

Теоретични основи на индустриалната
математика
2018-2019

Записки на лекциите

Тихомир Иванов

3 януари 2019 г.

Съдържание

I	Теоретични основи на индустриалната математика - част 1	5
1	Векторно смятане и приложения. Математически модели, основаващи се на закони за запазване – въведение. Въведение в Нютоновата механика.	7
1.1	Вектори в $\mathbb{R}^n$. Векторни функции на един скаларен аргумент.	8
1.2	Движение на частица. Статика. Втори закон на Нютон. Движение по окръжност и по криволинейна траектория. Закон на Нютон за гравитацията. Закон на Хук (линейна еластичност). Сили на триене и съпротивление.	20
1.3	Скаларни функции на векторен аргумент. Линеаризация. Градиент. Производна по направление.	35
1.4	Векторни функции на векторен аргумент. Дивергенция и ротация на векторно поле.	44
1.5	Операторът ∇ в недекартови координатни системи	51
1.6	Криволинейни интеграли	52
1.7	Основни теореми на интегралното смятане	53
1.7.1	Основна теорема за криволинейни интеграли	53
1.7.2	Теорема на Green	56
1.7.3	Векторни форми на теоремата на Green	58
1.8	Уравнения на топло- и масо-пренос	60
1.8.1	Уравнение на непрекъснатостта. Координатно-ивариантна дефиниция за дивергенция.	60
1.8.2	Уравнения от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис	60
2	Линейни алгебрични системи, линейни пространства, линейни трансформации	61
2.1	Геометрия на линейните алгебрични системи	61
2.2	Четири основни подпространства на $\mathbb{R}^n$, свързани с дадена матрица	68
2.3	Линейните алгебрични системи и четирите основни подпространства	74
2.4	Линейни оператори	80
2.4.1	Матрица на линеен оператор	80
2.4.2	Матрица на линеен оператор и смяна на базисите	82
2.5	Собствен базис. Диагонализация на матрица.	84
2.6	Метод на най-малките квадрати – линейни задачи	88
2.7	Декомпозиция по сингулярни стойности (SVD). Псевдообратни матрици.	93

Част I

Теоретични основи на индустриалната математика - част 1

Глава 1

Векторно смятане и приложения. Математически модели, основаващи се на закони за запазване – въведение. Въведение в Нютоновата механика.

Когато искаме да опишем даден реален процес, ние трябва да изберем основните величини, които го характеризират, и да съставим математически модел, който ги свързва. Най-общо можем да разделим величините на:

- скаларни величини: температура, време, налягане, плътност, маса и др.;
- векторни величини:
 - величини, които се характеризират с големина и посока: скорост, сила, поток, отместване и др.
 - величини, които могат да се представят като списъци от числа/списъци от скаларни величини: състоянието на двумерна система хищник-жертва (т.е. списък от скаларните числености на хищника и жертвата), седмичният оборот за период от 4 седмици и др.
- тензорни величини: тях ще коментираме по-нататък в курса; такива са например напреженията и деформациите в дадено еластично тяло.

Първата цел на настоящия курс ще бъде да разгледаме математическите обекти, които описват тези величини – скалари и вектори, скаларни и векторни функции – и да изучим работата с тях. В същото време ще дадем примери за два важни класа математически модели (модели на класическата Нютонова механика и модели на топло- и масо-пренос). От една страна, те ще ни послужат като илюстрация на разглежданата теория, но сами по себе си те са в основата на математическото моделиране на много реални процеси. Също така, изучаването им е важна стъпка към моделирането на по-сложни, например многокомпонентни, физически системи, където те играят ролята на градивни блокове в разглежданите математически модели.

1.1 Вектори в $\mathbb{R}^n$. Векторни функции на един скаларен аргумент.

Много често векторните величини се представят математически чрез алгебрични вектори от $\mathbb{R}^n$ – множеството на всички наредени n -торки от реални числа:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}.$$

Ще се условим, когато говорим за вектори от $\mathbb{R}^n$, да имаме предвид вектор-стълбове, ако не сме уточнили противното или контекстът не го изисква. Вектори ще отбелязваме с $\vec{x}$ или $\bar{x}$ в ръкописен текст и с $\mathbf{x}$ в печатен.

Както отбелязахме, векторни са тези величини, които се характеризират с големина и посока или които представляват списъци от числа/списъци от скаларни величини. Във втория случай (списък от числа), използването на алгебрични вектори е съвсем естествено.

Пример 1. Да разгледаме примерна таблица, съдържаща данни за приходите от два различни продукта за период от 4 седмици:

	Продукт 1	Продукт 2
Седмица 1	1325	2125
Седмица 2	775	2005
Седмица 3	1822	1008
Седмица 4	2008	2286

Информацията за всеки един от продуктите е векторна величина, която може да се представи със следните вектор-стълбове.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1325 \\ 775 \\ 1822 \\ 2008 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2125 \\ 2005 \\ 1008 \\ 2286 \end{bmatrix}.$$

Аналогично информацията за всяка седмица може да се представи със следните вектор-редове:

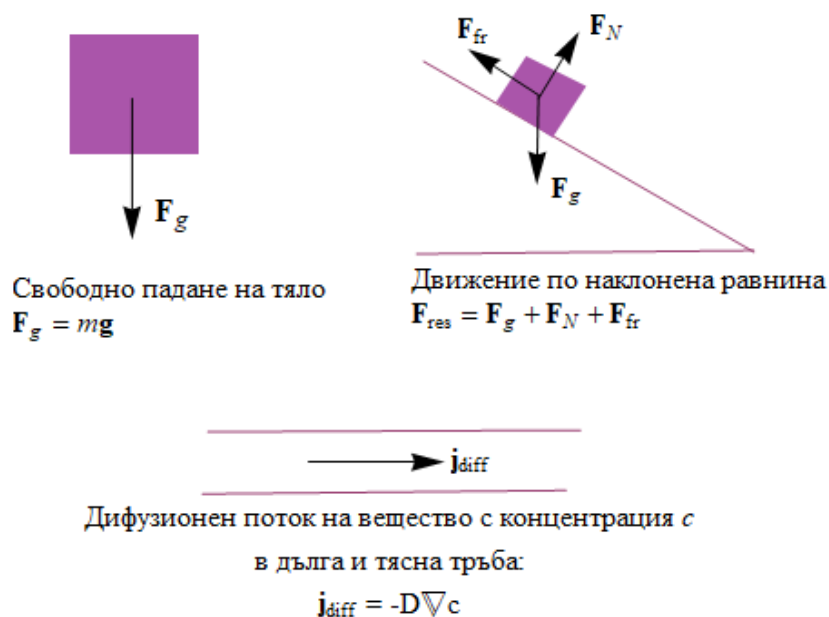
$$\mathbf{r}_1 = [1325, 2125], \quad \mathbf{r}_2 = [775, 2005], \quad \mathbf{r}_3 = [1822, 1008], \quad \mathbf{r}_4 = [2008, 2286].$$

Така, ако искаме да намерим общия приход от двата продукта за всяка седмица, трябва да пресметнем сумата $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$.

Пример 2. Моментното състояние на двумерна (или повече-мерна) физическа система също е естествено да се представи като наредена n -торка. Така например, ако разглеждаме една екосистема от тип хищник-жертва, то нейното моментно състояние може да се опише чрез наредената двойка $(N, P)^T$, където N е числеността на жертвите, а P – числеността на хищниците.

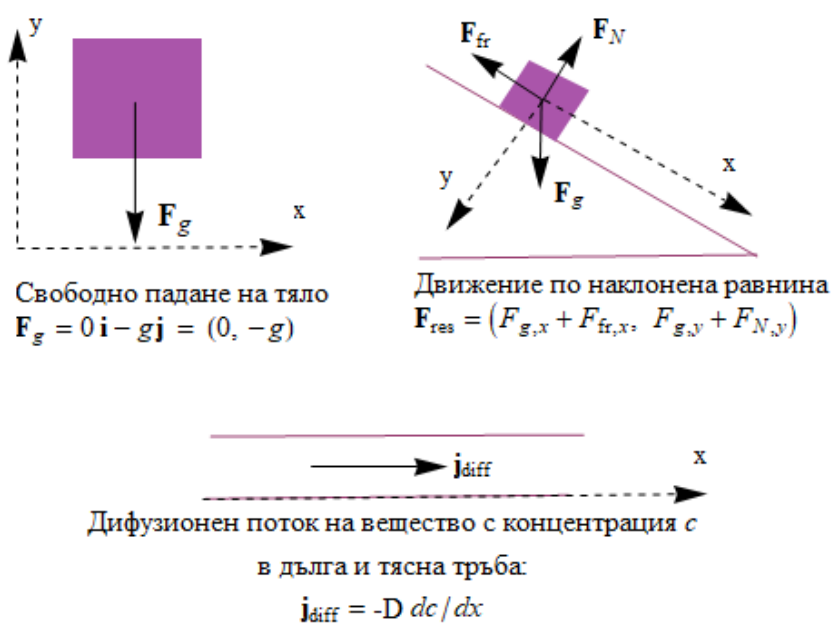
Когато разглеждаме векторна величина, която се характеризира с големина и посока, естественият математически обект, който я представя, е геометричния вектор (насочена отсечка или по-точно множеството от всички равни насочени отсечки).

Нека разгледаме зависимостите, представени на следната фигура:



Когато искаме да формулираме даден физичен модел, обикновено е добре това да стане в тази обща постановка (операторен вид), защото тя е независима от конкретната геометрия на задачата, размерността, избора на координатна система и др. Ще казваме, че е геометрически инвариантна.

Когато искаме да работим с модела обаче (да го решим, да направим дадени преобразования и т.н.), е необходимо да въведем координатна система, за да можем да работим със съответните величини, използвайки известните алгебрични и аналитични операции. С други думи, работата с физични величини също се свежда до работата с алгебрични вектори.



N.B. 1

Трябва ясно да осъзнаваме обаче, че геометричните и алгебричните вектори са различни обекти. Взаимно-еднозначно съответствие между тях съществува само що се отнася до линейните операции (събиране и умножение със скалар). Това е особено важно в неортогонални координатни системи, но ще се върнем на този въпрос по-нататък.

Ще започнем изучаването на работата с векторни величини, като припомним две основни операции с вектори и коментираме тяхното значение от приложна гледна точка.

Скаларно произведение**Дефиниция 1**

Скаларното произведение на геометричните вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се дефинира чрез

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Лесно се проверява, че е в сила следното твърдение.

Твърдение 1

Нека $\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_3 \hat{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{i}} + b_2 \hat{\mathbf{j}} + b_3 \hat{\mathbf{k}}$, където $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ е стандартният базис на пространството от геометрични вектори. Тогава

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

Забележка. Важен в последното твърдение е фактът, че $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ образуват ортонормиран базис.

Последното твърдение ни дава основание да въведем следната дефиниция за скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$

Дефиниция 2

Стандартното скаларно произведение в $\mathbb{R}^n$ се дефинира чрез

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Какво ни дава скаларното произведение?

Ще разгледаме няколко основни приложения на скаларното произведение, които ще играят ключова роля в по-нататъшното ни изучаване на приложна математика:

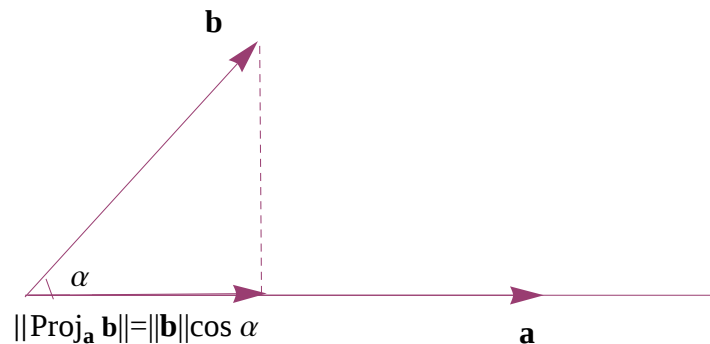
- (i) Скаларното произведение въвежда геометрия в дадено пространство, тъй като чрез него можем да дефинираме ъгли,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

В частност

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ т.с.т.к. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

- (ii) Скаларното произведение ни дава възможност да пресмятаме проекции. Да разгледаме следната фигура:



От нея може лесно да се съобразят следните равенства за скаларната и векторната ортогонални проекции (които за краткост ще наричаме съответно компонента и проекция):

$$\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|},$$

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

В частност, ако искаме да намерим компонентата на вектора $\mathbf{b}$ върху единичния вектор $\mathbf{a}$ (или, казано по друг начин, да намерим компонентата на $\mathbf{b}$ в дадено направление $\mathbf{a}$), което е може би най-важният от практическа гледна точка случай, то имаме

$$\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

а проекцията е

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}.$$

- (iii) Във физиката работата W , която се извършва от постоянна сила, се дефинира като скаларно произведение на силата $\mathbf{F}$ и отместването $\mathbf{d}$:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

Векторно произведение

В дадени ситуации е полезно да можем по дадени вектори $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ да намерим вектор $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, който е перпендикулярен на първите два. Неговите координати трябва да удовлетворяват

$$\begin{aligned} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Умножавайки първото уравнение с b_3 , а второто – с a_3 и изваждайки второто от първото, получаваме

$$(a_1 b_3 - a_3 b_1) c_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_2 = 0.$$

Едно очевидно решение на последното е

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = -a_1 b_3 + a_3 b_1.$$

Оттук за c_3 получаваме

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Вземайки предвид казаното дотук, дефинираме векторно произведение по следния начин:

Дефиниция 3

Векторното произведение на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се дефинира чрез

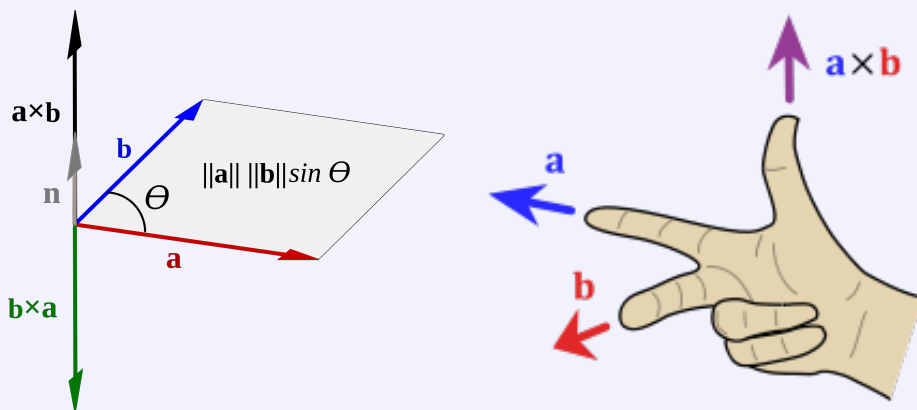
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Последната дефиниция е в координатна форма, т.е. зависи от избора на координатна система. Ние ще се стремим, когато това е възможно и целесъобразно, да даваме геометрично-инвариантни дефиниции на разглежданите понятия. Може да се покаже, че за векторното произведение е в сила следната дефиниция.

Дефиниция 4

Векторното произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ е вектор, перпендикулярен на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, образуващ положително ориентирана тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и имащ дължина

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Какво ни дава векторното произведение?**

Ще обърнем внимание на следните приложения на векторното произведение (вж. първата илюстрация към дефиницията):

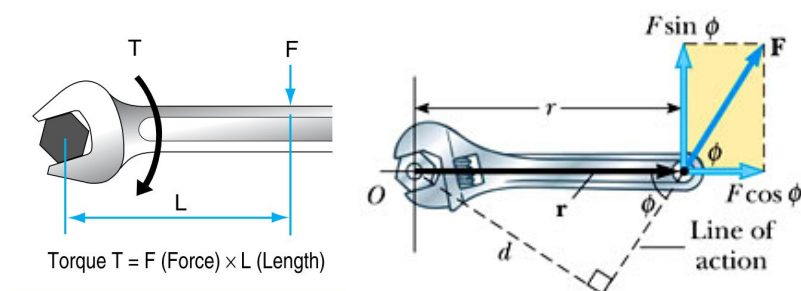
- (i) Първото очевидно приложение е за намиране на перпендикулярен вектор на други два вектора и нормален вектор на равнина.
- (ii) Вземайки предвид геометрически-инвариантната дефиниция е ясно, че векторното произведение ни дава критерий за колинеарност/успоредност. В сила е

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ т.с.т.к. } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

- (iii) Големината на $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ дава лицето на успоредника, определен от векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.
- (iv) Във физиката моментът $\boldsymbol{\tau}$ на дадена сила $\mathbf{F}$ около дадена точка O е

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

където $\mathbf{r}$ е вектор, свързващ точката O и точката, в която е приложена силата. Ще говорим по-подробно за това понятие в тема 1.7. Достатъчно е засега да отбележим, че то е свързано с тенденцията на силата да върти даден обект, фиксиран в точката O :



Скаларни и векторни функции

Както отбелязахме, даден конкретен вектор може да опише статичен обект или моментно състояние на даден процес или дадена система. Нещата около нас обаче се изменят – както във времето, така и в пространството. Математическите обекти, които описват тези изменения, са функциите. Най-често независимите променливи са пространствени променливи (от една до три) и една времева променлива. Разбира се, разглеждаме и функции как дадени величини зависят помежду си, например обемът на даден газ като функция на налягането и температурата, производството като функция на търсенето и др. Ще направим следната класификация:

- Скаларна функция на скаларен аргумент, например числеността на дадени организми като функция на времето, $N(t)$, височината на всяка точка от даден закачен кабел/верига като функция на една пространствена променлива, $h(x)$, и др.



