведението на кривата, пресметнете $\mathbf{r}'(t)$, постройте радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$, допирателния вектор $\mathbf{r}'(t)$ и единичния допирателен вектор $\mathbf{t}$ за даденото t .

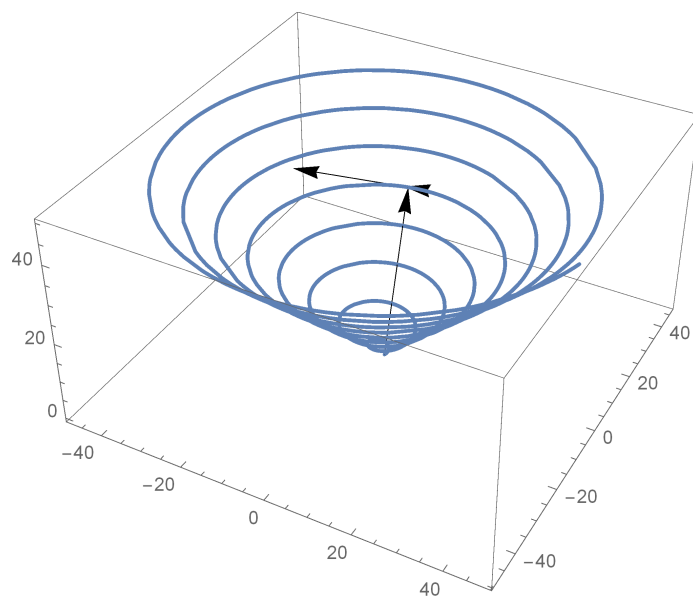
Решение. Използваме системата Wolfram Mathematica.

```

Clear[r];
r[t_] = {t Cos[t], t Sin[t], t};
plot = ParametricPlot3D[r[t], {t, 0, 50}];
Manipulate[
  Show[plot,
    Graphics3D[Arrow[{{0, 0, 0}, r[t]}]],
    Graphics3D[Arrow[{r[t], r'[t] + r[t]}]],
    Graphics3D[Arrow[{r[t], r'[t] / Norm[r'[t]] + r[t]}]],
    {t, 0, 50, 1}
  ]

```

Например за $t = 27$ получаваме следния резултат:



Анимация може да бъде намерена във файла *Упражнение1.nb*. □

Задача 2. Кривите на Безие са полиномиални криви, които често се използват в компютърната графика, анимация, моделиране на движението на даден обект и т.н. Кривата на Безие от трета степен има следния вид:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{P}_0(1-t)^3 + 3\mathbf{P}_1(1-t)^2t + 3\mathbf{P}_2(1-t)t^2 + \mathbf{P}_3t^3, \quad t \in [0, 1], \quad (1.1)$$

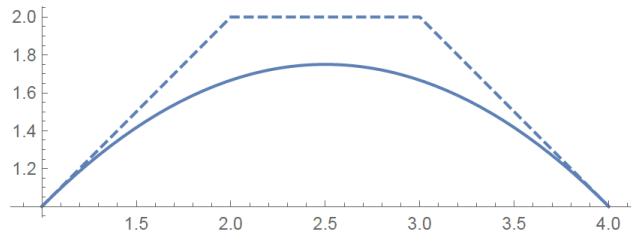
където $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ са така наречените контролни точки.

- (а) Начертайте кривата на Безие от трета степен за контролните точки $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Нарисувайте контролния полигон, получен при свързване на контролните точки.
- (б) Докажете колинеарността на векторите $\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3}$ съответно с допирателните вектори $\mathbf{B}'(0)$ и $\mathbf{B}'(1)$.
- (в) Изберете четирите контролни точки така, че да образувате буквата "C".

- (г) Използвайте подточка (в) и нарисуйте две криви на Безие така, че заедно с контролните си точки да образуват буквата "S". Направете проверка за гладкост между двете криви на Безие.

Решение. Ще коментираме последователно четирите подточки.

- (а) Кубичните криви на Безие, както отбелязахме, са полиномиални 2D криви, като всяка от двете компоненти на $\mathbf{B}(t)$ е полином от трета степен. В представянето (1.1) за базис са използвани полиномите на Бернщайн – $\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$. Визуализираме резултата в Mathematica и получаваме



Фигура 1.1: Кубична крива на Безие за контролните точки $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$.

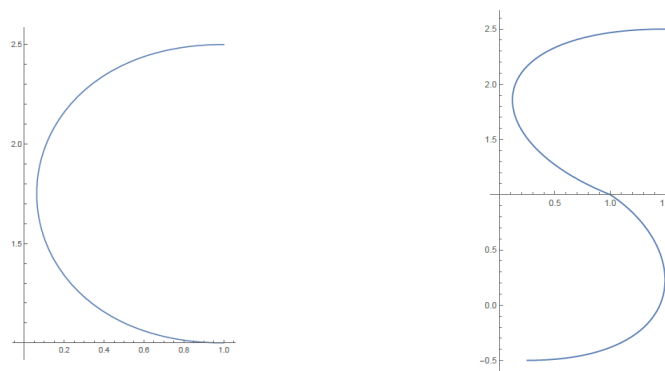
- (б) От фиг. 1.1 можем да видим, че кривата на Безие се определя от контролния си полигон, като минава през първата и последната си контролна точка. Изглежда, че първата и втората контролна точка определят допирателната към кривата в т. $\mathbf{P}_0$. Ще докажем колинеарността на векторите $\overrightarrow{\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3}$ съответно с допирателните вектори $\mathbf{B}'(0)$ и $\mathbf{B}'(1)$. За производната на кубичната крива на Безие получаваме

$$\mathbf{B}'(t) = 3(1-t^2)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0) + 6t(1-t)(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) + 3t^2(\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2). \quad (1.2)$$

Замествайки за $t = 0$ и $t = 1$, получаваме колинеарността на допирателните вектори и векторите $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$.

- (в) За да получим буквата "С", избираме контролни точки, аналогично на контролните точки в подточка (а). На фиг. 1.2 можем да видим визуализацията на буквата.
- (г) За да осигурим гладкост между кривите на Безие при образуването на буквата "S" ще използваме равенството (1.2), като поискаме $\mathbf{B}'_1(1) \parallel \mathbf{B}'_2(0)$, където $\mathbf{B}_1(t)$ и $\mathbf{B}_2(t)$ са кубични криви на Безие съответно за $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ и $\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_5, \mathbf{P}_6$. Последното е еквивалентно на съществуването на параметър λ , за който $\mathbf{B}'_1(1) = \lambda \mathbf{B}'_2(0)$. Замествайки, получаваме условието

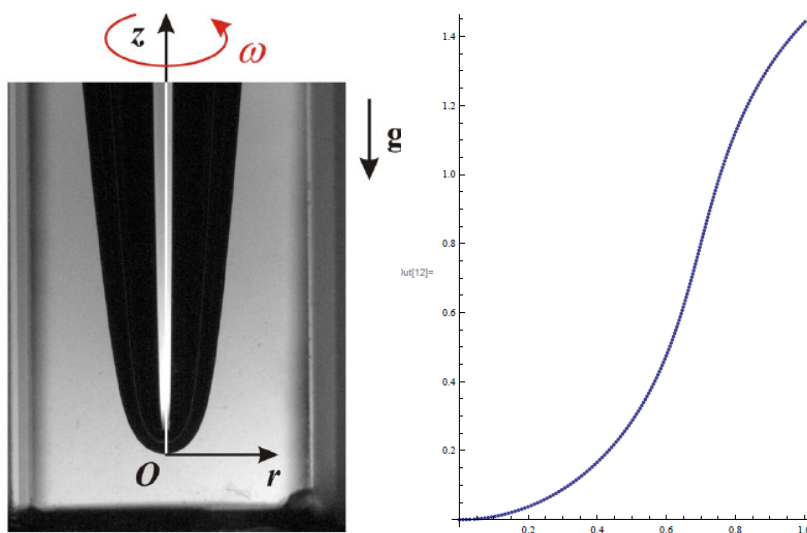
$$\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2 = \lambda(\mathbf{P}_4 - \mathbf{P}_3).$$



Фигура 1.2: Приложение на кубичните криви на Безие.

