

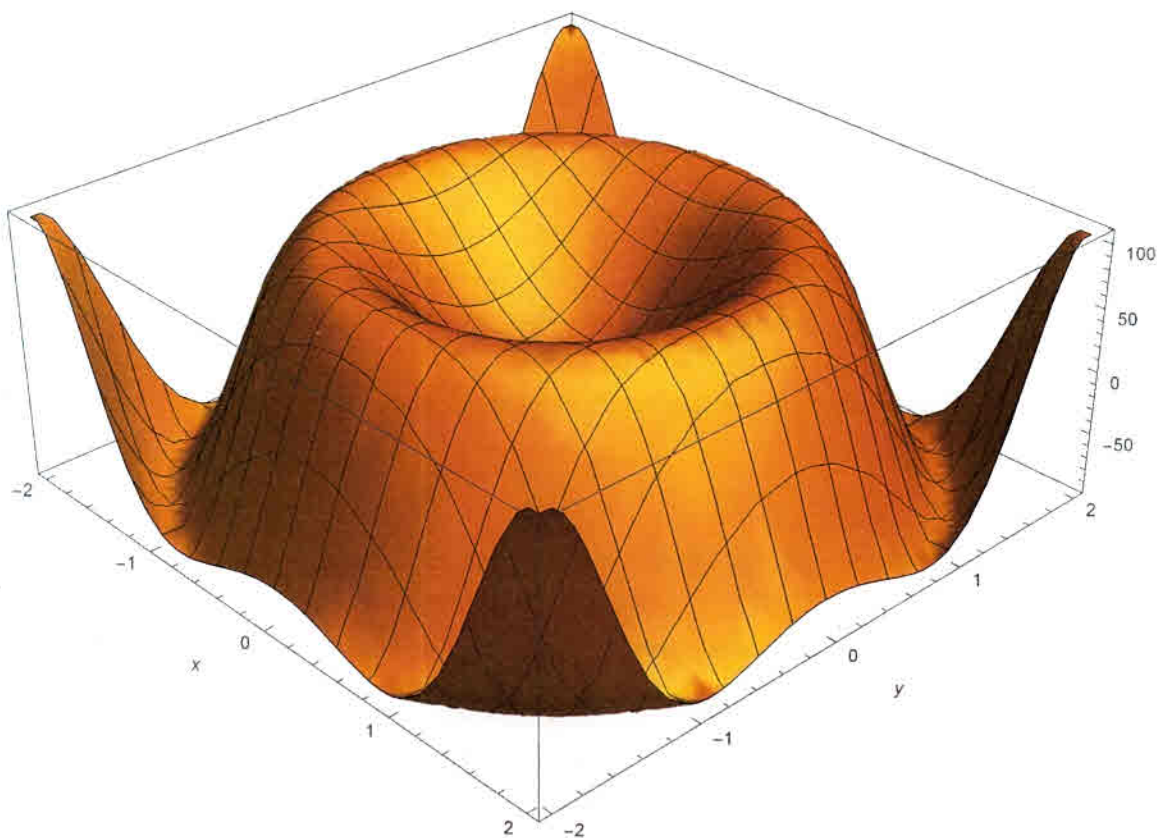
Теоретични основи на индустриалната математика

Изпит – задачи

13.02.2019

Задача 1. Тяло с маса m се движи за време $t \in [0, 1]$ под действието на сила $\mathbf{F}(x, y) = (x + 1)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j}$. В началния момент от време тялото се намира в покой в точката $(0, 1)$. Пресметнете нормалната компонента на ускорението в $t = 1$ и я визуализирайте заедно с траекторията на тялото при $m = 1$.

Задача 2. Скицирайте на ръка линиите на ниво на функцията



Какъв е знакът на $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точката $P = (1.5, 0)$. А какъв е знакът на $\frac{\partial u}{\partial v}$ в тази точка, където $\mathbf{v} = (-1, 1)/\sqrt{2}$? Пресметнете $\frac{\partial u}{\partial v}$ в т. Q , ако знаете, че ∇u в тази точка е $(2, 5)$.

Задача 3. Нека f е скаларно поле, а $\mathbf{F}$ е векторно поле. Кои от следните изрази имат смисъл? Обосновайте се!

- $\nabla \times f$;
- $\nabla \times (\nabla f)$;

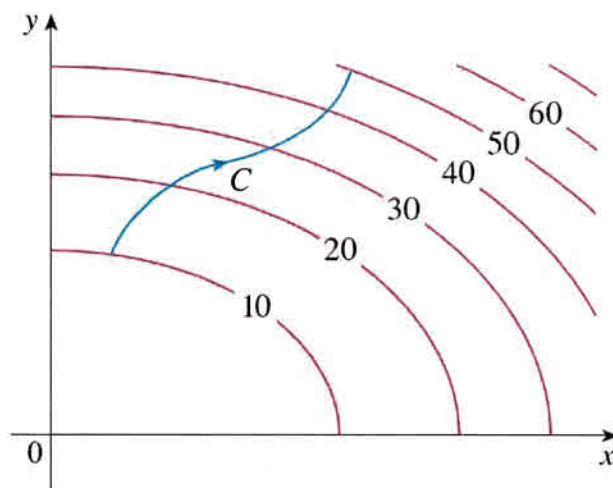
- $\text{grad}(\text{div } \mathbf{F})$;
- $\text{div}(\text{curl}(\text{grad } f))$;
- $(\nabla f) \times (\nabla \cdot \mathbf{F})$.

Задача 4. Дадена е системата $\mathbf{f}(x, y) = 0$, където

$$\mathbf{f}(x, y) = (2x^3 - 2\sin y^2 + y, \cos(y + 1) + x)^T.$$

Направете една итерация по метода на Нютон с начално приближение $\mathbf{x}_0 = (1, 1)^T$, т.е. решете системата, която се получава, като заместите функцията $\mathbf{f}(x, y)$ с нейната линеаризация около $\mathbf{x}_0$.

Задача 5. На фигурата е показана крива C и линиите на ниво на функцията f , чийто градиент е непрекъснат. Намерете $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$. Обосновете се.



Задача 6. Използвайте теоремата на Грийн, за да пресметнете

$$\int_C \sqrt{1+x^3} dx + 2xy dy,$$

където C е положително-ориентираният контур на триъгълника с върхове $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1, 3)$.

Задача 7. Да се реши следната линейна задача за най-малки квадрати, като се направи SVD :

Търси се линейна функция, която приближава следните данни:

x	3	4	5	7	8	9	11	12
y	1.6	3.6	4.4	4.4	5.2	5.8	6.8	7.6

Илюстрирайте получения резултат графично.

Задача 8. Дадена е матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определете размерността на $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ и постройте техни базиси.

Задача 9. Да се намерят собствените стойности и собствените вектори на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix},$$

без да се използва системата *Wolfram Mathematica*! Какъв извод можете да направите за матрицата A от това, което сте получили?

Задача 10. Напишете матрицата на трансформацията $T : P_{2\{1,x,x^2\}} \rightarrow P_{3\{1,x,x^2,x^3\}}$, където образът на $p \in P_2$ е $T(p)$ – примитивна на p за фиксирана константа на интегриране 0. Без да привеждате в *ref*, отговорете каква е размерността на $\mathcal{N}(A)$. Обосновете се!