- Векторна функция на скаларен аргумент, например скоростта като функция на времето $\mathbf{v}(t)$, състоянието на система хищник-жертва като функция на времето, $(N(t), P(t))$ и др.
- Скаларна функция на векторен аргумент/на много променливи, например температурата като функция на две пространствени променливи (или, което е еквивалентно, на векторна променлива с две компоненти), $u(x, y) = u(\mathbf{x})$, налягането като функция на три пространствени и една времева променливи, $p(x, y, z, t) = p(\mathbf{x}, t)$ и др.
- Векторна функция на векторен аргумент, например потокът на дадено вещество/на топлина като функция на пространствени променливи, $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(x, y)$, състоянието на дадена система хищник-жертва като функция на две пространствени и една времева променливи, $(N(x, y, t), P(x, y, t))^T$, и др.

Ще разгледаме работата с всеки от тези видове функции, като ще започнем с изучаването на векторните функции на скаларен аргумент. Тъй като скаларните функции на скаларен аргумент са достатъчно добре познати, а и са частен случай на векторни функции на скаларен аргумент, няма да се спираме специално на тях.

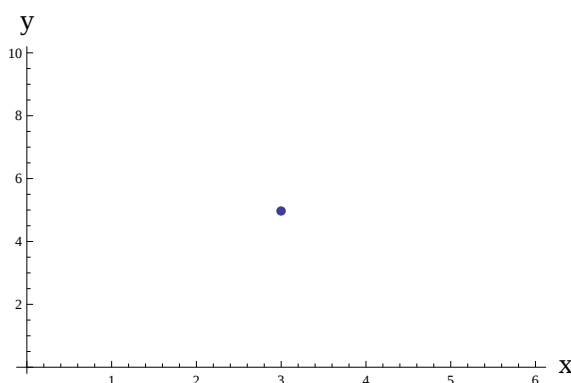
Векторни функции на скаларен аргумент

Разглеждаме функция $\mathbf{u}(t)$, където $\mathbf{u}$ е векторна величина. В координатна форма можем да запишем $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$.

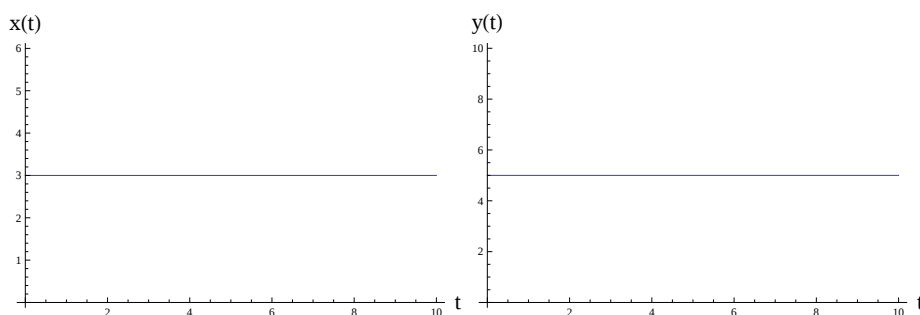
Можем да визуализираме дадена векторна функция, като:

- построим графиката на всяка от компонентите поотделно;
- изобразим параметричната крива, съответстваща на $\mathbf{u}(t)$ (това, разбира се, е възможно само в 2D и 3D).

Пример 3. Да разгледаме константната векторна функция $f(s) = (3, 5)$. Параметричната крива, която ѝ съответства се състои само от една точка:



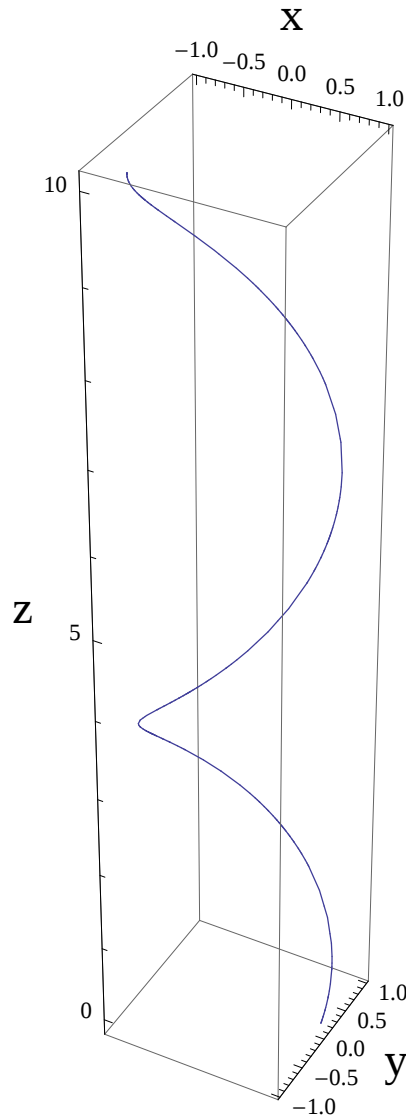
Съответно графиките на нейните компоненти са прави, успоредни на абсцисата:



Пример 4. Да разгледаме функцията

$$\mathbf{f}(t) = \cos t \hat{\mathbf{i}} + \sin t \hat{\mathbf{j}} + t \hat{\mathbf{k}} \\ (\cos t, \sin t, t).$$

По-долу е визуализирана параметричната крива, съответстваща на функцията (вж. също файла *Lecture1.nb*).



Векторните функции на един скаларен аргумент описват:

- геометричен обект - крива в 2D и 3D, формата на дълъг и тънък обект, траекторията на дадена частица в пространството;
- всяка векторна величина (сила, скорост и др.) като функция на времето или на една пространствена променлива;
- списък от няколко скаларни функции, които заедно описват дадена физическа система (най-често нейната еволюция във времето).

В първите две упражнения ще бъдат дадени примери за тези приложения.

Основната операция, на която се базира цялото диференциално и интегрално смятане, е граничният преход. Нека с $\rho(f, g)$ означаваме разстоянието между два обекта. Нека засега си мислим, че това е Евклидовото разстояние, т.е.

$$\rho((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

но всички дефиниции и твърдения, приведени по-долу, остават валидни и за произволен друг избор, предвид еквивалентността на нормите в дадено крайномерно пространство, която ще коментираме по-късно в курса.

Дефиниция 5

Казваме, че

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L},$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta = \delta(\varepsilon)$ такава, че от $|t - a| < \delta$, $t \neq a$ следва $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) < \varepsilon$.

Можем да намерим границата на дадена векторна функция, като намерим границите на всички нейни компоненти поотделно.

Твърдение 2

Нека $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Тогава

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = (\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} f_n(t)).$$

Доказателство. Да допуснем противното, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} = (L_1, \dots, L_n),$$

но $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) \neq L_i$ за някое i . Това означава две неща

- За всяко $\varepsilon > 0$ съществува число δ такава, че ако $|t - a| < \delta$, $t \neq a$, тогава $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) < \varepsilon$;
- За някое $\varepsilon > 0$, без значение от избора ни на δ , съществува t такава, че $|t - a| < \delta$, $t \neq a$, но $|f_i(t) - L_i| > \varepsilon$. Но това означава, че $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) > \varepsilon$.

Двете са очевидно в противоречие, което доказва твърдението. $\square$

Вече сме готови да дефинираме понятието производна на векторна функция на скаларен аргумент.

Дефиниция 6

Производната на векторната функция $\mathbf{f}(t)$ в точката t_0 се дефинира чрез

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h},$$

когато границата съществува.

Вземайки предвид факта, че можем да пресмятаме граници покомпонентно, то следното е очевидно.

Твърдение 3

Можем да диференцираме дадена векторна функция, като диференцираме всяка от компонентите ѝ поотделно, т.е.

$$\mathbf{r}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)).$$

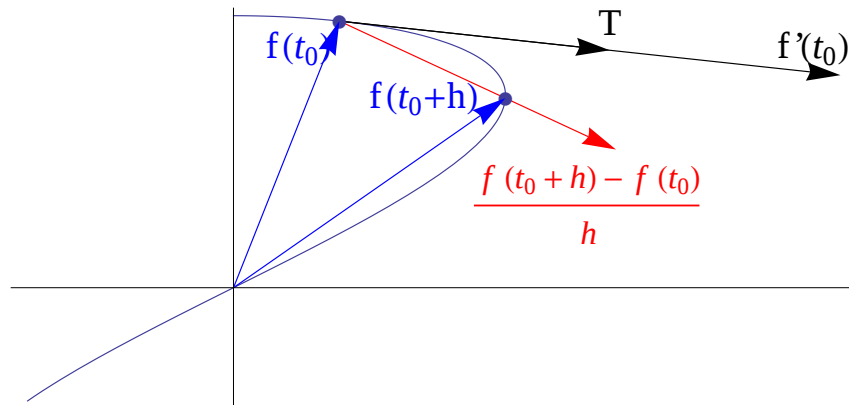
Както знаем, производната на дадена скаларна функция на скаларен аргумент дава наклона на допирателната към графиката на функцията. Тя може да бъде интерпретирана и като скоростта на изменение на функцията в дадената точка.

Нека сега интерпретираме производната на дадена векторна функция. От една страна, тя дава скоростта на изменение на всяка отделна компонента на функцията. Ако например разглеждаме позицията на частица като функция на времето, то производната ще ни даде вектора на скоростта в съответния момент от време. Ако функцията описва системата хищник-жертва от предишния пример, то всяка от компонентите на производната ще даде скоростта на изменение съответно на численостите на жертвата и хищника.

Нека сега се концентрираме върху геометричното значение на производната, т.е. когато интерпретираме (или визуализираме) дадена векторна функция като параметрична крива. Тогава числителят в диференчното частно

$$\frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h}$$

е вектор, свързващ точките $\mathbf{f}(t_0)$ и $\mathbf{f}(t_0 + h)$. Следователно диференчното частно е вектор в същото направление. Ако пуснем $h \rightarrow 0$, тогава диференчното частно ще клони към вектор, който е допирателен към параметричната крива в точката t_0 (вж. фигурата, където $\mathbf{T}$ е единичен допирателен вектор).



Анимирана визуализация на горната дефиниция може да бъде намерена във файла *Lecture1.nb*.

N.B. 2

Геометрично производната на векторна функция е вектор, който е допирателен към параметричната крива, определена от функцията.

Пример 5. Да намерим единичен допирателен вектор към кривата (helix), определена от

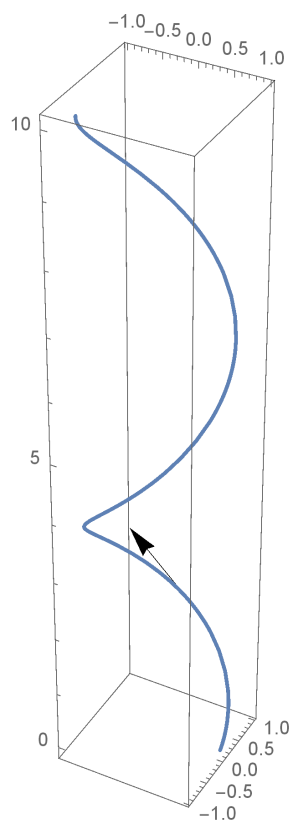
$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

в точката $(0, 1, \pi/2)$.

Тази точка от кривата се получава при $t = \pi/2$.

Имаме $\mathbf{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ и следователно единичният допирателен вектор е

$$\frac{\mathbf{f}'(\pi/2)}{\|\mathbf{f}'(\pi/2)\|} = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}.$$



Анимация към примера може да бъде открита във файла *Lecture1.nb*.

Накрая на настоящия параграф ще приведем някои свойства на производната на векторна функция. В лекциите на настоящия курс обикновено няма да доказваме формули от този тип по две причини:

- доказателствата обикновено са чисто технически и могат да бъдат направени лесно за упражнение (съответни задачи ще бъдат включени към всяка тема);
- тези формули могат да бъдат лесно намерени във всеки справочник или в интернет, когато тяхното прилагане е необходимо.

В сила са следните класически свойства на производната:

- (i) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt};$
- (ii) $\frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c\frac{d\mathbf{u}}{dt};$
- (iii) $\frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = \frac{df}{dt}\mathbf{u}(t) + f(t)\frac{d\mathbf{u}}{dt};$
- (iv) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt};$
- (v) $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$

1.2 Движение на частица. Статика. Втори закон на Нютон. Движение по окръжност и по криволинейна траектория. Закон на Нютон за гравитацията. Закон на Хук (линейна еластичност). Сили на триене и съпротивление.

Математическите модели на механични системи играят централна роля в много приложения. В магистърската програма ние ще направим въведение в тези модели. Най-простата механична система, от която можем да започнем нашето въведение, е частица, движеща се под действието на някакви сили. Класическите закони, които ще разгледаме тук и в параграф 1.7, под някаква форма ще бъдат в основата на всички механични модели, с които ще се срещнем по-нататък.

Основните величини, описващи движението на частица в пространството, са нейните позиция, скорост и ускорение. В общия случай можем да опишем позицията на частицата във фиксиран момент от време чрез радиус-вектор относно отправна точка в пространството O . Тогава траекторията на частицата можем да опишем с векторна функция на времето, нека я означим с $\mathbf{r}(t)$. Скоростта на частицата е векторът $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, а големината на скоростта е $|\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}/dt| = ds/dt$. Ще използваме и означението $|\mathbf{v}| = v$. В англо-езичната литература се използват съответно термините *velocity* и *speed*. Ускорението е векторната величина $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

Обикновено, когато формулираме математически модел в механиката (и не само), това става в координатно-инвариантна форма, т.е. като използваме векторен запис. Когато решаваме числено моделите обаче, е необходимо това да става в координатна форма. В зависимост от ситуацията могат да са удобни различни координатни представяния (в различни видове координатни системи), поради което именно е удобно първоначално моделите да бъдат формулирани във вид, независещ от избора на координатна система.

В началото на втората част на курса (през втория семестър) ще коментираме работата в различни координатни системи, но за целите на настоящите разглеждания, когато работим в координатна форма, ние ще използваме стандартни декартови координати, например в 2D:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{v} &= \frac{dr_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dr_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} =: v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \frac{d^2 r_x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2 r_y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} =: a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Ако знаем една от трите величини и евентуално начални условия, можем лесно да намерим останалите две.

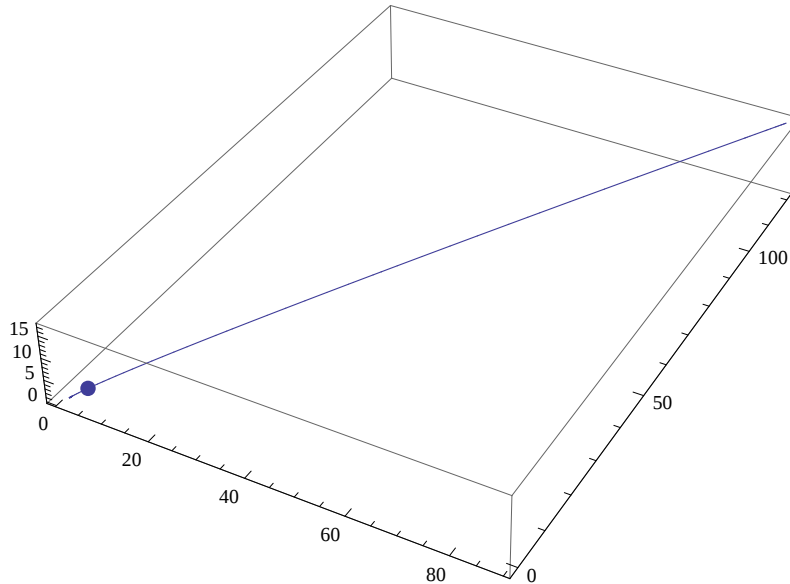
Пример 6. Частица с начална позиция $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$ и начална скорост $\mathbf{v}(0) = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ се движи с ускорение $\mathbf{a}(t) = 4t\hat{\mathbf{i}} + 6t\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Да намерим скоростта и позицията на частицата като функции на времето. Скоростта ще получим, като към началната скорост прибавим сумата на измененията на скоростта в

интервала от време $[0, t]$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t d\mathbf{v} = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} + 2t^2\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} \\ &= (2t^2 + 1)\hat{\mathbf{i}} + (3t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}} + (t + 1)\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Аналогично за позицията получаваме последователно

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \int_0^t d\mathbf{r} = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{3t^3}{3} - t\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\hat{\mathbf{i}} + (t^3 - t)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$



Анимирано движение на частицата може да бъде намерено във файла *Lecture2.nb*.