□

Параметричните криви служат за описване на формата на различни обекти. Представянето на параметричната крива обаче често зависи от физичните закони, с които тя се определя. В следващата задача ще визуализираме кривата, която описва формата на осевосиметрична капка.



Фигура 1.3: Моделиране на формата на осевосиметрична капка.

Тя трябва да бъде решение на следната система диференциални уравнения.

Задача 3. Да се реши системата

$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= \cos \theta, \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} &= \frac{2}{b} - \frac{\sin \theta}{r} + \epsilon_g B z, \\ r(0) &= z(0) = \theta(0) = 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

където r и z задават пространствените координати на кривата в равнината Orz (виж фигура 1.3), s е естественят параметър на кривата (т.е. дължината на кривата от началото на координатната система до точката $(r(s), z(s))$, θ е ъгълът, който допирателната в точката сключва с Or , b е радиусът на кривина във върха на капката, а B (число на Бонд) определя физичните характеристики на капката. Числото ϵ_g показва накъде е насочена силата на тежестта спрямо координатната система (ако $\epsilon_g = -1$ силата на тежестта е насочена обратно на положителната посока на Oz , а при $\epsilon_g = 1$, силата на тежестта е в положителната посока на Oz).

За решаването на системата ОДУ използвайте следните параметри:

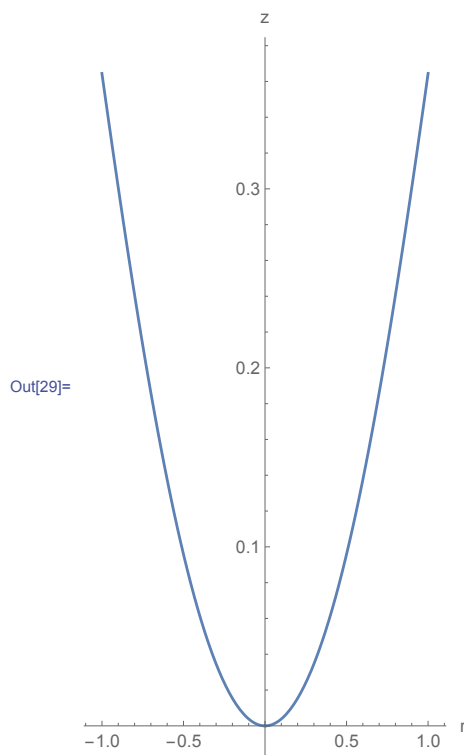
$$\frac{1}{b} = \frac{10}{13}, \epsilon_g = -1, B = 2.4.$$

Да обърнем внимание, че последното уравнение в системата има особеност при $s = 0$, тъй като $r(0) = 0$ участва в знаменателя в дясната страна. Като пресметнем границата на дясната страна при $s \rightarrow 0$, можем да дефинираме

$$\left. \frac{d\theta}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{b}.$$

Забележка: Да се визуализира кривата до достигане на радиуса на капиляра, т.е. до $r(t) = 1$.

Решение. За да решим горната система, използваме вградената функция в Mathematica `NDSolve` и получаваме следния резултат:



□

Вече показахме приложението на векторни функции на скаларни променливи за описване на криви в равнината. Сега ще видим пример за това как можем да представим една физическа система с тяхна помощ. За целта ще разгледаме системата хищник-жертва от популационната динамика, която се моделира с обикновени диференциални уравнения, описващи изменението на популациите на хищниците и жертвите в дадена екосистема.

Задача 4. Да се намери векторната функция $\mathbf{u} = (N(t), P(t))^T$, която е решение на системата:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - P \frac{aN}{b+N}, \\ \frac{dP}{dt} &= -cP + \lambda P \frac{aN}{b+N}\end{aligned}\tag{2}$$

съответно с параметри:

(i) $r = 1, K = 3, b = 1, a = 3, \lambda = 1, c = 2, P_0 = 3, X_0 = 5$;

(ii) $r = 1, K = 10, b = 1, a = 3, \lambda = 1, c = 2, P_0 = 3, X_0 = 5$.

За тази цел:

- (а) визуализирайте решението за всяко едно от неизвестните $P(t)$ и $N(t)$ по отношение на времето t ;

(б) визуализирайте параметричната крива $\mathbf{u}(t) = (N(t), P(t))^T$.

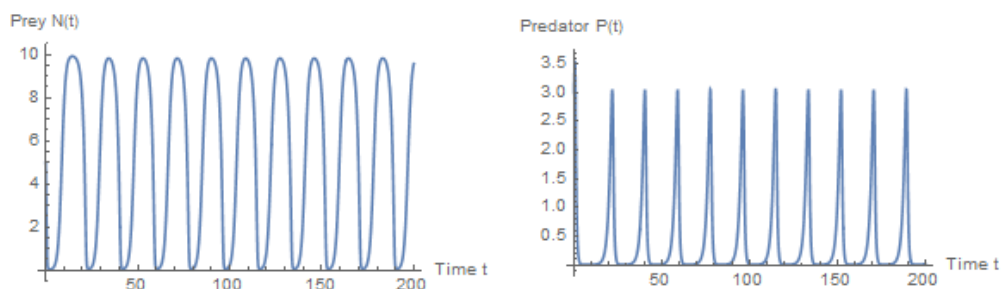
Забележка: Системата (2) може да бъде записана във вида

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} N \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rN(1 - \frac{N}{K}) - P \frac{aN}{b+N} \\ -cP + \lambda P \frac{aN}{b+N} \end{pmatrix}.$$

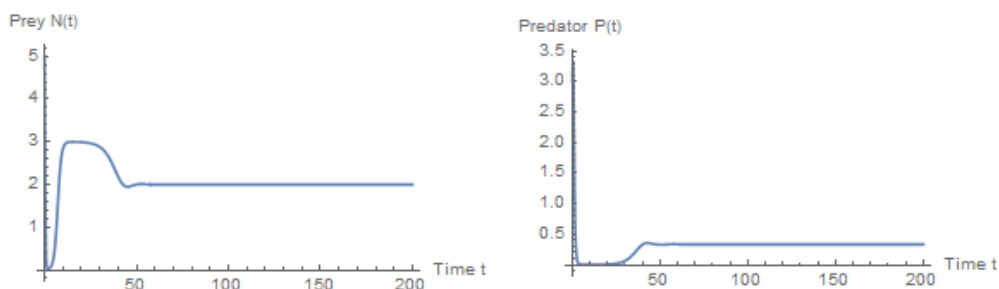
Четири члена в десните страни на уравненията отразяват следните допускания:

- Логистичен растеж на популацията на жертвите в отсъствието на хищници ($rN(1 - \frac{N}{K})$);
- Консумацията на единица хищник е ограничена. В случая се използва функцията на Холинг от тип II, $\frac{aN}{b+N}$;
- Растежът на хищниците е пропорционален на тяхната консумация с коефициент на пропорционалност λ ;
- Смъртността на хищниците е константа на единица хищник.

Решенията на системата за двата различни избора на параметрите (i), (ii) описват две различни поведения в зависимост от избора на капацитета на екосистемата K . Визуализация на решението можем да направим като начертаям графиките на $N(t)$ и $P(t)$ спрямо времето:

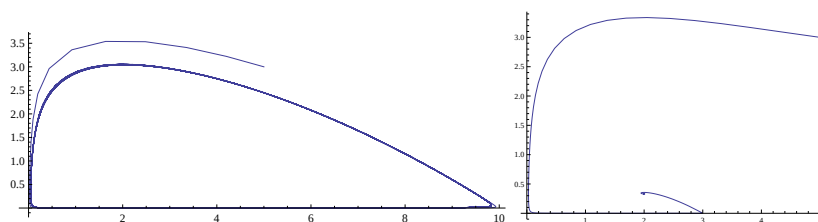


(а) Периодично решение за избор на параметрите (i).



(б) Устойчиво решение за избор на параметрите (ii).

или начертаям параметричната крива, отговаряща на решението $\mathbf{u}(t) = (N(t), P(t))^T$ върху равнината O_{NP} :



Фигура 1.5: Параметрични криви описващи решението на системата – периодично (вляво) и устойчиво (вдясно).

