Теоретични основи на индустриалната математика-1

2018/2019 академична година, зимен семестър

КОНСПЕКТ ЗА ИЗПИТ-ТЕОРИЯ

I. Векторно смятане и приложения

1. Вектори в R^n. Векторни функции на скаларен аргумент

Дефинирайте пространството R^n. Дайте примери за вектори величини и обяснете как те могат да се представят с елементи от R^n. Приведете двете еквивалентни дефиниции за стандартното скаларно произведение в R^n и обяснете за какво се използва. Приведете двете еквивалентни дефиниции за векторно произведение и обяснете за какво се използва. Въведете понятието векторна функция на скаларен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват с такива функции. Въведете понятието граница и докажете, че пресмятането на граници може да става покомпонентно. Въведете понятието производна. Дайте физическа и геометрична интерпретация.

2. Движение по криволинейна траектория

Да се покаже, че ако тяло се движи равномерно по окръжност, на тялото действа центростремителна сила. За произволно криволинейно движение да се изведат тангенциалната и нормалната компоненти на ускорението. За тази цел да се въведат понятията локален базис и кривина на крива.

3. Скаларни функции на векторен аргумент

Въведете понятието скаларна функция на векторен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват от такива функции. Как можем да визуализираме тези функции? Приведете пример. Дефинирайте понятията граница, частна производна, производна по направление. За всяко от тях приведете интуитивна (а, ако е възможно, и геометрична) интерпретация. Изведете линеаризацията на дадена скаларна функция на векторен аргумент. Запишете я в операторен вид. Обяснете какъв е смисълът от линеаризацията. Изведете формула за пресмятане на производна по направление. Дайте геометрична интепретация. Дайте координатно-инвариантна дефиниция за градиент и избройте основните му свойства.

4. Векторни функции на векторен аргумент

Въведете понятието векторна функция на векторен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват от такива функции. Обяснете как се визуализират тези функции. Приведете пример. Дефинирайте понятието граница. Изведете линеаризацията на дадено векторно поле. Опишете накратко метода на Нютон за решаване на нелинейни алгебрични системи. Мотивирайте въвеждането на понятието дивергенция и дайте две дефиниции – в координатна форма (изведете я!) и *координатно-инвариантна. Дайте примери, с които да обясните какво означава дивергенцията на дадено векторно поле да е положителна и какво – отрицателна. Мотивирайте въвеждането на понятието ротация на векторно поле. Дайте дефиниция в координатен вид (изведете я!). Дайте примери, с които да обясните какво означава ротацията на дадено векторно поле да е положителна и какво – отрицателна.*

5. Операторът набла в недекартови координати

Задача: При дадена смяна на координатите и базиса (дефиниран локален базис), да се изведе координатна форма на оператора набла. Например да се изведе оператора в полярни/сферични/цилиндрични координати.

Задача: При дадена координатна форма на оператора набла в дадени координати, да се изведе операторът на Лаплас в същата координатна система.

6. Криволинейни интеграли

Дайте дефиниция за криволинеен интеграл. Обяснете защо можем да го разглеждаме като обобщение на класическия Риманов интеграл. Дайте примери за величини, които могат да се пресметнат с помощта на криволинеен интеграл. Покажете как може да се пресметне работата, извършвана от векторно поле, при движение на тяло по дадена криволинейна траектория. Изведете Основната теорема за криволинейни интеграли.

7. Теорема на Green

Да се докаже теоремата на Green. Като използвате теоремата на Green, формулирайте 2D теоремата на Stokes, формулирайте и докажете 2D теоремата за дивергенцията. Формулирайте двете теореми и в 3D. Дайте интуитивно обяснение на теоремата за дивергенцията.

8. Уравнения на топло- и масо-пренос

Изведете уравнението на непрекъснатостта. Обяснете как се въвеждат точковите харатеристики на дадена непрекъсната среда. Като въведете основните възможни приноси към потока, формулирайте уравненията на дифузията и адвекцията в операторна форма. Приведете ги в декартови координати. Обяснете как се получават (и какво моделират) уравнения от тип реакция-дифузия, реакция-дифузия-адвекция, реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис (формулирайте ги в операторен вид).

II. Линейна алгебра

9. Геометрия на линейните алгебрични системи

Дайте примери, с които да изясните трите възможности за решенията на система с две уравнения и две неизвестни. Дайте геометрична илюстрация по редове и по стълбове. Какво е предимството на това да се прави илюстрация по стълбове? На база на примерите формулирайте необходимото и достатъчно условие за това дадена *линейна алгебрична система да има решение. Формулирайте и докажете твърдение, свързано с възможния брой на решенията на дадена линейна алгебрична система.*

10. Основни подпространства, свързани с дадена матрица

Дефинирайте четирите основни подпространства, свързани с дадена матрица. Дайте дефиниция за ортогонални подпространства и за ортогонални допълнения. Дайте примери чрез илюстрации в R^3. Формулирайте и докажете Основната теорема на линейната алгебра. Направете илюстрация.

11. Основните подпространства и линейните алгебрични системи

Формулирайте и докажете резултат, характеризиращ всички решения на дадена линейна алгебрична система, ако такива съществуват. Изяснете какви са възможностите за броя на решенията на дадена линейна алгебрична система в зависимост от формата и ранга на матрицата на системата.

12. Линейни оператори

Дайте дефиниция за линеен оператор. Обяснете как линейните трансформации в крайномерни пространства могат да се представят с матрици. Дайте примери. Покажете как се променя матрицата на трансформацията T: U -> V при промяна на базиса на U / V / и двете. Дайте дефиниция за подобни матрици.

13. Собствен базис

Дайте дефиниция за собствен вектор и собствена стойност на дадена линейна трансформация. Мотивирайте въвеждането на тези понятия от гледна точка на матрицата на трансформацията при собствения базис. Формулирайте твърдение за диагонализиране на дадена матрица. Формулирайте твърдение за диагонализиране на дадена симетрична матрица.

14. Линейни задачи за най-малки квадрати

Формулирайте общата линейна задача за най-малки квадрати (приведете три еквивалентни формулировки). Изведете нормалните уравнения на базата на геометрични и на базата на аналитични съображения. Обяснете защо често използването на нормалните уравнения на практика има съществени недостатъци.

15. Декомпозиция по сингулярни стойности

Формулирайте декомпозицията по сингулярни стойности. Покажете как може да бъде намерена. Дайте геометрична илюстрация във връзка с базисите на четирите основни подпространства. Покажете как декомпозицията може да се използва за получаване на апроксимация от по-нисък ред на дадена матрица. Покажете как декомпозицията може да се използва за решаване на линейна задача на най-малките квадрати.