За да можем да използваме зависимостите между трите основни величини, както направихме в горния пример, трябва да знаем ускорението във всеки момент от време. Класическата механика се основава на трите закона на Нютон, които ни позволяват съставянето на математически модели, описващи движението на частица в пространството.

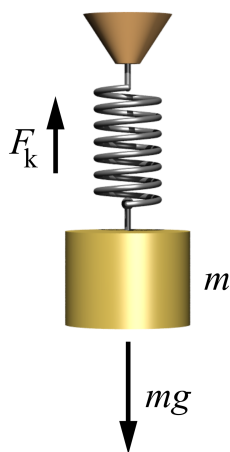
- **Първи закон на Нютон.** В отсъствието на външни сили, гледан от инерциална координатна система, обект в покой остава в покой, а обект в движение продължава движението си с константна скорост.

N.B. 3

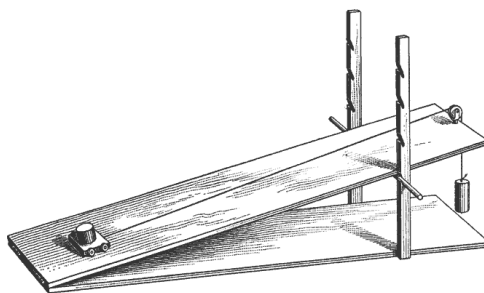
Силите, които не са компенсирани от други сили, са причина за **промяна** в движението. Движение обаче може да съществува без сили, действащи върху тялото.

В частност, за да бъде една система в покой, всички сили, действащи върху всяка от компонентите ѝ, трябва да се компенсират.

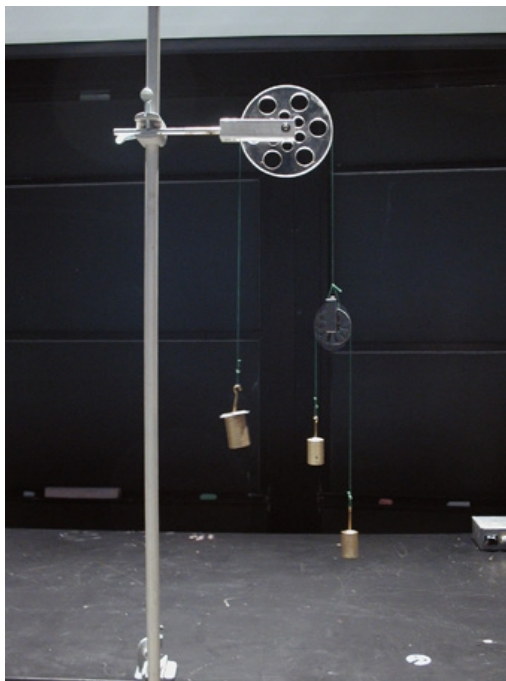
Пример 7. За да бъде следната система от пружина и маса в покой, то еластичната сила на пружината и силата на тежестта трябва да се уравниравесяват.



Пример 8. Блокчето ще бъде в покой върху наклонената равнина, ако силата на тежестта, силата на триене, силата на опън и нормалната реакция на опората се уравниравесяват.



Пример 9. За да бъде следната система от теглилки и макари в покой, то върху всяка теглилка поотделно силата на опън и силата на тежестта трябва да се компенсират.



- **Втори закон на Нютон.** Вторият закон на Нютон е в основата на математическото моделиране на движение на тяло. Той гласи, че резултантната сила, действаща върху тялото, води до ускорение, съгласно равенството

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

където m е масата на тялото. По същество това представлява едно диференциално уравнение от втори ред за позицията $\mathbf{r}$,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

или система от диференциални уравнения от първи ред:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\mathbf{F}}{m}. \end{aligned}$$

N.B. 4

Важно е да отбележим, че законите на Нютон, както и повечето закони, описващи заобикалящия ни свят, се базират изключително на експериментални наблюдения.

Те не могат да бъдат доказани, но отговарят на всички експериментални сведения в рамките на възможната точност на измерванията.

Да отбележим и че **винаги, когато разглеждаме даден математически модел, ние трябва да се съобразяваме с неговите допускания, областта му на валидност и т.н.**

Вторият закон на Нютон е в сила при константна маса. За променлива маса ще коментираме по-нататък в курса.

Също така, трябва да се има предвид, че вторият закон на Нютон не е в сила за тела, движещи се със скорост, близка до тази на светлината (тяхното движение се описва от теорията на относителността на Айнщайн), както и за много малки тела, например електрони, атоми (те се описват от квантовата механика). Движението на повечето тела, които ни заобикалят обаче, може да бъде моделирано с помощта на Нютоновата механика.

- **Трети закон на Нютон.** Ако дадено тяло A действа със сила $\mathbf{F}_{AB}$ на друго тяло B , то тялото B действа на A със сила $\mathbf{F}_{BA}$, която има същата големина като $\mathbf{F}_{AB}$ и противоположна посока.

И така, за да моделираме движението на дадено тяло, ние трябва да опишем силите, действащи върху него. Сега ще разгледаме някои от основните сили, които могат да действат на даден обект.

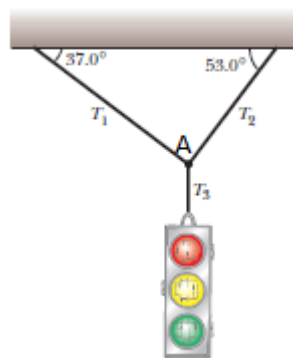
- **Сила на тежестта.** Силата на тежестта ще означаваме с

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g},$$

където $|\mathbf{g}| = g$.

- **Сила на опън.**

Пример 10. Светофар, тежащ 122N виси от кабели, както е показано на фигурата.

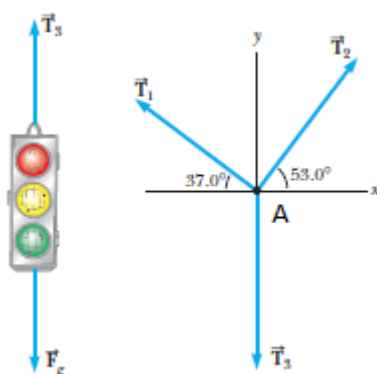


Горните кабели могат да издържат на натоварване до 100N. Искаме да разберем дали те ще се скъсат.

За да бъде системата в равновесие, резултантната сила върху всеки елемент от нея трябва да бъде нула. За да можем да напишем уравнения, съответстващи на баланса на силите, ще работим в координатна форма. Въвеждаме координатна система с начало във възела A, както е показано на картинката по-долу.

Да разгледаме елементите на механичната система поотделно. Върху светофара действат сила на тежестта F_g и сила на опън T_3 . За да бъде светофарът в равновесие, трябва да е изпълнено

$$T_3 = 122\hat{j}.$$



Сега да видим какви са условията за равновесие в точката A. За да се компенсират силите, то всяка компонента на резултантната сила трябва да е нула.

В x -направление (т.е. ако вземем компонентите на силите върху $\hat{i}$) имаме

$$\begin{aligned} T_2 \cdot \hat{i} + T_1 \cdot \hat{i} + T_3 \cdot \hat{i} &= 0, \\ \|T_2\| \cos 53^\circ - \|T_1\| \cos 37^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично в y -направление получаваме

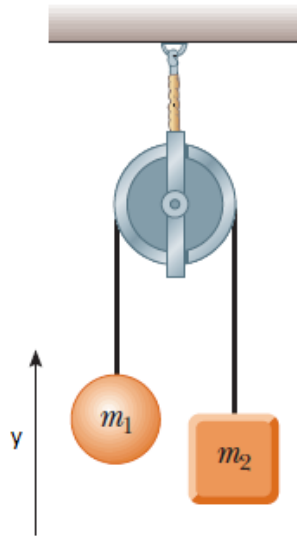
$$\|T_2\| \cos 53^\circ + \|T_1\| \cos 37^\circ - 122 = 0.$$

Решаваме за $\|T_1\|$ и $\|T_2\|$ и получаваме $\|T_1\| = 73.4N$, $\|T_2\| = 97.4N$. Следователно кабелите ще издържат.

N.B. 5

За да бъде една механична система в покой, всички нейни компоненти трябва да са в покой, т.е. всички сили, които им действат, да се уравновесяват.

Пример 11 (Машина на Atwood). Разглеждаме следната експериментална постановка, която понякога се използва за измерване на земното ускорение, като приемаме, че въжето не е еластично и е с пренебрежима маса.



Очевидно, ако $m_1 \neq m_2$, системата няма да е в покой. Ще анализираме тази система, като определим ускорението и напрежението във въжето (т.е. величините, които не са ни известни).

На телата действат сила на тежестта, насочена в направление $-\hat{\mathbf{j}}$ и сила на опън с големина T в направление $\hat{\mathbf{j}}$. Да обърнем внимание, че големините на силите на опън са едни и същи за двете тела. Тогава от втория закон на Нютон имаме

$$m_1 a_1 = T - m_1 g,$$

$$m_2 a_2 = T - m_2 g.$$

Получихме алгебрична система от две уравнения с три неизвестни a_1, a_2, T . За да я затворим, ни е необходимо още едно уравнение. То се получава от факта, че двете тела са свързани и следователно ще се движат с едно и също по големина ускорение, но с различна посока (ако едното тяло се движи и ускорява надолу, то другото ще се движи и ускорява нагоре) т.е. $a_1 = -a_2 = a$. Така получаваме

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g.$$

Последното уравнение означава, че ако измерим ускорението a на системата, ще можем да определим константата g за съответните географски координати.

За силата на опън получаваме

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Пример 12. В час, на база на горната експериментална постановка с маси $m_1 = 50g \pm 10g$ и $m_2 = 60g \pm 10g$, измерихме земното ускорение и показахме, че то е $9 \pm 1 m/s^2$. За целта измерихме времето, за което системата изминава $20.2 \pm 0.2 cm$ и установихме, че то е $0.7 \pm 0.1 s$. Оттам определихме ускорението a , което при равноускорително движение (от спокойно състояние) лесно се вижда, че е свързано с изминатото разстояние Δr по следния начин:

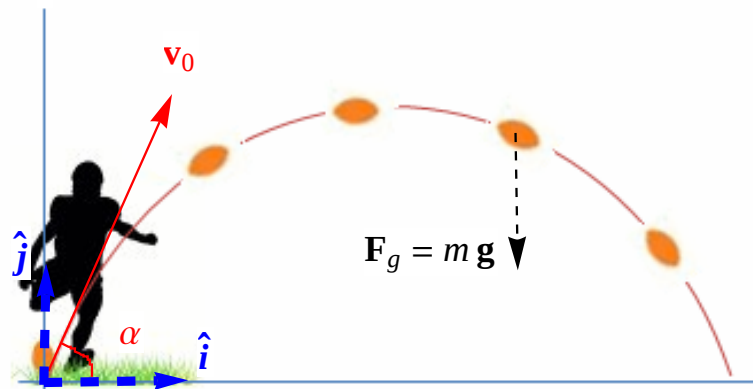
$$\Delta r = \frac{1}{2}at^2.$$

N.B. 6

Без знание за точността на измерванията и отчитане на възможните грешки, всички количествени резултати са абсолютно безсмислени!

Пример 13 (Движение на снаряд без съпротивление). Следващият пример е класически и илюстрира съставянето на математически модел на движението на частица чрез разглеждане на покомпонентния баланс между действащите сили. Този подход е необходим при изследване на движението на тяло в $2D$ и $3D$.

И така, нека разгледаме движението на снаряд, изстрелян под ъгъл α с начална скорост $\mathbf{v}_0$. Ако приемем, че съпротивлението на въздуха е пренебрежимо, искаме да определим траекторията на снаряда.



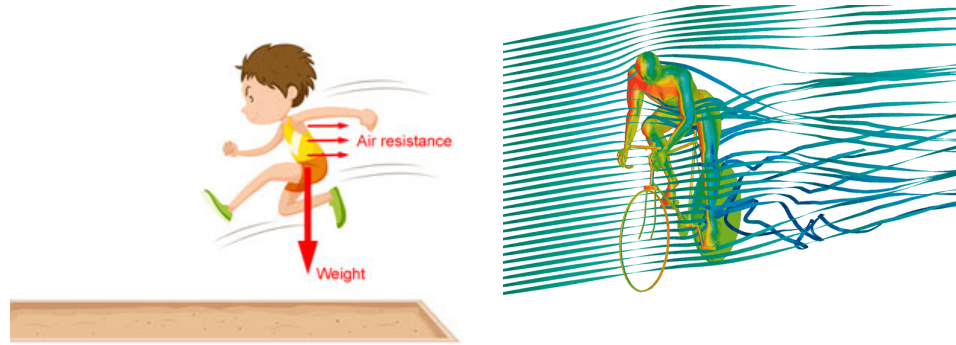
При така направените предположения, единствената сила, която действа на снаряда, е силата на тежестта, $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}}$, и следователно няма ускорение в направление x . В y -направление имаме $a_y = -g$. Следователно

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}.$$

Получаваме последователно

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 - gt\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_0 t - gt^2/2\hat{\mathbf{j}} \\ &= (\|\mathbf{v}_0\| \cos \alpha)t\hat{\mathbf{i}} + (\|\mathbf{v}_0\| \sin \alpha t - 1/2gt^2)\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

- **Сила на съпротивление.** При движение на тяло през флуид, на тялото действа сила на съпротивление, която е в посока обратна на вектора на скоростта.



Съществуват различни параметризации/емпирични модели, които я описват. Класическите са:

- При ниски скорости, съпротивлението, действащо върху обект, движещ се през вискозна среда, често се моделира като

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v},$$

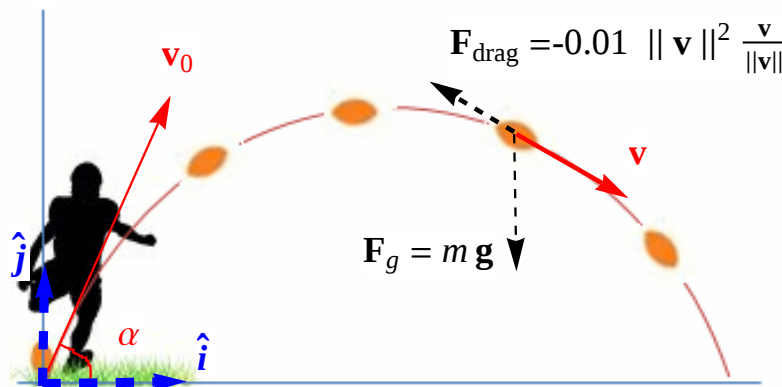
където b е константа, зависеща от характеристиките на средата и формата и размерите на обекта.

- За големи обекти, движещи се с висока скорост през въздух, например самолети, бейзболни топки и др., съпротивлението се моделира като

$$\|\mathbf{R}\| = \frac{1}{2}D\rho A v^2,$$

където D е емпирична константа (англ. *drag coefficient*), ρ е плътността на въздуха, A е сечение на обекта с равнина, перпендикулярна на посоката на движение.

Пример 14 (Продължение на задачата за снаряда). Нека към модела на движение на снаряд добавим съпротивлението на въздуха с големина $0.01v^2$.



Тогава резултантната сила е

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - 0.01\|\mathbf{v}\|^2 \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Последното възкност представлява едно диференциално уравнение за $\mathbf{v}$:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{0.01\|\mathbf{v}\|^2}{m} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

На упражнения това диференциално уравнение ще бъде решено с цел да се симулира движението на снаряд. Ще бъдат сравнени траекториите при наличие на съпротивление и когато съпротивлението се пренебрегва.