В първия случай двете популации съществуват взаимно, като техните числености периодично осцилират. Във втория случай системата достига равновесно състояние, т.е. след достатъчно дълъг период от време двете популации достигат определени числености, които теоретично могат да се поддържат неопределен период от време. Разбира се, на практика това означава, че численостите ще флукутират (т.е. ще са налични “малки” изменения) около тези равновесия.

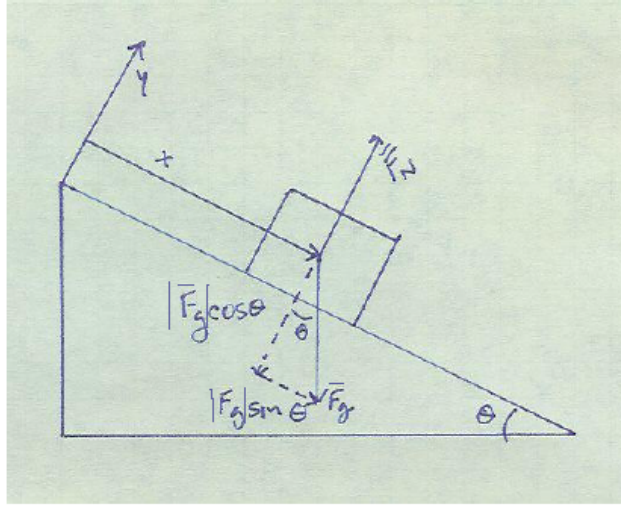
1.2 Движение на частица. Нютонова механика. Кривина

Основните величини, които описват движението на една частица, са нейната позиция, скорост и ускорение. В настоящото упражнение ще опишем движението на частици в пространството, подложени на различни сили. За тази цел ще използваме втория закон на Нютон. Когато решаваме задачи от Нютоновата механика, ще следваме няколко основни последователни стъпки:

- Направете скица на модела, нарисуйте всички сили като вектори, действащи върху обекта;
- Дефинирайте координатна система, в която движението на частицата ще бъде удобно за моделиране;
- Намерете резултантната сила, като разгледайте всяка сила покомпонентно;
- Наложете ограниченията към задачата (начални, гранични условия или други съображения).

Задача 5. Изведете математическия модел, описващ движението на блокче с маса m по наклонена равнина с и без наличието на сила на триене $\mathbf{F}_f$. Забележка: Установено е експериментално, че големината на $\mathbf{F}_f$ е пропорционална на големината на $\mathbf{F}_N$, т.е. $|\mathbf{F}_f| = \mu_k |\mathbf{F}_N|$, където μ_k е коефициент на триене и зависи от триещите се повърхности.

- (а) Нека разгледаме задачата без наличие на сила на триене. В този случай на нашето блокче ще действат само силата на тежестта и нормалната реакция на опората. Нека направим скица към задачата:



Преди да изведем модела, ще дефинираме координатната система по следния начин: Ox ще сочи надолу по повърхността на наклона, а Oy ще бъде перпендикулярна на повърхността на наклона. Разлагайки силите покомпонентно имаме: $\mathbf{F}_N = (0, F_{N,y})^T$ и $\mathbf{F}_g = (mg \sin \theta, -mg \cos \theta)^T$. Оттук резултантната сила е $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_N = (mg \sin \theta, -mg \cos \theta + F_{N,y})^T = (mg \sin \theta, 0)^T$. В последното равенство използвахме факта, че нормалната реакция на опората точно компенсира y -компонентата на силата на тежестта.

Използвайки втория закон на Нютон $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ получаваме уравнението

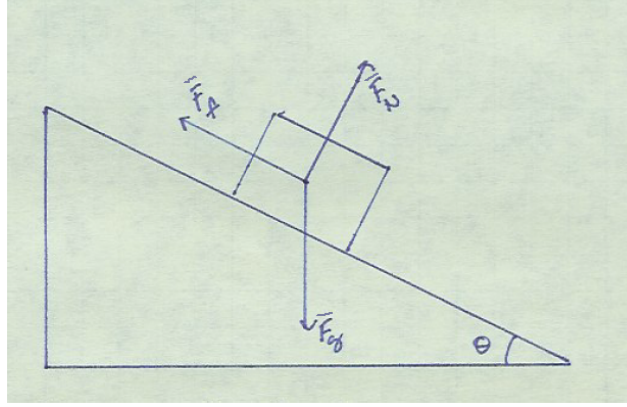
$$\mathbf{a} = (g \sin \theta, 0)^T.$$

Последното е еквивалентно на следното векторно уравнение за скоростта $\mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За да затворим системата, трябва да наложим начални условия $v_x(0) = v_{x,0}$ и $v_y(0) = v_{y,0}$. Ако приемем например, че в начален момент скоростта на блокчето е била нула, то $(v_x(0), v_y(0))^T = \mathbf{0}$.

- (б) Нека сега разгледаме случая, когато на блокчето действа и допълнителна сила на триене. Силата на триене ще действа в обратна на движението посока.



Аналогично на предишната подточка, но добавяйки силата на триене, за която $\mathbf{F}_f = (-F_{f,x}, 0)^T$, получаваме следната система:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta - F_{f,x}/m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta - \mu_k F_{N,y}/m \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Снаряд е изстрелян под ъгъл α от дадена точка с начална скорост v_0 . Използвайки модела, изведен на лекции, направете симулация при $v_0 = 20 \text{ m/s}$ и $\alpha = \pi/6$, като съпротивлението на въздуха се пренебрегне/се вземе предвид. В случая, когато съпротивлението на въздуха се пренебрегва, намерете:

- каква е най-високата точка, която снарядът е достигнал;
- след колко време и на колко метра от началото ще падне снаряда.

Задачата да се реши с и без наличието на сила на съпротивление на въздуха, ако големината на силата на съпротивление е равна на $0.01\|\mathbf{v}(t)\|^2$.

Решение. Нека разгледаме задачата без наличие на съпротивление. Както знаем (виж лекция 2), скоростта и позицията на снаряда, са съответно:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - gt\hat{\mathbf{j}} \quad (1.4)$$

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} = \|\mathbf{v}_0\|t \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + \left(\|\mathbf{v}_0\|t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{\mathbf{j}}. \quad (1.5)$$

Да означим $\|\mathbf{v}_0\| =: v_0$. Тогава уравнението (1.4) е еквивалентно на

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha - gt \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

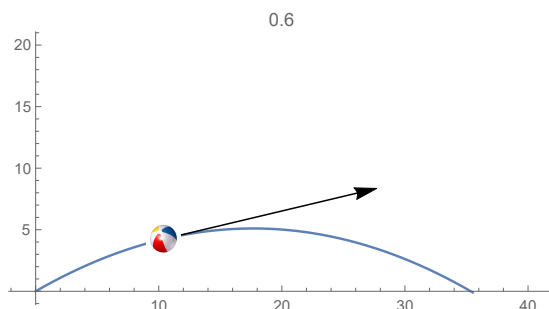
- (а) За да определим максималната височина на снаряда, трябва да е изпълнено $v_y = 0$. От последното определяме $t_{\max} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$. Следователно максималната височина на снаряда ще бъде $y_{\max} = y(t_{\max})$.

- (б) За да определим след колко време ще падне снарядът, трябва да намерим времето $t \neq 0$, за което втората компонента на вектора $\mathbf{r}(t)$ е 0, т.е.

$$\|\mathbf{v}_0\|t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

От горното уравнение получаваме, че $t_{max} = \frac{2\|\mathbf{v}_0\| \sin \alpha}{g}$.