Да отбележим, че в координатна форма, по отношение на стандартните декартови координати, можем да запишем горното векторно ОДУ по следния начин:

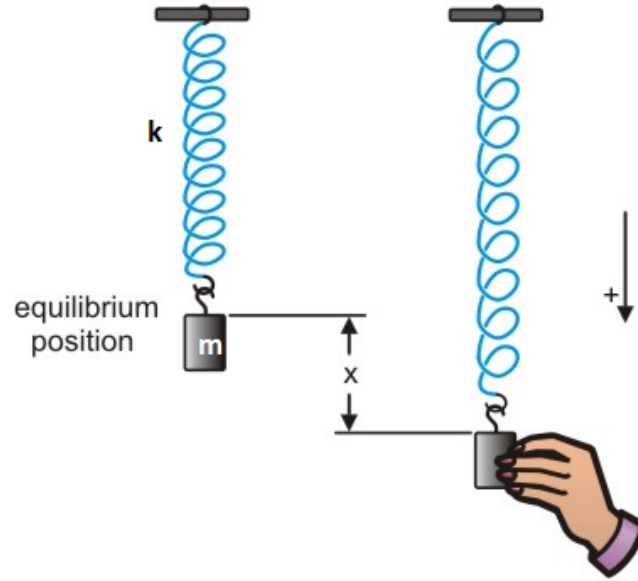
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \frac{0.01\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

- **Еластични сили. Закон на Хук за линейна еластичност.** При деформирането на едно еластично тяло, например пружина, в тялото възникват еластични сили, които се стремят да върнат тялото в спокойно състояние. Естествено е, че колкото по-големи са деформациите, толкова по-големи са възникващите еластични сили (и напрежения). Тази зависимост не е задължително линейна. За различните материали тя се изследва на базата на експерименти и се задава с т.нар. конститутивни закони. Ние ще говорим по-подробно по този въпрос по-късно в курса. Тук ще се спрем на най-простата зависимост – законът на Хук за линейната еластичност. Той гласи, че възникващите еластични сили са пропорционални на деформацията,

$$F = -kx,$$

където k е коефициент на еластичност и характеризира материала, от който е направено тялото. Много тела удовлетворяват с достатъчно добра точност закона на Хук (ще уточним този въпрос, когато говорим за еластични непрекъснати среди). Класически пример за такива тела са пружините.

Пример 15 (Система от пружина и маса). Нека разгледаме следната система от пружина и маса:



Насочвайки положителната посока на оста Ox надолу и поставяйки началото на координатната система в точката, отговаряща на неразтегнатото състояние на пружината, от втория закон на Нютон получаваме следния модел, описващ позицията $x(t)$ на тялото, като пренебрегваме съпротивлението на въздуха.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{kx}{m},$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0.$$

Ако отчетем и съпротивлението на въздуха, моделът добива вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{kx}{m} - \frac{\mu_{drag}}{m} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \right),$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0.$$

Симулация на движението на система пружина-маса ще бъде направена на упражнения.

- **Сила на триене** При движението на едно твърдо тяло върху друго възникват (кинетични) сили на триене, които действат в посока, обратна на посоката на движение. Експериментално е установен законът $\|\mathbf{F}_{fr}\| = k\|\mathbf{F}_N\|$, където $\mathbf{F}_N$ е реакцията на опората, а k е коефициент на триене, който зависи от триещите се повърхности. На упражнения ще бъде разгледан модел на движение на тяло по наклонена равнина при наличието на триене.

Примерите, разгледани в настоящия параграф, са сравнително прости, но те отразяват идеите, необходими за моделирането на механична система, чиито компоненти могат да се идеализират като частици. Единствената разлика в една приложна задача би била наличието на много повече компоненти на механичната система.

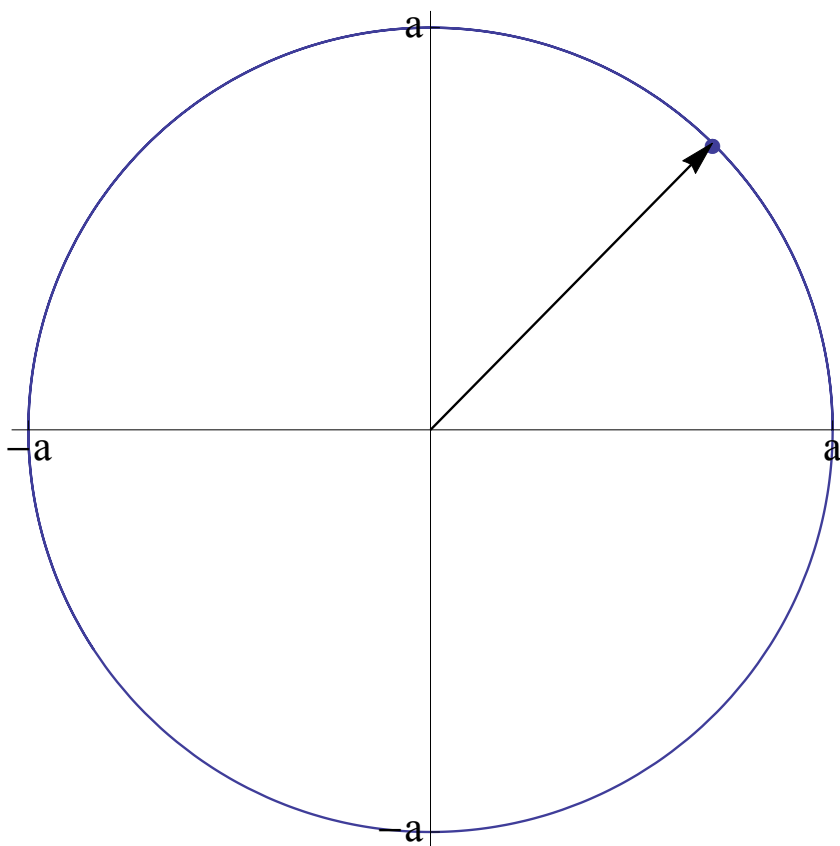
Движение по окръжност и по криволинейна траектория. Тангенциална и нормална компонента на ускорението. Кривина.

Движението по окръжност е частен случай на движение по криволинейна траектория. Неговото разглеждане ще ни позволи да разберем какви са силите, действащи върху един обект, когато не се движи по права линия.

Най-простият случай, от който ще започнем, е движението по окръжност с константна ъглова скорост ω на частица с маса m . Нейната позиция тогава е

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} + a \sin \omega t \hat{\mathbf{j}},$$

където a е радиусът на окръжността. Анимирано движение на частицата може да бъде намерено във файла *Lecture3.nb*.



Основният въпрос, на който ще се опитаме да отговорим, е действа ли сила на обекта и, ако да, каква.

На първата част на въпроса може да се отговори веднага утвърдително, тъй като очевидно векторът на скоростта (по-точно неговата посока) постоянно се променя. Имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(-a\omega \sin \omega t \hat{\mathbf{i}} + a\omega \cos \omega t \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -a\omega^2 \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} - a\omega^2 \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

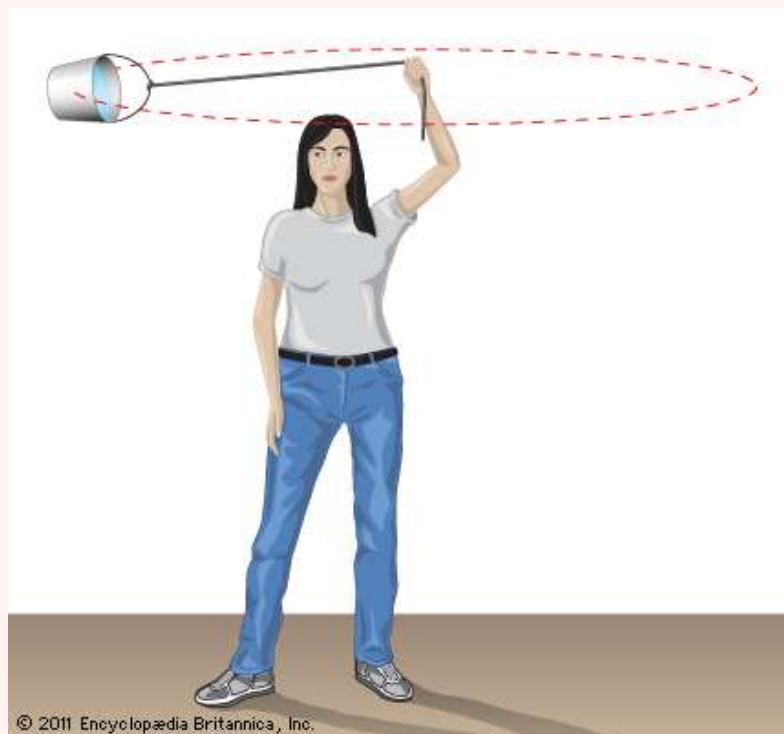
Следователно, за да може едно тяло да се движи по окръжност, трябва да има сила, която го кара да прави това. За нея е изпълнено

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= m\mathbf{a}(t) \\ &= -m\omega^2(a \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} + a \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -m\omega^2 \mathbf{r}(t).\end{aligned}$$

С други думи, за да се движи тялото по окръжност, на него трябва да му действа сила с посока, обратна на радиус-вектора $\mathbf{r}$. Такава сила ще наричаме центростремителна.

N.B. 7

Центростремителната сила не е специален нов вид сила, която действа на телата, защото те се движат по криволинейна траектория. Това е някоя известна сила (например сила на опън, сила на триене и др.), която в конкретния случай кара тялото да се движи по такъв начин. Например в следния случай ролята на центростремителна сила играе силата на опън на въжето, с което тялото е вързано към центъра на окръжността:



N.B. 8

Понятието центростремителна сила не бива да се бърка с понятието центробежна сила. Първата е реална сила, докато втората е фиктивна и е математическа абстракция в случаите, когато работим в не-инерциална координатна система. Ще говорим за такива сили по-нататък в курса.

Нека сега разгледаме произволно (не задължително равномерно) криволинейно движение. Имаме

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{T} =: v \mathbf{T}.$$

Диференцирайки двете страни по отношение на t , получаваме

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt}\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}. \quad (1.1)$$

Ще покажем, че последното е еквивалентно на

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v'\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N} = v'\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}, \quad (1.2)$$

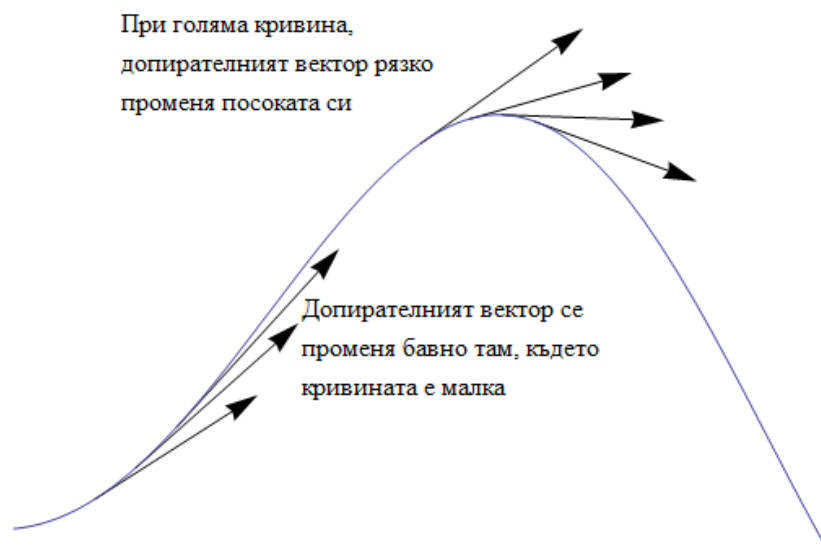
където κ е кривината, а ρ – радиусът на кривина на кривата, определена от $\mathbf{r}(t)$. Последното е в съответствие с резултата, който получихме за равномерно движение по окръжност, където $v' = 0$. За тази цел трябва първо да изясним понятието кривина на крива.

N.B. 9

Уравнение (1.2) на практика представлява разлагане на ускорението по **локален базис** на тангенциална и нормална компонента (вж. анимация, илюстрираща локалния базис във файла Lecture3.nb).

Кривина и радиус на кривина.

Нека разгледаме следната фигура:



Интуитивно е ясно, че там, където $\mathbf{T}$ мени посоката си по-бързо, кривата има по-голяма “кривина”.

Дефиниция 7

Дефинираме понятието **кривина** чрез

$$\kappa := \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Обикновено е по-удобно да пресмятаме кривина, като използваме еквивалентната дефиниция

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (1.3)$$

Пример 16. Кривината на права във всяка точка е 0, тъй като $\mathbf{T}$ не сменя посоката си.

Пример 17. Кривината на окръжност е $\kappa = 1/\rho$, където ρ е радиусът на окръжността. Действително, нека параметризираме окръжността по следния начин:

$$\mathbf{r}(t) = \rho \cos t \hat{\mathbf{i}} + \rho \sin t \hat{\mathbf{j}}.$$

За единичния допирателен вектор получаваме

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = -\sin t \hat{\mathbf{i}} + \cos t \hat{\mathbf{j}}.$$

Сега, използвайки (1.3), получаваме окончателно

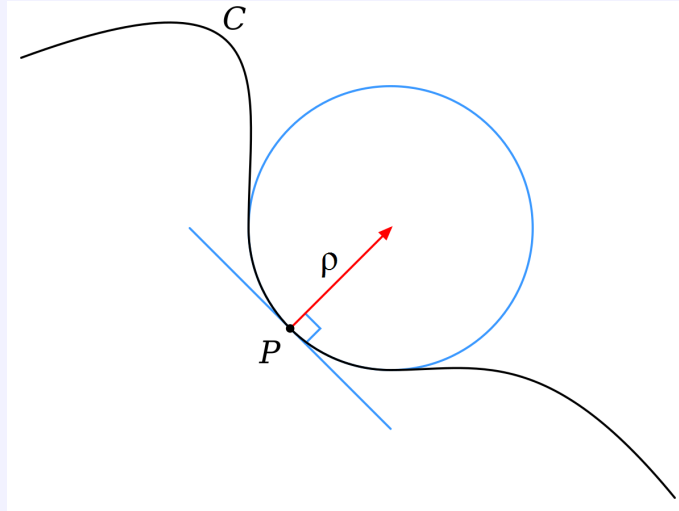
$$\kappa = 1/\rho.$$

Дефиниция 8

Дефинираме **радиус на кривина** на крива в дадена точка чрез

$$\rho := 1/\kappa.$$

С други думи, това е радиусът на окръжността, която можем да поставим в дадената точка и има същата кривина като кривата. Тази окръжност ще наричаме **окръжност на кривина**.



Вече сме готови да се върнем към движението на частица по криволинейна траектория. За да докажем (1.2), е достатъчно да докажем

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \kappa v \mathbf{N}.$$

От (1.3) имаме

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \kappa \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \kappa v.$$

Остава да докажем, че $\mathbf{N}$ задава посоката на $d\mathbf{T}/dt$, т.е. че $d\mathbf{T}/dt \perp \mathbf{T}$. Действително, получаваме

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}.$$

N.B. 10

Движението по криволинейна траектория винаги е ускорително. Нормалната компонента на ускорението е κv^2 , а тангенциалната е v' . С други думи, нормалната компонента отговаря за промяната в посоката на движение, а тангенциалната – за забързването/забавянето на тялото (т.е. за промяната в скаларната скорост). Последното изглежда естествено. При рязък завой (т.е. голямо κ), пътникът в един автомобил бива отхвърлен към прозореца (т.е. в посока, нормална на движението). При рязко натискане/отпускане на педала на газта (т.е. голямо v'), пътникът “се залепя” за седалката или полита напред, т.е. в тангенциална на движението посока.

Нека в допълнение отбележим следния важен резултат, който получихме.

Твърдение 4

Единичната нормала се определя от

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}.$$

1.3 Скалярни функции на векторен аргумент. Линеаризация. Градиент. Производна по направление.