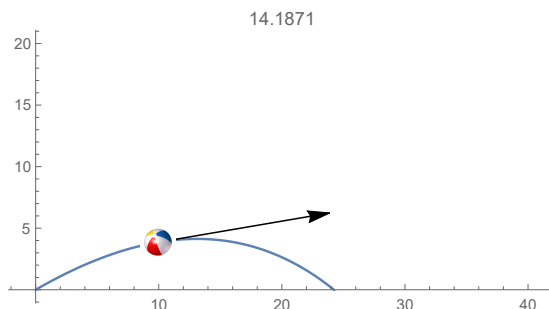
- (в) За анимиране на движението на снаряда използваме системата *Wolfram Mathematica*. Например за $t = 0.6$ получаваме



- (г) От лекции знаем, че движението на снаряда при отчитане на съпротивлението може да се опише с диференциалното уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \mathbf{g} - \frac{0.01\|\mathbf{v}\|^2}{m} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}. \quad (1.7)$$

За да намерим решението $\mathbf{v}(t)$, позицията на снаряда $\mathbf{r}(t)$ и да визуализираме движението на снаряда използваме отново системата *Wolfram Mathematica*. Примерно решение може да намерите в *Упражнение2.nb*. Например в момент $t = 0.6$ имаме



В този случай в диференциалното уравнение, описващо движението на снаряда, единият член съдържа масата на снаряда m . За горната визуализация е използвано $m = 0.5$. Заради действието на силата на съпротивление, снарядът се движи по-малко време и изминава по-малко разстояние. Ако m е достатъчно голямо, тогава силата на съпротивление ще бъде пренебрежима и снарядът ще измине на практика също толкова голямо разстояние, както без наличие на сила на съпротивление.

□

Задача 7. Частица с маса m виси на пружина, закачена вертикално за дадена опора. Използвайте изведения модел на лекции и:

- (а) определете за коя начална позиция на частицата пружината системата ще бъде в равновесие;
- (б) визуализирайте решението на диференциалното уравнение при пренебрегване на силата на съпротивление, начални условия $x(0) = 0.07$ и $x'(0) = 0$ и параметри $m = 60 \text{ g}$ и $k = 14.2 \text{ kg/s}^2$.

Забележка: За силата на съпротивление на въздуха е известно, че $F_{drag} = -\lambda \frac{dx}{dt} = -\lambda v$, като за големи скорости $F_{drag} = -\lambda (\frac{dx}{dt})^2 = -\lambda v^2$.

Решение. От лекции знаем, че движението на частицата се описва с диференциалното уравнение:

$$m\ddot{x} = mg - kx.$$

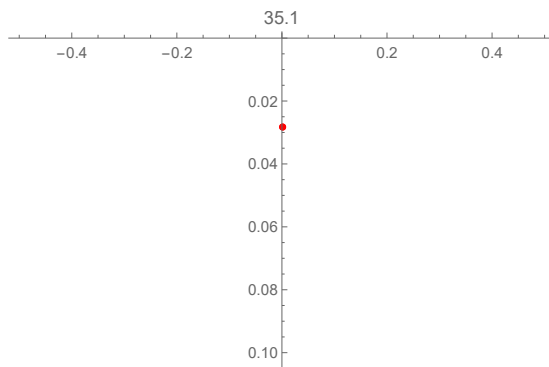
В разглеждания модел сме избрали силата на тежестта да бъде еднопосочна с положителната посока на оста x .

- (а) За да определим началното положение на частицата така, че системата да бъде в равновесно състояние, е достатъчно да намерим за коя стойност на x ускорението на частицата е 0. Имаме

$$mg - kx_0 = 0 \quad x_0 = \frac{mg}{k},$$

откъдето следва, че ако частицата е с начално положение $x_0 = \frac{mg}{k} \approx 0.415m$, то системата ще бъде в покой.

- (б) Отново използваме системата *Mathematica*, за да намерим и визуализираме решението (вж. *Упражнение2.nb*). За $t = 35.1$ получаваме



Без наличие на сила на съпротивление, частицата осцилира около равновесното положение на пружината неограничено време.

□

Често при изграждане на железопътни линии е необходимо да се свържат два участъка по такъв начин, че ускорението на влака, който ще мине по линията да бъде непрекъснато. Както знаем (виж лекциите) всяко ускорение може да се разложи по тангенциално и нормално направление:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nu' \mathbf{T} + \kappa \nu^2 \mathbf{N},$$

където $\nu = \|\mathbf{v}(t)\|$ и $\mathbf{v}(t)$ е скоростта на обекта, чието движение разглеждаме.

Горното уравнение още показва, че независимо как един обект се движи, ускорението му винаги лежи в допирателната равнина, определена от $\mathbf{T}$ и $\mathbf{N}$.

Последното е особено удобно при движение върху криволинейна траектория. От него следва, че за да бъде ускорението непрекъснато, то всяка една от компонентите му трябва да бъде непрекъсната или иначе – да има непрекъсната кривина. Кривината в дадена точка е мярка за това колко “крива” може да бъде една крива. По дефиниция кривината на една крива се задава като

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad (1.8)$$

Ако в дадена точка “поставим” окръжност със същата кривина, както на нашата крива, то радиусът ѝ ще наричаме радиус на кривина.

От горното представяне следва, че за да бъде непрекъснато ускорението на влака, то трябва неговата кривина да бъде непрекъсната. Такава крива, които свързва двата участъка ще наричаме *transfer curve*. Нека сега разгледаме следващата задача.

Задача 8. Изведете формулата за кривината на равнинна крива, зададена с $y = f(x)$ и намерете полином от пета степен, който да служи като transfer curve между правите $y = 0$ при $x \leq 0$ и $y = x$ при $x \geq 1$.

Решение. Както отбелязахме за кривината на кривата описана с $\mathbf{r}(x) = (x, f(x))^T$. е в сила (1.8). За нашата равнинна крива са в сила следните уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(x)}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'^2(x)}} \right)^T \\ \frac{d\mathbf{T}}{dx} &= \left(\frac{-f'(x)f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}, \frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}} \right)^T \\ \frac{d\mathbf{r}}{dx} &= (1, f'(x))^T \\ |\mathbf{T}'(x)| &= \sqrt{\frac{f''^2(x)(1+f'^2(x))}{(1+f'^2(x))^3}} = \frac{|f''(x)|}{1+f'^2(x)} \\ |\mathbf{r}'(x)| &= \sqrt{1+f'^2(x)} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заместваме в (1.8) и получаваме, че за равнинната крива е в сила:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{3/2}}. \quad (1.10)$$

Нека означим търсеният полином с $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$. За да определим еднозначно полинома трябва да изберем неговите коефициенти. Очевидно, за да бъде непрекъсната кривината на полинома в точките $x = 0$ и $x = 1$, то кривината в точките трябва да е равна съответно на кривината на правите. Както знаем, кривината на права е 0, откъдето следва, че кривината на полинома в точките 0 и 1 трябва да има стойност 0. От друга страна стойността на полинома и правите в точките 0 и 1, както и на техните производни, трябва да бъде равна, за да бъде кривата в тези точки непрекъсната и гладка. Така получаваме следната задача за Ермитова интерполация:

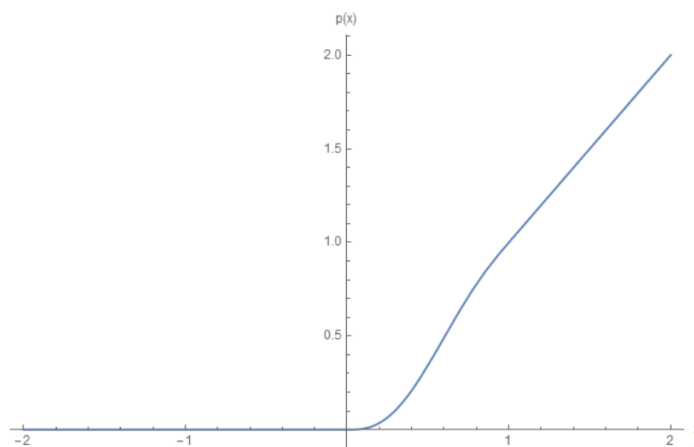
$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p'(0) = 0, \quad p'(1) = 1, \quad p''(0) = 0, p''(1) = 0,$$

или еквивалентната система

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 1 \\ a_1 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 1 \\ a_2 &= 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 0 \end{aligned}$$

Решавайки горната система по отношение на коефициентите $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, намираме полинома от 5-та степен:

$$p(x) = 6x^3 - 8x^4 + 3x^5.$$



Фигура 1.6: Графика на полинома $p(x)$.

□

1.3 Скаларна функция на векторен аргумент

В реалния свят физичните величини, които разглеждаме, често са функции на две или три пространствени променливи. В това упражнение ще

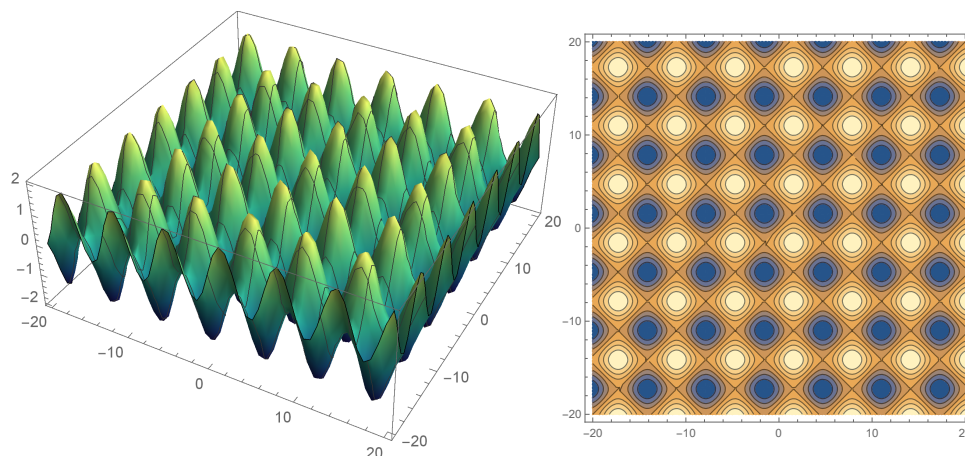
разгледаме само функции на две пространствени променливи, заради полесната им визуализация. Два основни начина да се визуализира функция е като се начертае нейната графика като множество от точки $(x, y, f(x, y))$, където (x, y) принадлежат на дефиниционно множество на f или като се нарисуват така наречените линии на ниво. Линиите на ниво са криви от дефиниционното множество, за които функцията има една и съща стойност, т.е. кривите, за които $f(x, y) = k$ (множеството от всички точки, за които графиката на функцията има височина k). Нека визуализираме графиките на две функции.

Задача 9. Да се начертаят графиките и съответните линии на ниво на функциите

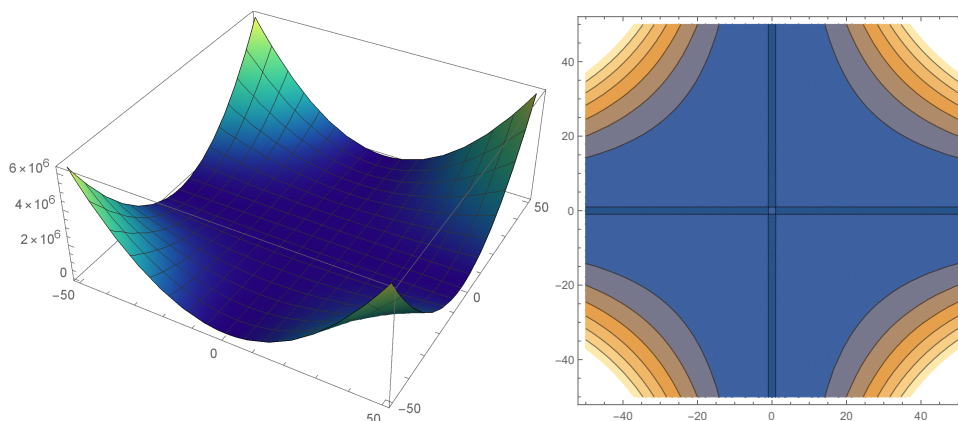
(а) $f(x, y) = \sin x - \sin y$;

(б) $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$.

Решение. В *Mathematica* за визуализиране на функции на две променливи могат да се използват вградените функции *Plot3D* и *ContourPlot*. Визуализираме двете графики и получаваме



Фигура 1.7: Графика и линии на ниво на функцията $f(x) = \sin x - \sin y$.



Фигура 1.8: Графика и линии на ниво на функцията $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$

От графиките на фиг.1.7 и фиг.1.8 виждаме, че когато графиката на функцията е “стръмна”, линиите на ниво са много близки, а когато графиката расте по-бавно линиите на ниво са на по-голямо разстояние една от друга. $\square$

След като разгледахме двата основни начина за визуализиране на графика, нека сега въведем понятието граница. За разлика от границите на функции на една променлива, където една стойност се достига отгоре или отдолу (лява и дясна граница), в този случай точката (a, b) може да бъде достигната по безброй много различни пътища. Следователно, ако съществуват два различни пътя, по които функцията приема различни гранични стойности, то границата не съществува. За да покажем, че за дадена функция граница не съществува, ще използваме следното

Твърдение 1. Ако $f(x, y) \rightarrow L_1$, $(x, y) \rightarrow (a, b)$, $(x, y) \in C_1$ и $f(x, y) \rightarrow L_2$, $(x, y) \rightarrow (a, b)$, $(x, y) \in C_2$, където $L_1 \neq L_2$, то тогава $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ не съществува.

Задача 10. Покажете, че границите не съществуват.

(а) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(б) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Решение. За да покажем, че границите не съществуват, ще намерим два различни пътя, съдържащи т.(0, 0), по които функцията приема различни стойности.

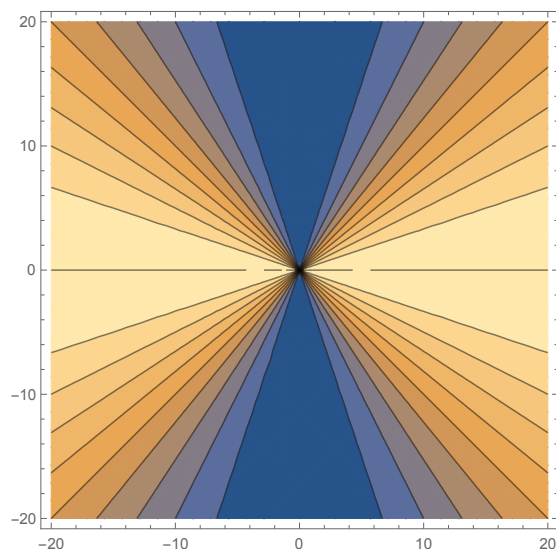
(а) Нека $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Фиксираме $y = 0$ и достигаем т.(0, 0) по оста Ox .
Имаме

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1, \forall x \neq 0.$$

Сега да фиксираме $x = 0$ и да се движим по Oy . Получаваме

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1, \forall y \neq 0.$$

Получихме, че функцията приема различни стойности по две различни криви, приближавайки по тях т. $(0, 0)$, следователно тя не съществува.



Фигура 1.9: Линии на ниво на функцията $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Както виждаме от графиката, точката $(0,0)$ се достига по различни линии на ниво, което потвърждава, че функцията няма граница в тази точка.

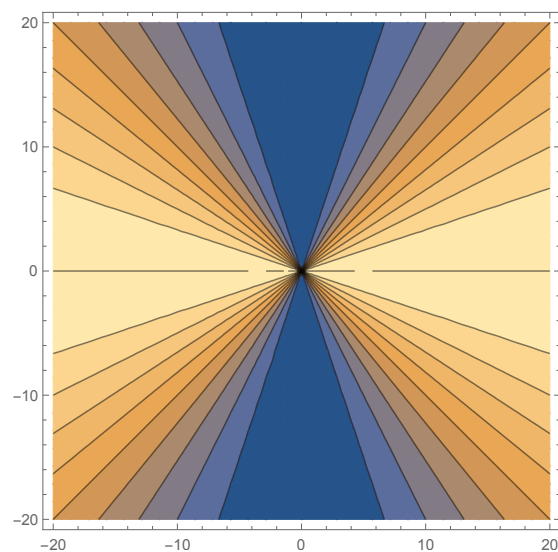
(б) Аналогично на предишната подточка получаваме

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0.$$

Нека сега разгледаме правата $y = x$. Тогава

$$\lim \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отново получихме различни граници по два пътя, съдържащи т. $(0,0)$, откъдето границата не съществува. Аналогично на горния пример, можем да потвърдим, че границата не съществува, като разгледаме графиката



Фигура 1.10: Линии на ниво на функцията $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

□

В следващата задачата ще дадем хипотеза за стойността на дадена граница и ще използваме дефиницията, за да докажем, че тя съществува.