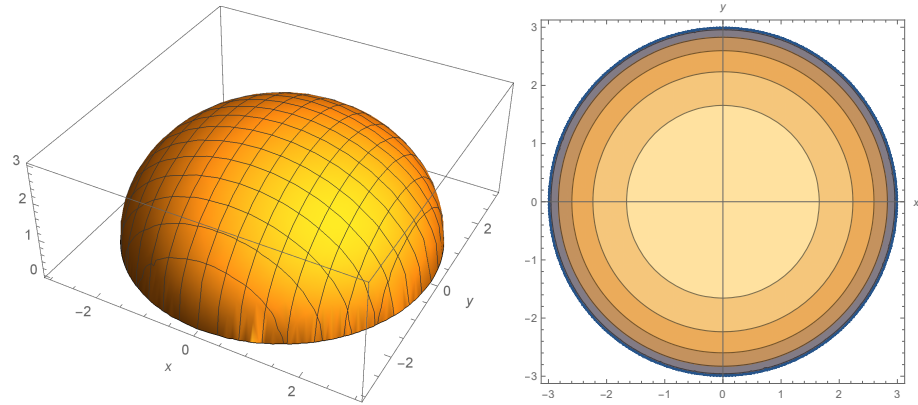
Както отбелязахме, обикновено величините в разглеждан процес зависят от точката в пространството $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и времето t . Разбира се, независимите променливи могат да бъдат и други. С други думи, често е необходимо разглеждането на функции на няколко променливи, например:

- температурата $u(x, y) = u(\mathbf{x})$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$; $u(x, y, z, t) = u(\mathbf{x}, t)$, $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$;
- плътността $\rho(\mathbf{x})$;
- налягането $p(\mathbf{x})$.

Ще разгледаме работата със скалярни функции на векторен аргумент в 2D, тъй като в повече измерения визуализацията е трудна, но идеите са в сила при произволен брой аргументи.

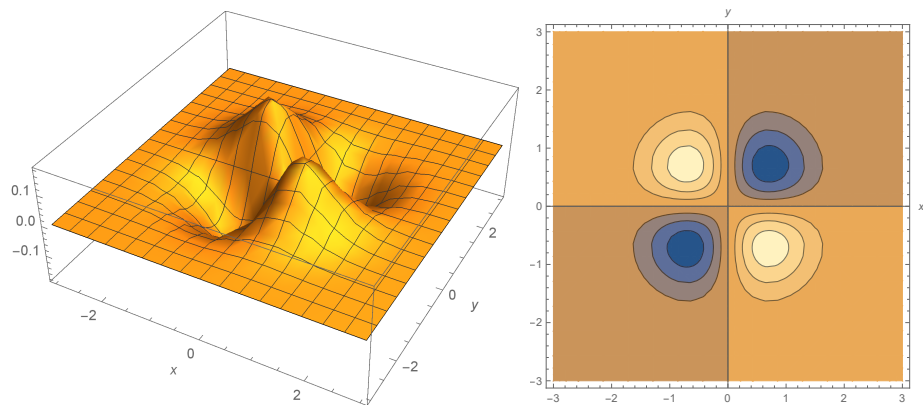
Съществуват два основни начина да визуализираме функция на две променливи – 3D графика (повърхнина) и графика с линии на ниво.

Пример 18. Разглеждаме функцията $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Тя може да бъде визуализирана по един от следните два начина:



Линиите на ниво са окръжности с център – началото на координатната система. Следователно функцията зависи само от разстоянието между точката (x, y) и началото на координатната система. В него се достига и единственият максимум на функцията. Да обърнем внимание, че функцията има смисъл само в кръга $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$. Това ясно се вижда и от двете графики.

Пример 19. Сега нека визуализираме поведението на $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$.



Както виждаме, функцията има два минимума и два максимума, които са симетрични по отношение на началото на координатната система.

Да обърнем внимание на факта, че там, където функцията се изменя бързо, линиите на ниво са много по-близко една до друга, а там, където функцията почти не се изменя, те на практика отсъстват.

Както и при функциите на скаларен аргумент, ще започнем изучаването на функциите на векторен аргумент, като първо въведем понятието граница.

Дефиниция 9

Казваме, че

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$, така че ако $\rho((x, y), (a, b)) < \delta$, $(x, y) \neq (a, b)$, тогава $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

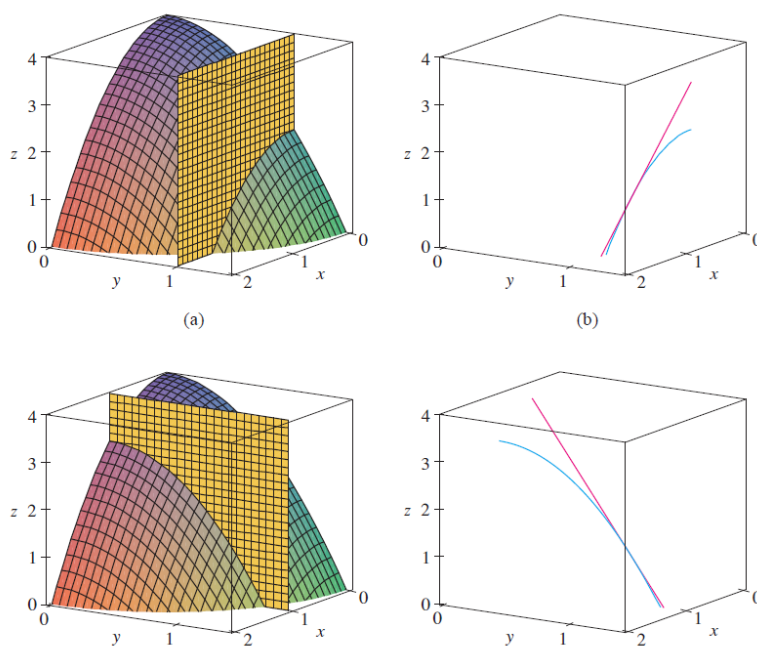
За разлика от едномерния случай, в който аргументът може да приближава граничната стойност само от две посоки (говорим за лява и дясна граница), то в многомерния това може да става по безброй много пътища. За да съществува граница, то стойността, към която се приближаваме, трябва да е една и съща от всички посоки. Ако по два пътя стойностите са различни, граница не съществува. Примери ще бъдат дадени на упражнения.

Имайки понятието за граница, можем да въведем понятието производна. В многомерния случай има няколко различни понятия, които “играят ролята” на производните в 1D. За всички тях обаче основни са частните производни. Оказва се, че в някакъв смисъл е достатъчно да знаем как функцията се изменя в две посоки (тъй като сме в 2D пространство), за да разберем всичко за нея. Частните производни се дефинират, както следва:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Геометрично, частните производни дават наклона на допирателните в съответните направления:

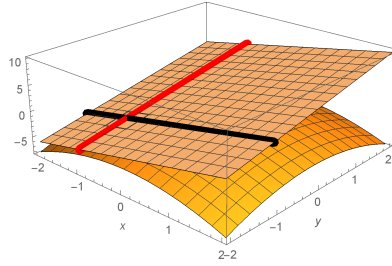


В 1D допирателните са свързани с една от най-важните идеи в анализа – линеаризацията – в достатъчно малка околност на дадена точка, функцията и допирателната ѝ стават на практика неразличими, т.е. можем да апроксимираме функцията с нейната линеаризация. Знаем, че линеаризацията на скалярна функция на една променлива се задава с

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O(|x - x_0|^2).$$

Сега ще изведем аналогичен резултат за скалярна функция на две променливи. Той може лесно да бъде обобщен за функции на повече променливи.

Търсим линеаризацията на $z = f(x, y)$ около точката x_0, y_0 , т.е. допирателната равнина в тази точка. Очевидно тя е еднозначно определена от две права, например в x - и y -направление, съответстващи на частните производни по отношение на x и y .



Общият вид на равнина α е

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и, вземайки предвид, че $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \alpha$, следва, че

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cf(x_0, y_0)$$

и тогава уравнението на равнината добива вида

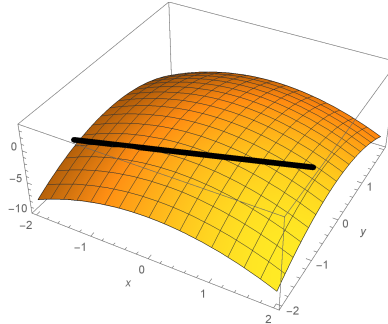
$$z = f(x_0, y_0) + \bar{A}(x - x_0) + \bar{B}(y - y_0),$$

където $\bar{A} = A/C$, $\bar{B} = B/C$.

Сега остава да използваме информацията, която имаме в направления x и y . Ако поставим $y = y_0$, имаме

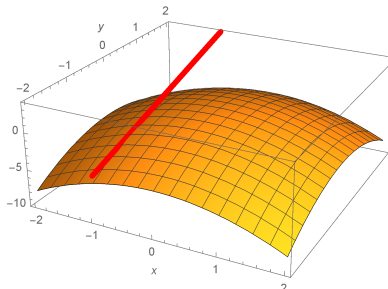
$$z = f(x_0, y_0) + \bar{A}(x - x_0)$$

и разглеждаме допирателната равнина в направление x :



Следователно $\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Аналогично при $x = \bar{x}$, получаваме допирателната в y -направление:



и тогава $\bar{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Окончателно за линеаризацията на $f(x, y)$ около $(\bar{x}, \bar{y})$ получаваме

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0).$$

Записано във векторен вид, последното е еквивалентно на

$$f(\bar{\mathbf{x}}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Векторът, съдържащ производните в двете главни направления (т.е. частните производни) се среща често във векторния анализ и затова заслужава специално име. Този факт е естествен, тъй като, както отбелязахме, поведението на функцията в двете главни направления би трябвало да е достатъчно, за да опише (в някакъв смисъл) поведението ѝ в 2D.

Дефиниция 10

Векторът от частните производни на функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ се нарича градиент и се бележи с

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Нека сега формулираме общия вид на изведената линеаризация.

Твърдение 5

Линеаризацията на скалярната функция $f(x_1, \dots, x_n)$ около точката $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ се задава с

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} (x_n - \bar{x}_n).$$

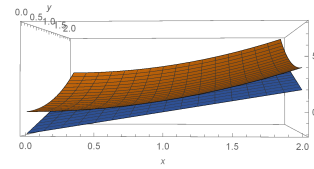
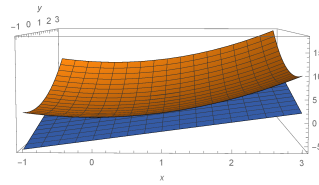
Използвайки векторна нотация, горното означава, че

$$f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + O(|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}|^2).$$

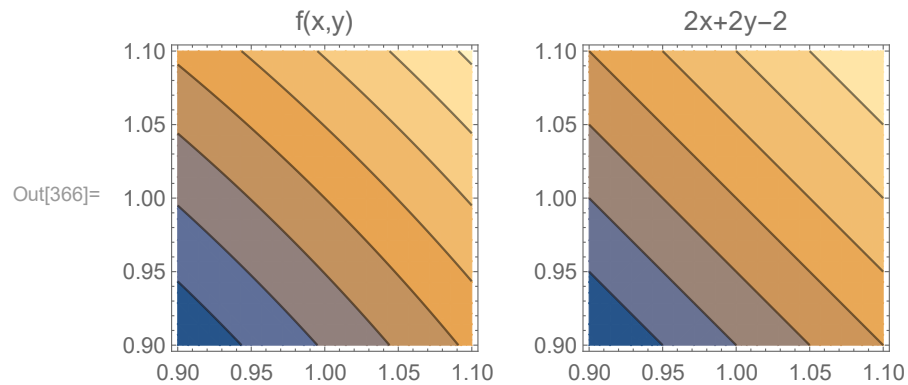
Пример 20. Да намерим допирателната равнина към графиката на $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ в точката $(1, 1, 2)$. Тя се определя от

$$\begin{aligned} z &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = 2 + (2x, 2y)|_{1,1} \cdot (x - 1, y - 1) \\ &= 2x + 2y - 2. \end{aligned}$$

Както можем да видим при приближаване към точката, т.е. като построим графиката на функцията и допирателната равнина в по-малка околност на точката, двете започват да се приближават една към друга и да стават визуално неразличими (вж. интерактивна визуализация във файла *Lecture4.nb*).



Да обърнем внимание и на следния факт – в малка околност на точката, линиите на ниво на оригиналната функция са почти успоредни линии – нещо характерно за равнина.



N.B. 11

Това е причината, поради която линеаризацията играе ключова роля в анализа, Заменяме нелинейния обект (за който често знаем много малко, липсва обща теория, работи се трудно) с линеен, който **локално** може да замени оригиналния обект. Линеината теория е много по-добре развита и често позволява да заключим важни неща за локалното поведение на оригиналния обект.

Впрочем ние можем да изведем линеаризацията на дадена функция и използвайки други съображения. Да разгледаме изменението

$$\Delta f := f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Нека означим още $\Delta x := x - x_0$, $\Delta y := y - y_0$. Тогава

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)]. \end{aligned}$$

С други думи описваме изменението, като първо се движим по x , а след това по y . Последното е еквивалентно на

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} \Delta y \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \end{aligned}$$

В последното приближение използвахме факта, че Δx и Δy са малки числа.

Така полученият резултат ни позволява лесно да изведем и правилото за пресмятане на производна на сложна функция (англ. *Chain rule*).

Твърдение 6

Нека имаме функцията $f(x(t), y(t))$. Тогава

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Доказателство. Имаме

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + o(|\Delta|).$$

Делим двете страни на Δt и го пускаме да клони към нула, за да получим търсения резултат. $\square$

Остана в настоящия параграф да разгледаме още едно важно понятие, необходимо при работата с функции на много променливи.

Дефиниция 11

Производната на f в точката $\bar{\mathbf{x}} = (x_0, y_0)$ в направление на единичния вектор $\mathbf{u} = (a, b)$ се дефинира с границата

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{u}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h},$$

когато тази граница съществува.

Както можем да очакваме, производната по произволно направление може да се изрази чрез двете частни производни, тъй като оставаме върху същата равнина (определена от линеаризацията).

Твърдение 7

Производната по направление на единичния вектор $\mathbf{u}$ може да се изрази чрез

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Доказателство. Ще дадем две доказателства. Първо, нека дефинираме

$$g(h) := f(x_0 + ha, y_0 + hb).$$

Тогава

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

Използвайки chain rule, от друга страна, имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Другото доказателство, което ще приведем, се основава на равенството

$$\Delta f = \frac{f(x_0 + ah, y_0) - f(x_0, y_0)}{ah} ah + \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0 + ah, y_0)}{bh} bh.$$

Сега делим двете страни на h , което пускаме да клони към 0. □

Какво ни дава градиентът?

Ще коментираме три много важни въпроса, свързани с градиента на дадена скаларна функция f :

1. Градиентът е вектор, който сочи в посоката на най-бързо нарастване на функцията.

Доказателство. Производната в направление $\mathbf{u}$ е

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \|\nabla f\| \cos \angle(\nabla f, \mathbf{u}).$$

Последното очевидно е максимално, когато косинусът е равен на 1, т.е. когато $\mathbf{u}$ е в същата посока като ∇f . □

2. Компонентата (или скаларната проекция) на градиента в дадено направление дава производната на функцията в това направление. По тази причина често се използва нотацията $\nabla_{\mathbf{u}} f$ за производна в направление $\mathbf{u}$.
3. Градиентът е ортогонален на линията на ниво на функцията в дадената точка.

Забележка. Няма да доказваме този факт, но той е естествен, тъй като градиентът сочи в посоката на най-бързо изменение, а линията на ниво описва посоката, в която функцията е константа.

Пример 21. Нека разгледаме следното уравнение от тип реакция-дифузия.

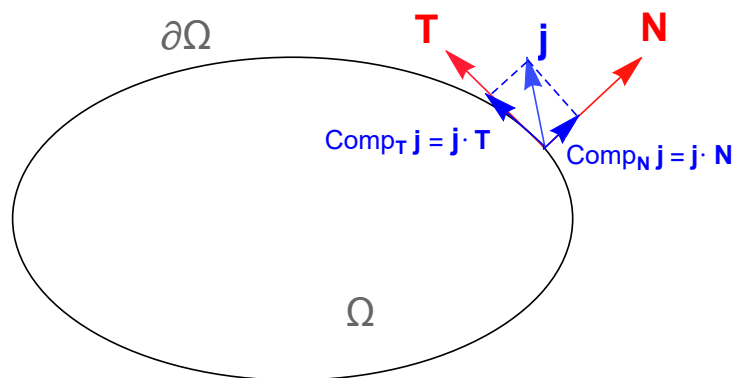
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(u),$$

дефинирано в дадена област Ω . Засега няма да се спираме подробно на структурата на самото уравнение, тъй като ще разгледаме тези (всъщност по-общ клас) математически модели след две теми. Ще отбележим само, че дифузионният поток на величината u , например температура или концентрация на дадено вещество, е от места с големи към места с малки стойности. Записано математически, това означава

$$\mathbf{j}_{diff} = -D \nabla u,$$

т.е. това е вектор в посоката $-\nabla u$ на най-бързо намаляване на u .

Ако поискаме да наложим гранично условие за нулев поток през границата (изолирана система), това означава, че компонентата на $\mathbf{j}_{diff}$ в нормално направление трябва да е 0. Нека припомним, че всеки вектор може да бъде разложен на нормална и тангенциална компонента.



Потокът в тангенциално направление всъщност остава в областта. Т.е. ние трябва да наложим условието върху нормалната компонента:

$$\mathbf{j}_{diff} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Вземайки предвид казаното по-горе за градиентния вектор, последното условие е еквивалентно на

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

На упражнения диференциалната задача ще бъде решена и ще бъде илюстриран дифузионният поток, който е свързан с градиентното поле.

1.4 Векторни функции на векторен аргумент. Дивергенция и ротация на векторно поле.

Често се налага да разглеждаме дадена векторна величина като функция на няколко променливи. Да дадем няколко примера.

Пример 22 (Силов поле). Законът на Нютон за гравитацията гласи, че големината на гравитационната сила между два обекта с маси m и M е

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2},$$

където G е гравитационната константа, а r е разстоянието между обектите.

Нека тяло с маса M се намира в началото на дадена координатна система и нека $\mathbf{x}$ е радиус-векторът, съответстващ на позицията на частица с маса m . Ще формулираме закон за силата $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ действаща върху тялото с маса m първо във векторна (т.е. координатно-инвариантна) форма.

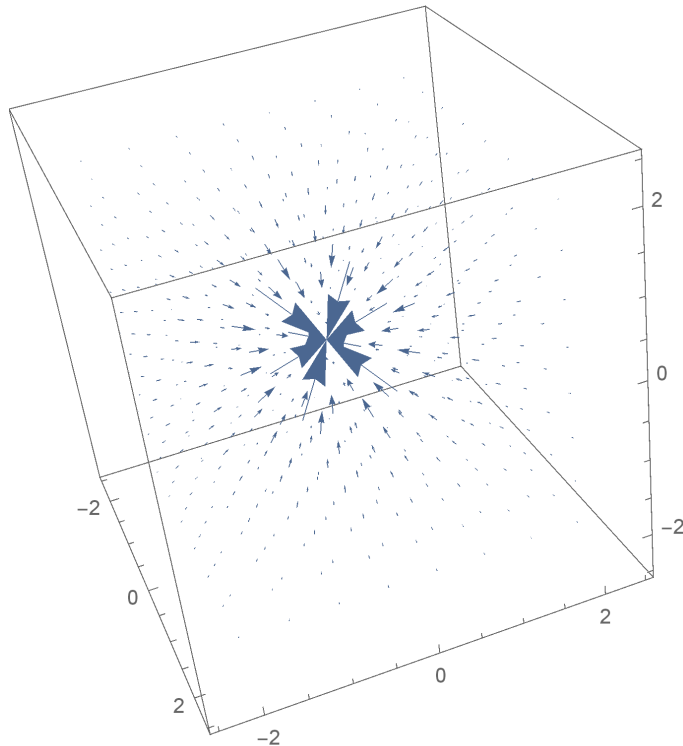
Векторът на силата $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ има посока от тялото с маса m към това с маса M . Единичният вектор, задаващ това направление, е $-\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Следователно

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}.$$

Обикновено, за да използваме закона, трябва да го запишем в координатна форма. Използвайки декартови координати, $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, получаваме

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}.$$

Визуализираме векторното поле по-долу:



Както виждаме, силата се увеличава при приближаване до началото на координатната система.

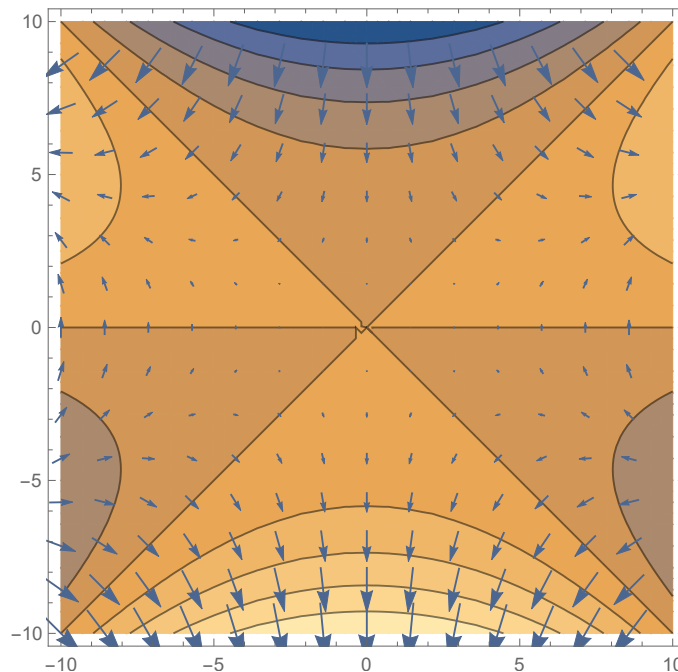
Пример 23 (Векторно поле, описващо поток/градиентно поле). Потокът също представлява векторно поле. Например дифузионният поток на вещество с концентрация $f(\mathbf{x})$ е свързан с градиентното поле:

$$\mathbf{j}_{diff} = -D\nabla f.$$

Нека например $f(x, y) = -x^2y + y^3$ и $D = 1$. Потокът се задава с

$$-\nabla f(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}.$$

Нека визуализираме векторното поле заедно с линиите на ниво на f :



Можем да забележим, че градиентното поле е ортогонално на линиите на ниво. Това, разбира се, може да се очаква, тъй като, както показвахме, градиентът сочи в посоката на най-бързо нарастване на функцията, а линиите на ниво свързват точки с еднакви стойности.

Освен това виждаме, че векторите са по-големи там, където линиите на ниво са по-близо една до друга, т.е. концентрацията се изменя по-бързо.

Сега ще дефинираме понятието граница и ще изведем линеаризацията на дадено векторно поле.

Дефиниция 12

Ако $\forall \varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon)$ такава, че $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ от $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$ следва, че $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{L}) < \varepsilon$, наричаме L граница на $\mathbf{f}$ при $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$.

За да получим линеаризацията на дадено векторно поле $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ около точката $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, линеаризираме всяка от компонентите поотделно, като вземем

предвид, че можем да работим покомпонентно с векторни функции, когато пресмятаме граници, производни и т.н.:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix} + O(|2|) \\
 &= \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix} + O(|2|) \\
 &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + J(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + O(|2|),
 \end{aligned}$$

където J е матрицата на Якоби за $\mathbf{f}$ по отношение на $\mathbf{x}$.

Твърдение 8

Линеаризацията на векторното поле $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ около точката $\bar{\mathbf{x}}$ се задава с $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + J(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$.

Линеаризацията играе важна роля при решаването или изследването на редица нелинейни задачи.

Пример 24 (Метод на Нютон за решаване на нелинейни алгебрични системи.). Нека е дадена системата

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Методът на Нютон е итерационен метод, при който започваме с начално приближение $\mathbf{x}_0$ и намираме следващите по формулата

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J^{-1}(\mathbf{x}_i)\mathbf{f}(\mathbf{x}_i).$$

Той се основава на решаването на линеаризираната около точката $\mathbf{x}_i$ система:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + J(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0.$$

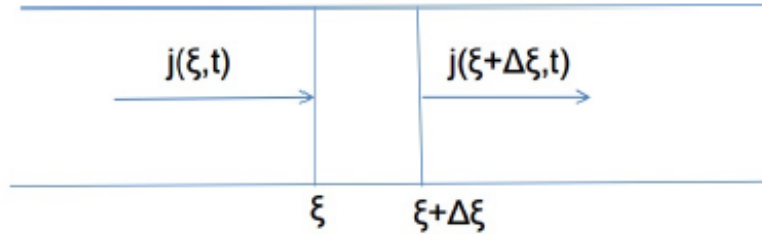
Основните диференциални операции върху дадено векторно поле $\mathbf{F}$ са отново свързани с оператора $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$. Той може да действа по два начина върху $\mathbf{F} = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n})$ (засега разглеждаме стандартни декартови координати):

$$\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F}.$$

И двата имат важен физически смисъл и ще ги разгледаме последователно

Дивергенция на векторно поле

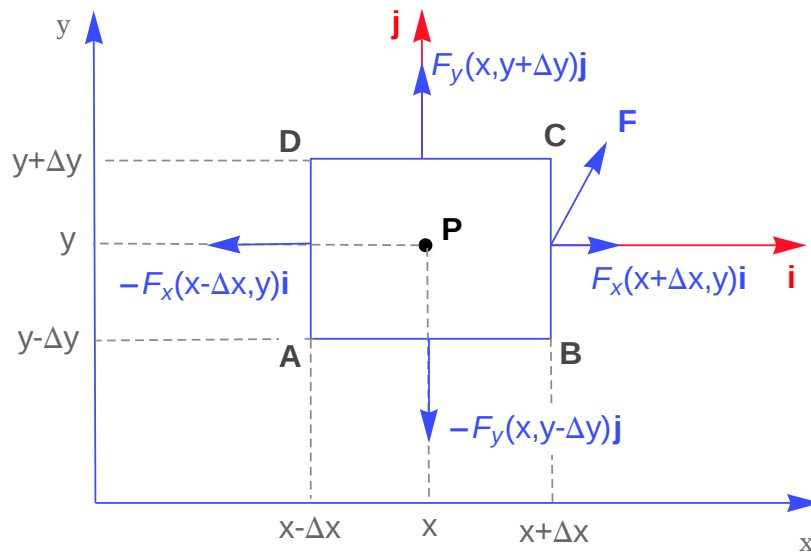
Много от математическите модели на физически процеси се основават на закони за запазване. Да си припомним как изглеждат нещата в 1D:



Изменението на величината u , определено от потока j , е вследствие на разликата между това, което “влиза” в точката, и това, което “излиза” от нея, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Нека видим как можем да обобщим тази идея в 2D (в 3D е аналогично). Тук ще заградим точката с правоъгълник със страни, които ще пуснем да клонят към 0:



Тъй като Δx и Δy ще бъдат пуснати да клонят към 0, можем да считаме, че върху всяка от страните на правоъгълника $\mathbf{F}$ е “почти константа”. Тогава нетното изтичане през AD и BC за единица време е

$$[\mathbf{F}(x + \Delta x, y) - \mathbf{F}(x - \Delta x, y)]2\Delta y \cdot \mathbf{i} = [F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x - \Delta x, y)]2\Delta y.$$

Нетното изтичане през AB и CD е

$$[\mathbf{F}(x, y + \Delta y) - \mathbf{F}(x, y - \Delta y)]2\Delta x \cdot \mathbf{j} = [F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y - \Delta y)]2\Delta x.$$

Тогава средното изтичане през границите на правоъгълника на единица обем (в случая, площ) е

$$\frac{F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \frac{F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}.$$

N.B. 12

Всички точкови характеристики на непрекъснатата среда се дефинират като граничен преход при обем, клонящ към 0. Впрочем не е необходимо да затворим точката в правоъгълник. Можем да я затворим в произволен обем, но при граничния преход няма значение. Ще се върнем на този въпрос по-късно.

И така, вече сме готови да дефинираме понятието дивергенция в координатен вид.

Дефиниция 13

Дивергенцията на векторното поле $\mathbf{F} = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n})$, зададено с декартовите си координати, е

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{\partial F_{x_1}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_{x_n}}{\partial x_n}.$$

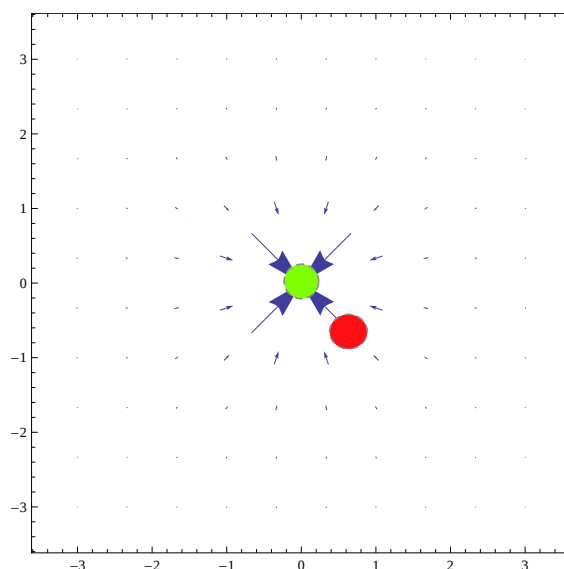
Последната дефиниция е еквивалентна на геометрически-инвариантна дефиниция, която съдържа в себе си и физическия смисъл на понятието. Засега ще я приведем само на интуитивно ниво и ще я уточним по-късно.

Дефиниция 14

Дивергенцията на векторното поле $\mathbf{F}$ (нека си мислим за него като за поток) е “средното изтичане от точката за единица време на единица обем”:

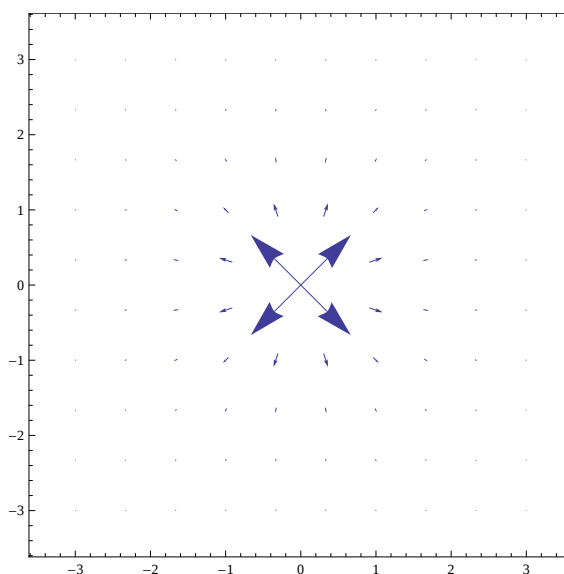
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{нетното изтичане от елементарния обем } \Delta V \text{ за единица време}}{\Delta V}.$$

Пример 25. Да разгледаме векторното поле, изобразено по-долу:



Дивергенцията в зелената точка е отрицателна, тъй като всичко “влиза” в точката. Дивергенцията в червената точка е положителна, тъй като от нея повече “излиза”, отколкото “влиза”.

Пример 26. Да разгледаме векторното поле, изобразено по-долу:



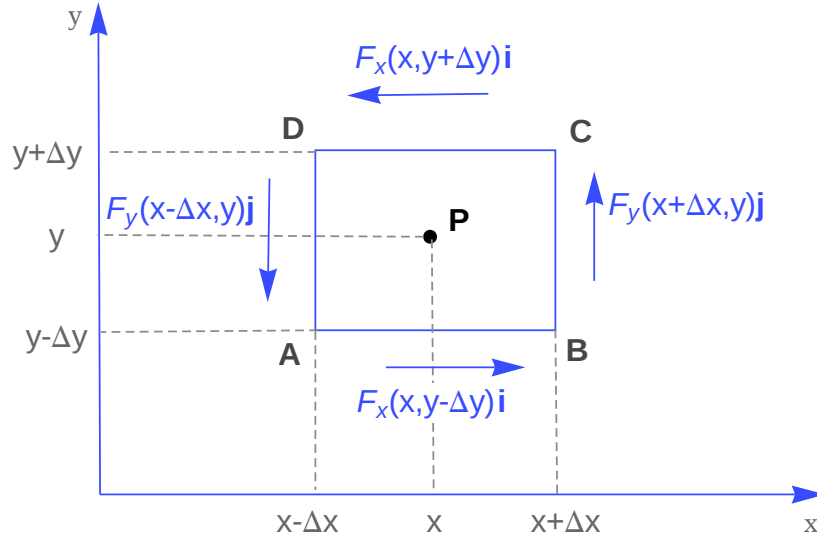
Дивергенцията в началото на координатната система е положителна, тъй като всичко “излиза” от точката.

Ротация на векторно поле

Другата важна диференциална операция е ротацията на векторното поле, $\text{curl } \mathbf{F}$, $\nabla \times \mathbf{F}$ (използват се още термините ротор, вихър).