Задача 11. Направете хипотеза за стойността на

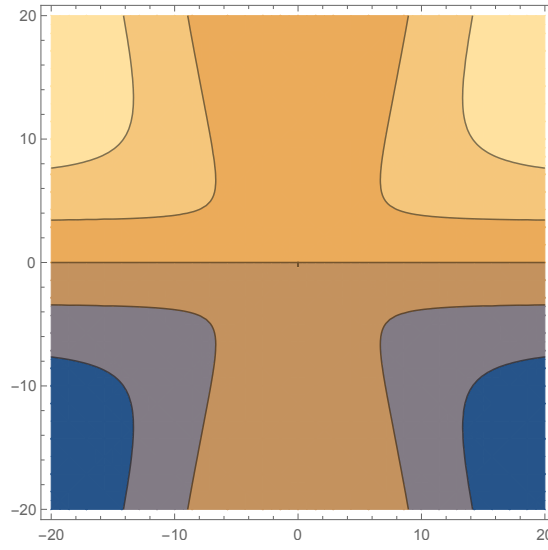
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$$

и използвайте $\epsilon - \delta$ дефиницията, за да я докажете.

Решение. Нека $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$. Тъй като

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

можем да предположим, че ако границата $\exists$, то тя е 0. Наистина, ако разгледаме графиката



Фигура 1.11: Линии на ниво на функцията $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

можем да забележим, че в околност на точката $(0,0)$ функцията приема една и съща стойност.

Ще използваме дефиницията за граница. Искаме да покажем, че

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon)$$

такова, че щом

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \text{ то } |f(x, y) - 0| < \epsilon.$$

Фиксираме $\epsilon > 0$. Искаме да намерим δ , за което $\left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \epsilon$. Последното е еквивалентно на

$$\left| \frac{3x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{3x^2 |y|}{x^2 + y^2} < \epsilon \Leftrightarrow 3|y| < 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon.$$

Ако изберем $\sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\delta}{3}$, то $|f(x) - 0| < 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$.

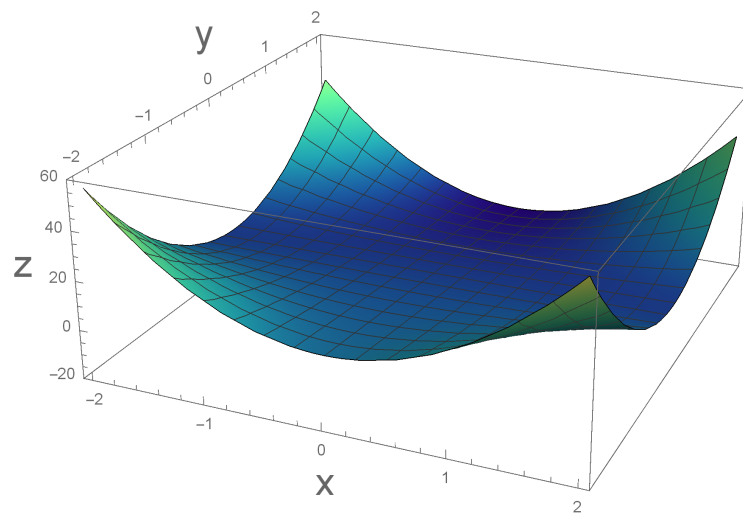
□

Естествено е, след като вече сме разгледали понятието граница, да въведем и понятието производна. Нека първо разгледаме частните производни по отношение на променливите x и y .

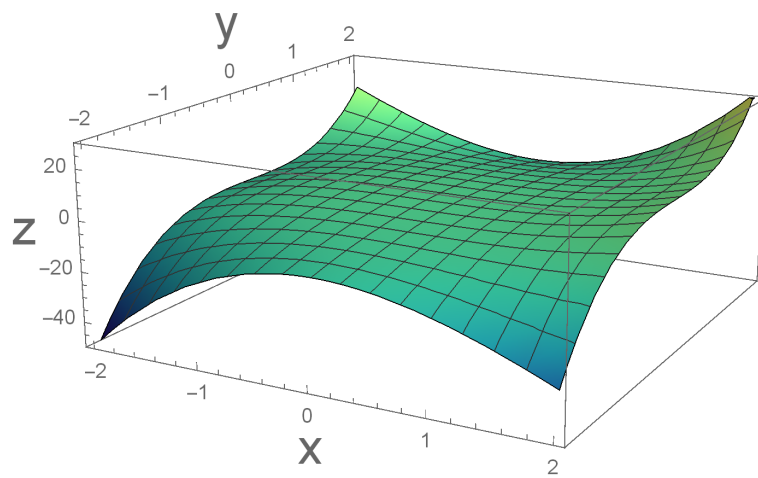
Дефиниция 1. Границите $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$ (ако те съществуват) ще наричаме частни производни на функцията $f(x, y)$ съответно по x и по y .

В следващата задача ще използваме дефиницията за двете производни, за да определим как са свързани техните графики с тази на функцията $f(x, y)$.

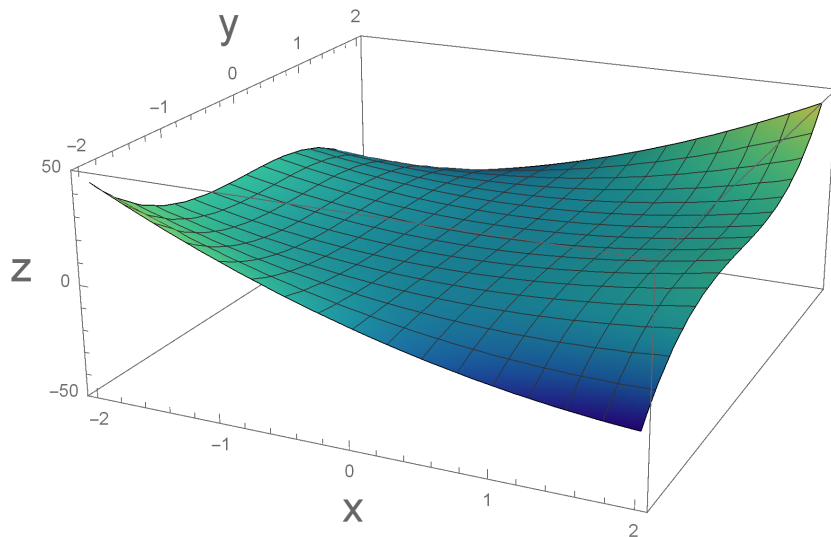
Задача 12. Следните три графики визуализират дадена функция и двете ѝ частни производни. Преценете коя от графиките коя е.



Фигура 1.12



Фигура 1.13



Фигура 1.14

Решение. Нека първо определим коя от трите е графиката на функцията $f(x, y)$. Да предположим, че тя е графиката на фиг. 1.12. Нека фиксираме $y = -2$. От графиката се вижда, че при $x \in [-2, 0]$ функцията нараства и след това в интервала $[0, 2]$ намалява. Оттук следва, че при фиксирано $y = -2$ производната по x в трябва да приема положителни стойности в интервала $[-2, 0]$ и отрицателни в интервала $[0, 2]$. Оттук може да предположим, че графиката на f'_x е всъщност тази на 1.13. За да сме сигурни, че това е така, ще проверим дали графиката на f'_y съответства на първата графика. Нека на фиг. 1.12 фиксираме $x = 2$. В този случай се вижда, че кривата, отговаряща на $x = 2$, нараства. В такъв случай производната f'_y за $x = 2$ трябва да бъде положителна за всяко y в интервала $[-2, 2]$, което отговаря и на случая във фиг. 1.12. $\square$

Една от основните идеи на анализа на функции на една променлива е, че ако се приближим достатъчно близо до графиката на една функция в околност на дадена точка, то функцията и нейната допирателна стават неразличими. Аналогично, за функции на две променливи, ще забележим, че повърхнината в околност на дадена точка може да бъде приближена с равнина, т.е. с линейна функция на две променливи. Както знаем (виж лекциите) линейна апроксимация на функцията $f(x, y)$ в т. (x_0, y_0) можем да зададем като

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bigg|_{(x_0, y_0)} \cdot (x - x_0, y - y_0)^T + O(|z|). \quad (1.11)$$

Задача 13. Да се линеаризира функцията $f(x, y) = \ln(x-2y)$ около т.Р(3,1,0) и да се визуализира повърхнината заедно с допирателната равнина.