Много потоци имат тенденция да извършват въртеливи движения. Така например, ако поставим коркова тапа във флуид, който се характеризира с такъв поток, тя ще започне да се върти около някаква ос на въртене. За да опишем въртеливите движения, е необходимо да опишем оста на въртене, посоката (срещу часовниковата или по часовниковата стрелка) и големината, т.е. това е векторна величина.

Нека разгледаме въртенето около ос в направление $\mathbf{k}$ в дадена точка. За тази цел ще разгледаме движението на частиците по границата на правоъгълна област, заграждаща точката, нека я означим с P . Засега ще разгледаме равнината, съдържаща P и ортогонална на $\mathbf{k}$, т.е. ще опишем съответната 2D ротация (2Dcurl). На фигурата по-долу е илюстриран “идеалният” случай за това как трябва да изглежда потокът, за да бъде ротацията положителна.



И така, сумарният поток по границата на областта е

$$[F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x - \Delta x, y)] 2\Delta y + [F_x(x, y - \Delta y) - F_x(x, y + \Delta y)] 2\Delta x.$$

Тогава можем да определим средния поток “около” областта на единица площ като

$$\frac{F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \frac{F_x(x, y - \Delta y) - F_x(x, y + \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} =: 2\text{Dcurl } \mathbf{F}.$$

Разглеждайки ротацията в 3D, това, което получихме, е всъщност $\mathbf{k}$ -компонентата на ротацията. Аналогично можем да получим и останалите две. Така дефинираме ротацията по следния начин.

Дефиниция 15

Ротацията на векторното поле $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$ се дефинира чрез

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

1.5 Операторът ∇ в недекартови координатни системи

Основното предимство на формулирането на математическите модели в операторна форма е, че така те са независими от конкретната геометрия и от избора на координатна система. За да можем да се възползваме от това предимство обаче, е необходимо да можем да представим участващите оператори в координатна форма. Ще илюстрираме идеята, като намерим координатно представяне на оператора ∇ в полярни координати

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Основна разлика на работата в полярни координати в сравнение с работата в декартова координатна система е, че базисните вектори (които сочат в посоката накъдето растат независимите променливи) са различни във всяка точка. **С други думи, при работата в полярни координати (или изобщо криволинейни координати) дефинираме локален базис.** В случая той има вида (проверете!)

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix}.$$

Вземайки предвид, че матрицата на трансформацията е ротационна матрица, можем лесно да напишем и обратната трансформация:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix}.$$

И така, вече сме готови да представим оператора ∇ в полярни координати. Получаваме последователно

$$\begin{aligned} \nabla &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (\cos \varphi \hat{\mathbf{r}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + (\sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Нека видим сега как, използвайки последния резултат, можем да пресметнем дивергенцията на векторното поле

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (F_r \hat{\mathbf{r}}) + \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_r \hat{\mathbf{r}}) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Да обърнем внимание, че в последното е взет предвид фактът, че $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\varphi}$ зависят от φ .

За оператора на Лаплас получаваме

$$\begin{aligned}\Delta f &= \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

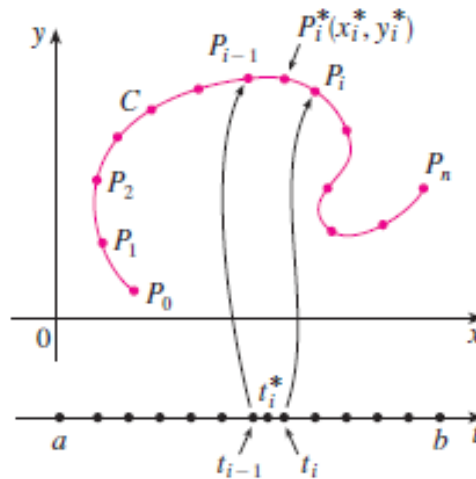
Координатното представяне на оператора ∇ в стандартни координатни системи (напр. цилиндрични, сферични и др.) може да бъде намерено лесно в справочници и интернет. Важно е обаче да знаем какъв е принципът за извеждането на тези координатни представяния, тъй като се налага работата и в координатни системи, които не са стандартни, а са специфични за дадена конкретна задача (това се налага често например при описването на еластични тела).

1.6 Криволинейни интеграли

Криволинейните интеграли са обобщение на класическия риманов интеграл. Нека е дадена крива C , върху която е определена функцията $f(\mathbf{x})$. Обикновено кривата C се дефинира аналитично чрез векторната функция $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \leq t \leq b$. Ако разделим параметричния интервал $[a, b]$, въвеждайки точките t_i , $i = 1, \dots, n$, то кривата също се разделя на дъги от съответните точки $P_i = \mathbf{r}(t_i)$. Избирайки точките $P_i^* = (x_i^*, y_i^*)$ от всяка дъга с дължина Δs_i , дефинираме

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i,$$

ако последната граница съществува.



Пример 27. Нека плътността на тънка тел, чиято геометрия е описана от кривата C , е означена с ρ . Тогава можем да намерим масата на телта върху инфинитезимална част от нея с дължина ds чрез произведението ρds . Сумирайки

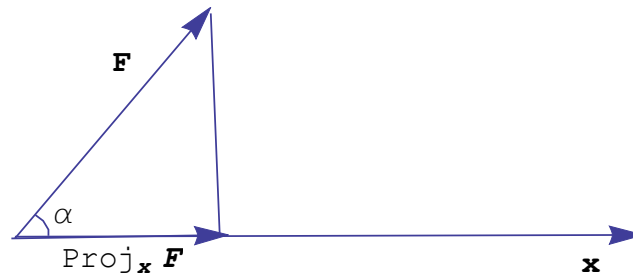
върху цялата тел, получаваме нейната маса, т.е.

$$\int_C \rho ds.$$

Пример 28. Дължината на дадена крива C може да бъде намерена чрез сумирането на инфинитезималните дъги ds , т.е.

$$\int_C ds.$$

Пример 29. Работата, извършвана от константна сила, действаща върху движещо се тяло, е силата по изминатия път. По-точно, ако силата не е в същата посока като движението на тялото, трябва да вземем само компонентата на силата в съответното направление, тъй като останалите компоненти нямат пряко отношение към движението. Следователно, ако силата $\mathbf{F}$ действа върху тяло, движещо се между точките A и B , както е изобразено на фигурата:



то работата е равна на $\|\text{Proj}_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\| \|\mathbf{x}\|$, където $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$ е векторът на отместването, а $\text{Proj}_{\mathbf{x}} \mathbf{F}$ е векторната проекция на $\mathbf{F}$ върху $\mathbf{x}$. Вземайки предвид, че $\|\text{Proj}_{\mathbf{x}} \mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}\| \cos \alpha$, тогава можем да изразим работата W чрез $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$.

Нека сега разгледаме частица, движеща се в силово поле, определено от векторната функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ и нека траекторията на частицата е определена от $\mathbf{r}(t)$. Тогава във всяка точка трябва да умножим $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, за да получим работата върху инфинитезимална част от траекторията, и да сумираме върху цялата траектория C (направете фигура, която илюстрира казаното):

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

1.7 Основни теореми на интегралното смятане

1.7.1 Основна теорема за криволинейни интеграли

Теоремата на Нютон–Лайбниц (която е частен случай на основната теорема за криволинейни интеграли) гласи, че

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

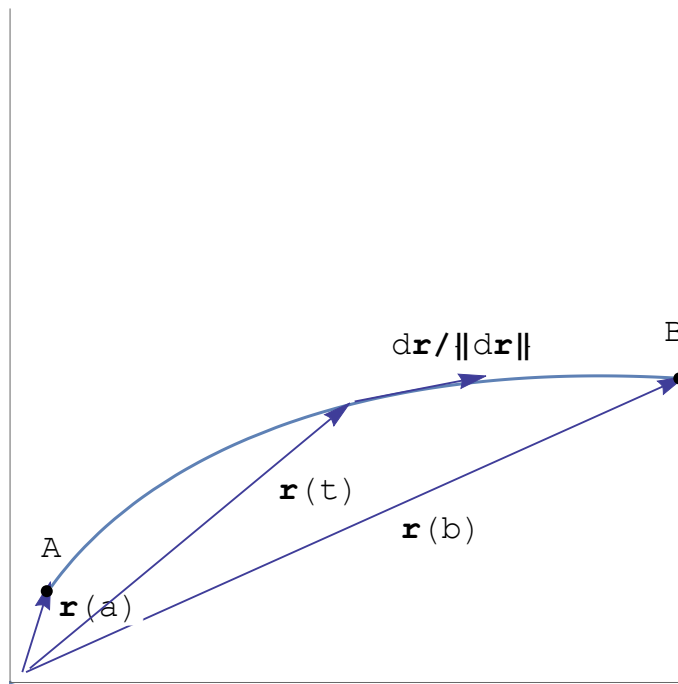
Последното може да бъде проверено лесно. Наистина, започвайки от $f(a)$, трябва да добавим всички инфинитезимални изменения df , за да получим $f(b)$:

$$f(a) + \int_a^b df = f(b).$$

Тъй като обикновено имаме определена функцията $f(x)$, е по-удобно да запишем интеграла във вида

$$\int_a^b df = \int_a^b \frac{df}{dx} dx.$$

Подобен резултат можем да получим в общия случай за криволинейни интеграли. Нека разгледаме кривата, определена от векторната функция $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Нека функцията f е дефинирана и достатъчно гладка върху кривата.



Разсъждавайки аналогично на теоремата на Нютон–Лайбниц, получаваме

$$f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = \int_C \left(\begin{array}{c} \text{скоростта на изменение по направление} \\ \text{на кривата в дадената точка} \end{array} \right) ds.$$

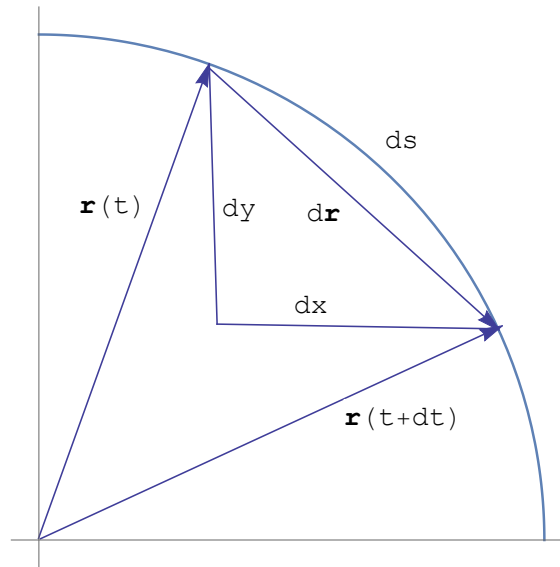
За да пресметнем производната по направление на кривата в дадена точка, трябва да пресметнем единичен вектор, сочещ по направление на кривата. Можем да изберем

$$\frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}$$

или, което е същото $d\mathbf{r}/\|d\mathbf{r}\|$. Тогава

$$f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = \int_C \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{\|d\mathbf{r}\|} ds.$$

Вземайки предвид, че $\|d\mathbf{r}\|$ е равно на $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$ (виж фигурата по-долу),



получаваме следната по-компактна форма.

Твърдение 9: Основна теорема за криволинейни интегрални

Нека C е гладка крива, зададена чрез векторната функция $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$. Нека f е функция, която е определена и непрекъснато-диференцируема върху C . Тогава

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

Пример 30. Да пресметнем работата, извършена от гравитационното поле

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

при движението на частица с маса m от точката $(3,4,12)$ до точката $(2,2,0)$ по дадена по части гладка крива C .

Показахме, че работата може да бъде определена чрез

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогава, ако можем да намерим скаларната функция $f(x, y, z)$ така, че $\nabla f = \mathbf{F}$, можем да използваме Основната теорема за криволинейни интегрални. Избираме функцията

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(проверете, че тя удовлетворява условието). Тогава работата е равна на $f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) = mMG(1/(2\sqrt{2}) - 1/13)$.

1.7.2 Теорема на Green

Твърдение 10: Теорема на Green

Нека $\partial\Omega$ е положително ориентирана, по части гладка, проста затворена крива в равнината и нека Ω е областта, заградена от нея. Ако $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са функции, дефинирани и непрекъснато диференцируеми в отворена област, съдържаща Ω , тогава

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (Pdx + Qdy).$$

Доказателство. Ще приведем доказателство не в най-общия случай, но случай, който е достатъчно общ за всички практически цели.

Първо, нека Ω е проста област в следния смисъл:

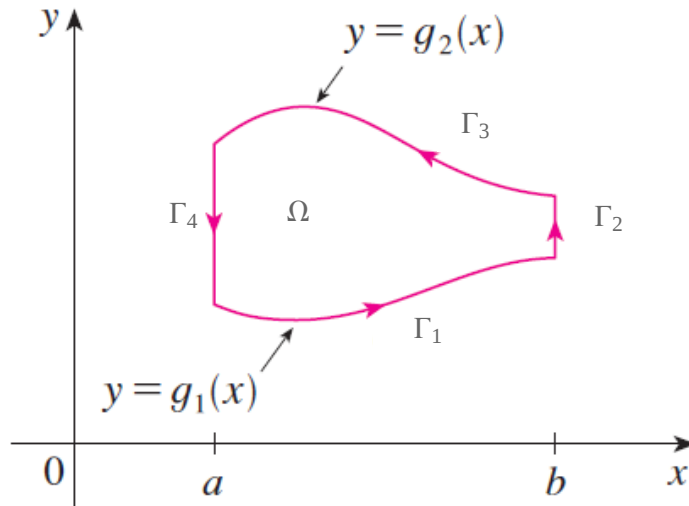
- Ω може да се представи във вида

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}; \quad (1.4)$$

- Ω може да се представи и във вида

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \quad (1.5)$$

Пример за такава област е илюстриран по-долу, където областта е представена във вида (1.4).



Вземайки предвид (1.4), получаваме (вж. последната фигура)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx &= \int_{\Gamma_1} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_2} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_3} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_4} P(x, y)dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx. \end{aligned}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx.\end{aligned}$$

Следователно

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y) dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega.$$

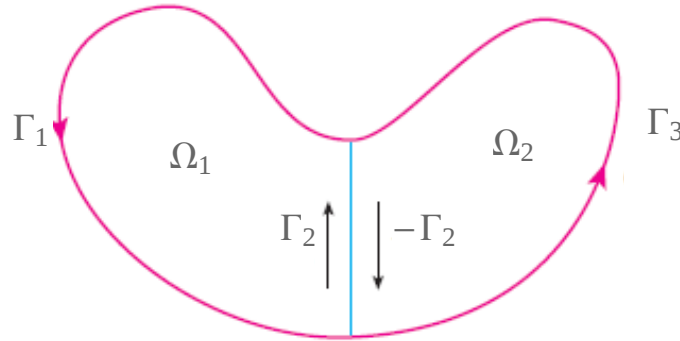
Аналогично, като се използва (1.5), се проверява, че

$$\oint_{\partial\Omega} Q(x, y) dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\Omega.$$

Следователно Теоремата на Green е в сила за области, които могат да се представят едновременно във вида (1.4) и във вида (1.5).

Оказва се обаче, че теоремата може лесно да се обобщи и за обединение на такива области, като се вземе предвид, че криволинейните интеграли върху общите им граници два по два се съкращават. Ще покажем как това се прави за обединението на две области, а за повече става аналогично.