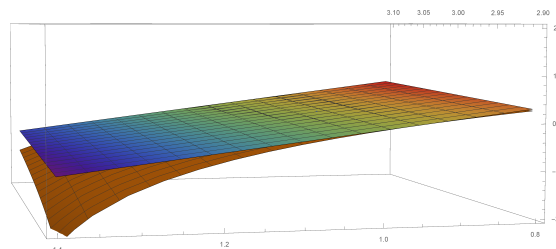
Решение. Да пресметнем частните производни, взети в точката P . Имаме

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{(3,1)} &= \frac{1}{x-2y}\bigg|_{(3,1)} = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{(3,1)} &= \frac{-2}{x-2y}\bigg|_{(3,1)} = -2.\end{aligned}$$

Замествайки в (1.11), получаваме линеаризацията

$$f(x, y) = (1, -2)(x - 3, y - 3)^T = x - 2y - 1.$$

Използваме системата *Mathematica*, за да визуализираме линеаризацията на функцията



Ако разглеждаме функцията и линеаризацията в много малка околност на точката P , на практика те ще станат неразличими. $\square$

Частните производни дават наклона на допирателната към кривата, която се получава при пресичането на $z = f(x, y)$ и вертикална равнина при фиксирано y и x съответно. За да разберем как се изменя графиката на функцията $z = f(x, y)$ в произволна посока, ще въведем понятието **производна по посока**.

Дефиниция 2. Производна на функцията $f(x, y)$ по посока на единичния вектор $\mathbf{u} = (a, b)^T$ ще наричаме границата

$$D_{\mathbf{u}}f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + ha, y + hb) - f(x, y)}{h}. \quad (1.12)$$

За да пресметяме производната по посока на една функция, ще използваме следното

Твърдение 2. За производната на функцията f по посока на единичен вектор $\mathbf{u}$ е в сила

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f \cdot \mathbf{u}. \quad (1.13)$$

Задача 14. Дадена е функцията $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ и равнина, перпендикулярна на равнината Oxy , минаваща през точките $P(2, 1)$ и $Q(3, 2)$. Намерете какъв е наклонът на допирателната към кривата C , получена при пресичането на повърхнината $z = f(x, y)$ и равнината в т. $(2, 1, 17)$.

Решение. За да намерим наклона на допирателната в точката $(2,1,17)$, нека забележим, че аргументите се изменят по направление на вектора $\mathbf{PQ}$. Тогава трябва да намерим производната по посока на единичен вектор с начало P , еднопосочен с $\mathbf{PQ}$. Имаме

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \mathbf{u} = (16,2) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 9\sqrt{2}.$$

□

Задача 15. Според закона на Нютон за гравитацията, гравитационната сила между два обекта с маса m , разположена в точката (x, y, z) и M , разположена в началото на координатната система, е равна на

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r},$$

където $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ и $\|\mathbf{r}\|$ е разстоянието между двата обекта, а G е гравитационната константа. Покажете, че F е градиентът на функцията $f(x, y, z) = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|}$.

Решение. Да разгледаме функцията $f(x, y, z) = \frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|} = \frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Градиентът на функцията f е $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T$. Нека пресметнем всяка от неговите компоненти поотделно. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{GMm}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} x = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{GMm}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} y = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} y, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -\frac{GMm}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} z = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} z. \end{aligned}$$

Получаваме

$$\nabla f = \left(-\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} x, -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} y, -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} z \right) = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} (x, y, z) = -\frac{GMm}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}.$$

□

1.4 Векторна функция на векторен аргумент

В настоящото упражнение ще илюстрираме работата с векторни функции. Ще разгледаме три важни приложения на векторните функции – векторно поле, описващо потока на вещество, силово поле и векторно поле, описващо скоростта на даден флуид във всяка точка от дадена крайномерна област.

Задача 16. Визуализирайте градиентното поле, което описва дифузионния поток в уравнението от тип реакция-дифузия от предното упражнение. Определете дивергенцията в дадена точка, като се нарисова кръгче около точката. Нарисувайте линиите на ниво на функцията описваща топлината.

Решение. За да изразим дифузионния поток, ни интересува

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T$, където u описва концентрацията на вещество в дадената област Ω . Използваме решението от предходната задача, за да намерим градиента на u и визуализираме векторното поле. Решението на задачата може да видите в *Упражнение 4.nb*. $\square$

Задача 17. Нека са дадени електричен заряд Q , който се намира в началото на декартова координатна система, и електричен заряд q , който се намира в точка $\mathbf{x} = (x, y)^T$. Според закона на Кулон, електричната сила $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, която зарядът Q оказва на q се задава с

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon q Q}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x},$$

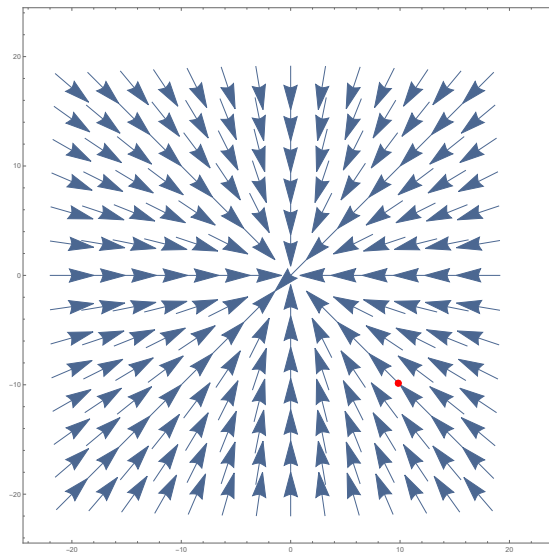
където ϵ е константата на Кулон, $\epsilon \approx 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$.

Визуализирайте силовото поле, което се поражда от силата $\mathbf{F}$, като се използват параметрите $q = -1.6 \times 10^{-19}C$, $Q = 5 \times 10^{-19}C$. Да се направи анимация на движението на частица в силовото поле, ако тя има маса $m = 9 \times 10^9 kg$, начална позиция $\mathbf{x} = (10, 15)^T$ и начална скорост $\mathbf{v} = (0, 0)^T$. Каква е дивергенцията на векторното поле?

Решение. За да опишем движението на частицата, ще използваме втория закон на Нютон. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} &= \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{\epsilon q Q}{m \|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}, \\ \mathbf{x}(0) &= (0, 0)^T, \\ \mathbf{v}(0) &= \mathbf{x}'(0) = (0, 0)^T. \end{aligned}$$

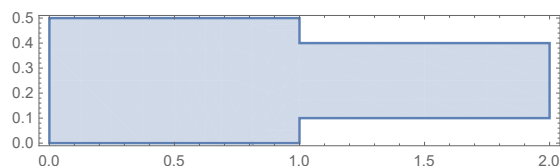
Ще използваме вградената функция в Mathematica *NDSolve*, за да намерим решението на горната диференциална задача и ще визуализираме траекторията на частицата във всеки момент от време, докато не достигне до заряда, който я привлича, и се намира в центъра на координатната система.



□

В следващата задача ще разгледаме векторна функция, която описва скоростта на даден флуид.

Задача 18. Разгледайте *Stokes_flow_in_a_channel.nb*, в който са решени уравненията на Стокс за симулиране на стационарен поток в стесняващ се канал, който има следната геометрия:

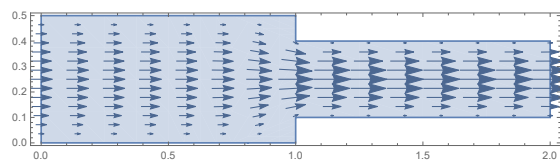


Като използвате получените резултати:

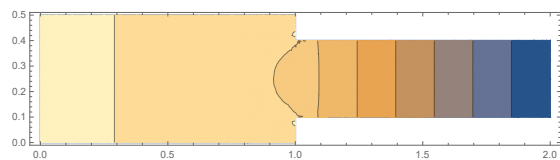
- (а) визуализирайте полето на скоростта на потока;
- (б) визуализирайте налягането в канала.

Определете какви са математическите обекти, които описват двете величини.

Решение. След решаване на системата уравнения на Стокс, като резултат получаваме полето на скоростта на потока $(xvel(x, y), yvel(x, y))^T$ и налягането в канала, описано от скаларна функция на векторен аргумент. За да визуализираме потока, ще използваме функцията *VectorPlot*, а за да визуализираме налягането ще използваме вградената функция *ContourPlot* в системата *Mathematica*.



Фигура 1.15: Векторното поле на стационарния поток на Стокс.



Фигура 1.16: Налягането като скаларна функция на векторен аргумент.

□

1.5 Криволинейни интеграли. Приложение на теоремата на Грийн

В това упражнение ще разгледаме обобщение на класическия интеграл на Риман – криволинейния интеграл. Както знаем (виж лекция 5), криволинейния интеграл се различава от единичния интеграл по интервала на интегриране – вместо да интегрираме върху интервал, интегрираме върху дадена крива C , обикновено зададена аналитично с векторна функция $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $t \in [a, b]$.

Ще започнем със задача за намирането на дължина на крива, зададена параметрично.

Задача 19. Частица се движи по траектория, определена от

$$\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Пресметнете изминатия от нея път.

Решение. За да пресметнем дължината на кривата, ще съберем безкрайно малките дължини ds по кривата C , т.е.

$$L = \int_C ds.$$

За да пресметнем криволинейния интеграл, ще използваме параметризацията на кривата. Имаме

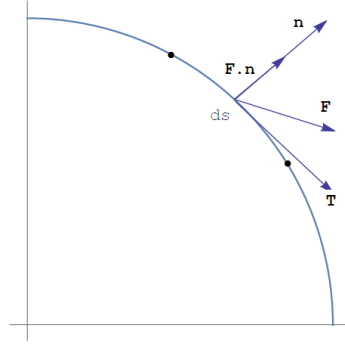
$$\begin{aligned} L &= \int_C ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\sin t} dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = 8. \end{aligned}$$

□

В следващата задача ще използваме криволинейни интегралы, за да пресметнем количеството поток минаващо през граница на затворена област за единица време.

Задача 20. Дадена е областта Ω с гладка граница $\partial\Omega$. Потокът на вещество в Ω се задава с $\mathbf{F}$. Определете как можем да намерим количеството вещество, минаващо през $\partial\Omega$ за единица време. Ако границата на областта се задава параметрично с $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ и $\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, x)^T$, пресметнете това количество.

Да разгледаме потока, който излиза през безкрайно малка дължина от границата $\partial\Omega$.



Да представим вектора $\mathbf{F}$ чрез локалните базисни вектори – $\mathbf{n}$ и $\mathbf{T}$. Както можем да видим от фигурата, компонентата на потока по тангенциално направление е частта от потока, която ще остане в областта Ω . Следователно се интересуваме от тази част от потока, която е в нормално направление, което е проекцията на $\mathbf{F}$ върху $\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Тъй като горното е потока, пресметнат за единица дължина, остава да го умножим по дължината ds и да сумираме върху цялата граница, получихме:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Горният интеграл можем да пресметнем директно или да използваме теоремата на Гаус-Остроградски:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, d\Omega \quad (1.14)$$

Ще пресметнем интеграла по двата начина.

Имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (2 \cos t + \sin t, \cos t)^T; \\ \mathbf{r}(t) &= (\cos t, \sin t)^T; \\ \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t, \cos t)^T; \end{aligned}$$

За да пресметнем интеграла $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds$ ще определим външната нормала по границата

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left(\frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(\mathbf{t})\|}, -\frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(\mathbf{t})\|} \right)^T; \\ \mathbf{n} &= (\cos t, \sin t)^T. \end{aligned}$$

Заместваме в лявата част на (1.14)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \sin t, \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) \|r'(t)\| dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (2 \cos t + \sin t, \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) dt = \\
&= \int_0^{2\pi} (2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t) dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

Нека сега пресметнем интеграла като използваме дясната част на (1.14).

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\Omega &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\Omega \\
&= \iint_{\Omega} 2 d\Omega = 2 \iint_{\Omega} 1 d\Omega = 2\pi,
\end{aligned}$$

където използвахме, че двойният интеграл $\iint_{\Omega} 1 d\Omega$ дава лицето на кръга с радиус 1 и център $(0,0)$.

В следващата задача ще разгледаме едно от основните приложения на теоремата на Грийн – за пресмятане на лица. Нека C и $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))^T$ са крива и векторна функция, които изпълняват условията от теоремата на Грийн. Тогава е изпълнено

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dA.$$

Лицето на затворена област можем да пресметнем с двоен интеграл от 1 или

$$\operatorname{Area}_D = \iint_D 1 dA.$$

Нека D е областта затворена от кривата C . Тогава за да намерим лицето на D в горната формула можем да изберем подинтегралната функция да има стойност 1. Няколко избора за функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са

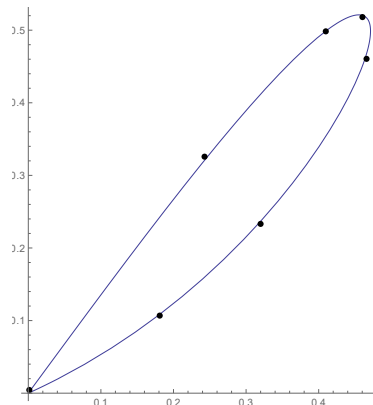
- $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x;$
- $P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0;$
- $P(x, y) = -\frac{1}{2}y, Q(x, y) = \frac{1}{2}x.$

Замествайки във формулата на Грийн получаваме

$$\operatorname{Area}_D = \int_C x dy = - \int_C y dx = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx \quad (1.15)$$

Сега ще използваме полученото в (1.15), за да пресметнем приближено лицето на крива.

Задача 21. Дадена е кривата



Използвайте *Green's_theorem_applications.nb* и пресметнете приближено лицето на областта, заградена от кривата

Решение. За да намерим приближено стойността на лицето на фигурата, заградена от кривата, ще вземем координатите на точките от графиката и ще ги заместим във формулата

$$Area = \int_C x dy,$$

като сумираме за всяка точка стойността на $x dy$. Подробно решение на задачата ще намерите в notebook-а към упражнението. $\square$

Задача 22. Разгледайте в *Youtube* клипчета за linear (rolling) planimeter. Пресметнете пътя, изминат от колелото на планиметъра, и определете как може да се използва той за пресмятане на лицето на фигурата, заградена от проста по части гладка затворена крива.

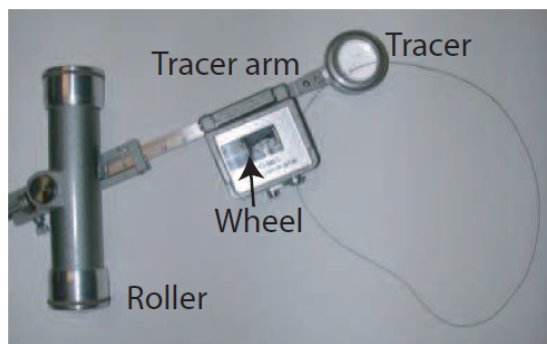
Решение. Линейният планиметър е устройство с помощта, на което могат да се измерват лица на 2D фигури. Същността на работата с планиметър се състои в обхождане на границата на фигурата в посока обратна на часовниковата стрелка, като това обхождане завършва в граничната точка, от която е започнало.

Пример за линеен планиметър може да видите на

<https://www.youtube.com/watch?v=qThV6gTaYMI>

<https://www.youtube.com/watch?v=pvGuGaImTek>.

Линейният планиметър се състои от няколко основни елемента:



Когато линейният планиметър се движи, колелото, което се намира върху рамото му и е разположено перпендикулярно на него, се върти и пътя, който изминава, се записва. Когато линейния планиметър се движи успоредно на оста на колелото, движение не се отчита. Това означава, че когато планиметърът измерва движението на колелото, то отчита само компонентата в посока перпендикулярна на неговото рамо. Оказва се, че всъщност лицето на фигурата е пропорционално на изминатия от колелото път с коефициент на пропорционалност дължината на рамото на планиметъра L . В сила е следното твърдение

Лице на областта $D = L \times$ общ път изминат от колелото.

За доказателството на горното твърдение се използва теоремата на Грийн. Доказателството може да намерите във файла *As the planimeter's wheel turns*, Tanya Leise в секцията *Rolling planimeter*.

□