Нека разгледаме областта $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, където Ω_1 и Ω_2 са прости области:



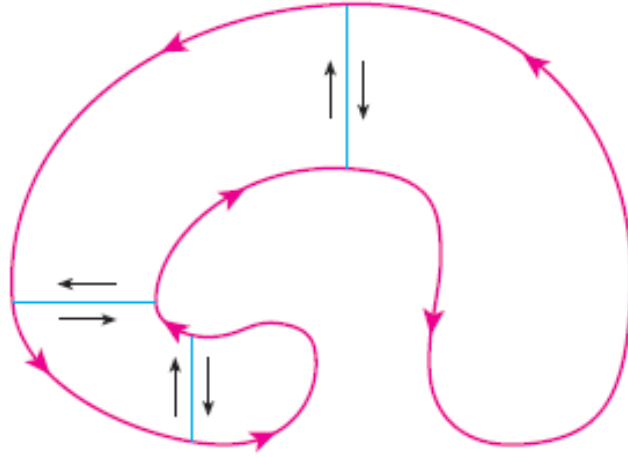
Тогава, прилагайки Теоремата на Green за всяка от простите области, получаваме

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega &= \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (P dx + Q dy), \\ \iint_{\Omega_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega &= \oint_{\Gamma_3 \cup -\Gamma_2} (P dx + Q dy).\end{aligned}$$

Събирайки почленно последните уравнения, получаваме

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (P dx + Q dy).$$

Обобщението за обединение на краен брой прости области е напълно аналогично и е илюстрирано само графично по-долу:



Теоремата може да се обобщи и до вида, в който я формулирахме, но пропускаме това доказателство, тъй като повечето случаи, възникващи на практика, се покриват от това, което вече разгледахме. $\square$

1.7.3 Векторни форми на теоремата на Green

Твърдение 11: 2D Теорема за дивергенцията

При предположенията на Теоремата на Green е в сила

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\Omega.$$

Доказателство. Нека функцията $\mathbf{F}$ е определена чрез $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y)\hat{\mathbf{j}}$ и нека $\partial\Omega$ се определя чрез векторната функция $\mathbf{r}(t)$. Вземайки предвид, че единичната външна нормала може да се пресметне чрез $(dy/\|\mathbf{dr}\|, -dx/\|\mathbf{dr}\|)$ (проверете), получаваме последователно

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left(P(x, y) \frac{dy}{\|\mathbf{dr}\|} - Q(x, y) \frac{dx}{\|\mathbf{dr}\|} \right) ds \\ &= \oint_{\partial\Omega} (Pdy - Qdx) \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\Omega. \end{aligned}$$

$\square$

Непосредствено се проверява и че следното представяне на Теоремата на Green във векторен вид е в сила:

Твърдение 12: 2D Теорема на Stokes

При предположенията на Теоремата на Green е в сила

$$\iint_{\Omega} (2D \operatorname{curl} \mathbf{F}) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

или, което е същото,

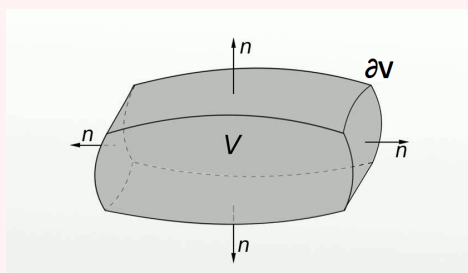
$$\iint_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

N.B. 13

Теоремата за дивергенцията и теоремата на Stokes могат да се докажат и в 3D:

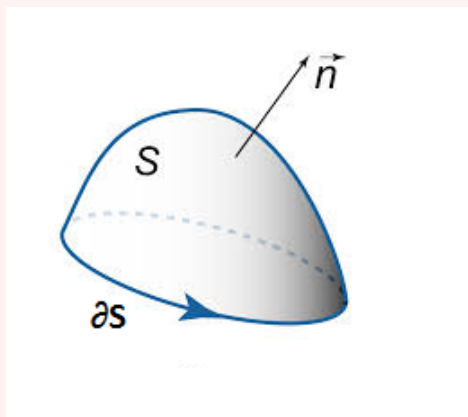
- Теорема за дивергенцията (Теорема на Гаус–Остроградски):

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$



- Теорема на Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



За повече подробности, вж. напр. “J.Stewart, Calculus”.

1.8 Уравнения на топло- и масо-пренос

1.8.1 Уравнение на непрекъснатостта. Координатно-ивариантна дефиниция за дивергенция.

Ще изведем общия вид на един закон за запазване в 2D (всъщност, тъй като извеждането се основава на Теоремата за дивергенцията, то е валидно и в 3D). Изменението на нетното количество U в дадена област Ω може да се дължи или на нещо, което е минало през границата на областта, или на нещо, което се генерира/поглъща в нея. Тогава

$$\frac{dU}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds + F,$$

където $\mathbf{j}$ е потокът, а F е нетното производство/поглъщане в областта за единица време. Последното е **интегралната форма на закона за запазване**. За да сведем закона до диференциална форма, първо, делим двете страни на $|\Omega|$ и получаваме

$$\frac{d(U/|\Omega|)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds + \frac{F}{|\Omega|}. \quad (1.6)$$

Сега използваме Теоремата за дивергенцията и получаваме

$$\frac{d(U/|\Omega|)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} d\Omega + \frac{F}{|\Omega|}.$$

Използвайки Теоремата за средните стойности и пускайки $|\Omega| \rightarrow 0$, получаваме окончателно **Уравнението на непрекъснатостта**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} + f. \quad (1.7)$$

N.B. 14

Всички точкови характеристики на дадена непрекъсната среда се получават посредством граничен преход. В последното уравнение използваните означения имат следния смисъл: дефинираме

$$u := \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{U}{|\Omega|}, \quad f := \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{F}{|\Omega|}.$$

Начинът, по който изведохме уравнението на непрекъснатостта, ни дава основание да формализираме координатно-ивариантната Дефиниция 1.4 за дивергенция по следния начин (сравнете (1.6) и (1.7)):

Дефиниция 16

Дивергенцията на векторното поле $\mathbf{F}$ в точката P е:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Omega \rightarrow \{P\}} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds.$$

1.8.2 Уравнения от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис

Глава 2

Линейни алгебрични системи, линейни пространства, линейни трансформации

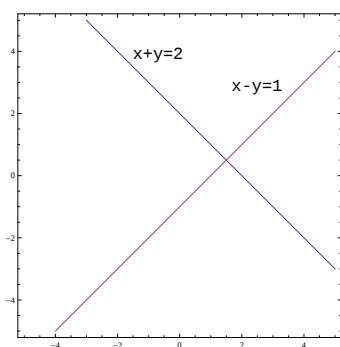
2.1 Геометрия на линейните алгебрични системи

Често е полезно да имаме геометрична интерпретация на даден аналитичен обект. Ще разгледаме две геометрични представяния на дадена линейна система. Първо, ще коментираме “row picture” за линейна система

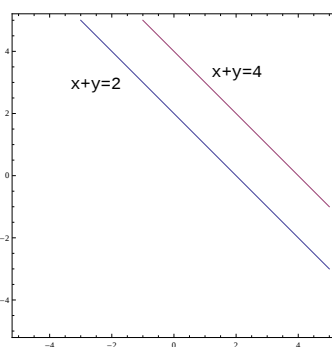
В 2D можем да визуализираме всяко от уравненията на линейната система (т.е. всеки ред на системата), като изобразим всички точки, чиито координати удовлетворяват уравненията в декартова координатна система. Както знаем, те отговарят на прави в равнината.

Пример 31. Съществуват точно три възможни взаимни положения на две прави в равнината. Да разгледаме следните примери:

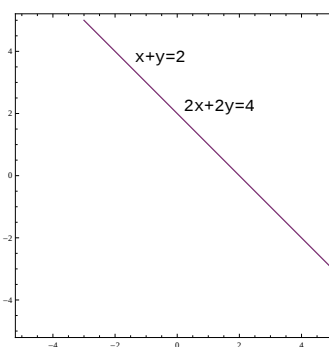
$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ x + y &= 4\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4\end{aligned}$$



В първия случай двете прави се пресичат в точка. Координатите ѝ съответстват на единственото решение на системата.

На втората фигура правите са успоредни и следователно системата няма решение.

В третия случай двете прави съвпадат, т.е. системата има безброй много решения (по-точно права от решения).

Преминавайки към 3D, row picture за всяко уравнение е равнина в тримерното пространство.

“Хубавият” случай е, когато системата има единствено решение. Това се получава, когато първите две равнини се пресичат в права, която пресича третата равнина в точка.

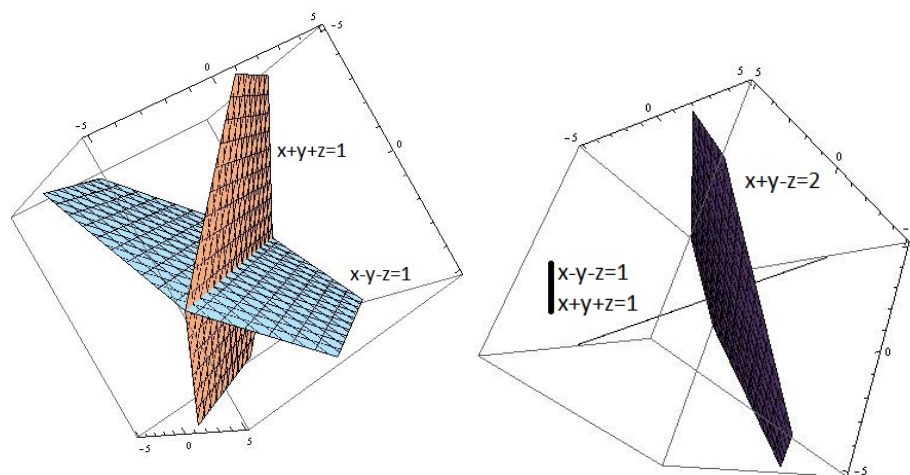
Пример 32. Разглеждаме системата

$$x + y + z = 1$$

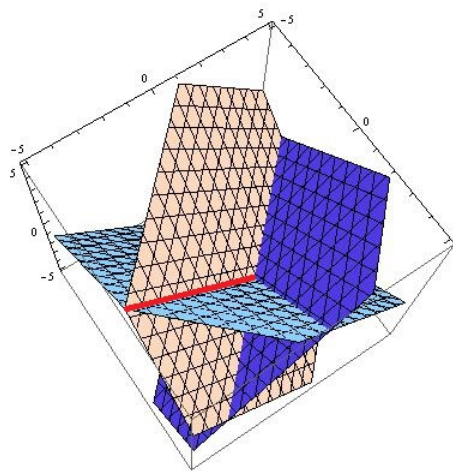
$$x - y - z = 1$$

$$x + y - z = 2$$

На лявата фигура по-долу са изобразени първите две равнини, които се пресичат в права. На дясната фигура е показана тази права, която пресича третата равнина в точка.



Пълният row picture, състоящ се от трите равнини е илюстриран по-долу. Пресечницата на първите две равнини е означена в червено.



Задача. Опишете всички възможности за това как три равнини са разположени в пространството.

Както виждаме, row picture е относително трудно да се визуализира в 3D, но отново дава ценна информация за геометрията на линейните системи. В повече измерения обаче тази илюстрация не може да помогне.

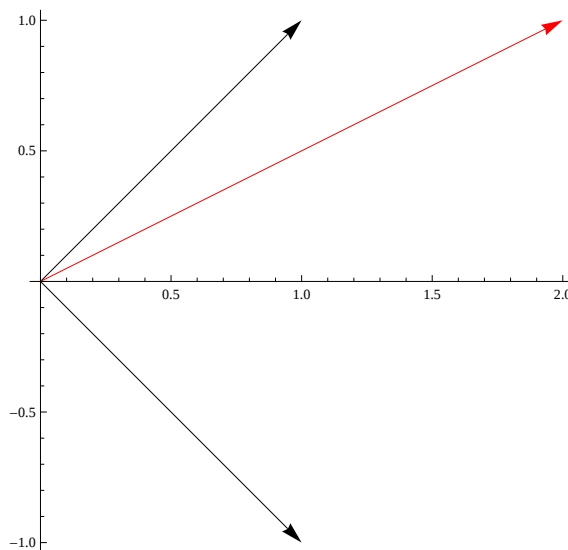
Оказва се, че в много случаи column picture създава по-добра интуиция. Нека първо разгледаме отново системите от Пример 31.

Пример 33. Работейки стълб по стълб, можем да запишем трите системи от Пример 31, както следва:

•

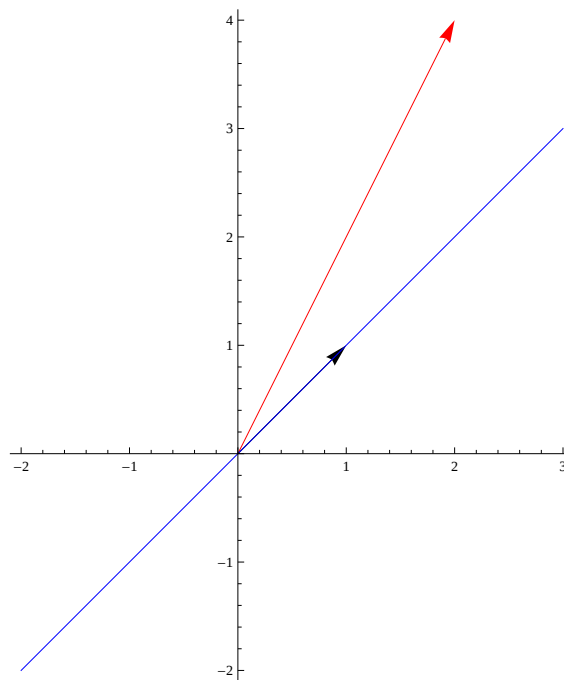
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Търсим числата x и y така, че линейната комбинация на вектор-стълбовете в лявата страна (означени в черно) да е равна на дясната страна (означена в червено).



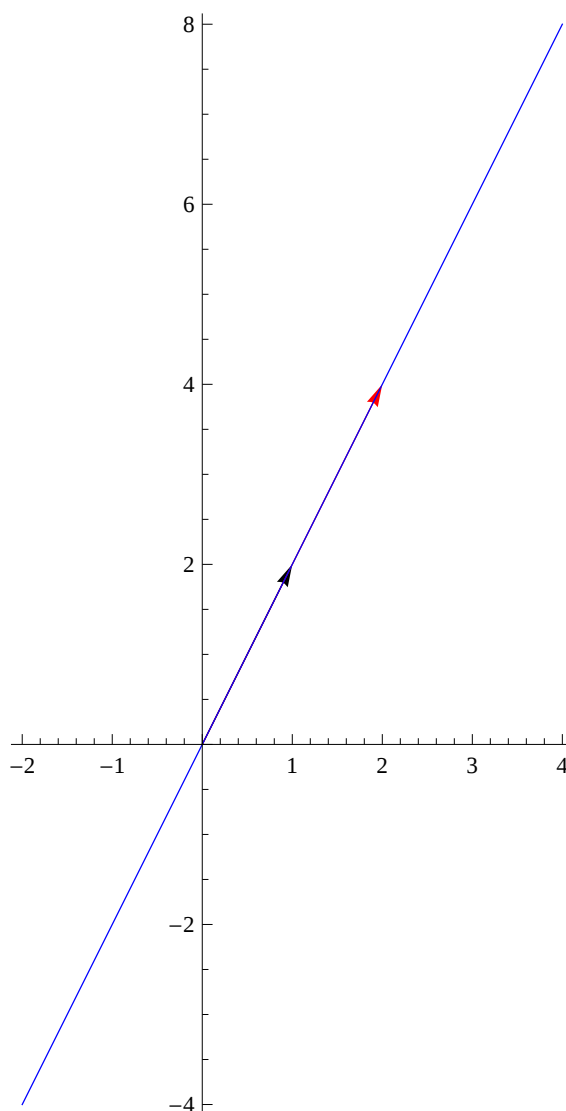
- Във втория пример двата вектора в лявата страна лежат на една права. Тогава всички техни линейни комбинации ще останат на същата права (означена в синьо). Следователно системата няма решение, тъй като нито една линейна комбинация не може да е равна на червения вектор.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



- В третия пример векторите в лявата страна отново са равни, но дясната лежи на правата, определена от тях. Следователно системата има решение. По-точно тя има безброй много решения, тъй като, независимо колко далеч по правата "сме се придвижили" с първия вектор, то вторият може "да ни върне" до желаната точка.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

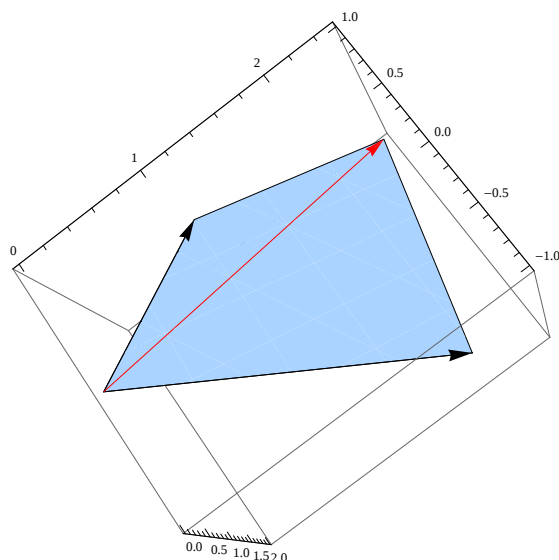
**N.B. 15**

Умножавайки дадена матрица отлясно с вектор-стълб, получаваме линейна комбинация на стълбовете на матрицата.

Пример 34. Да разгледаме още един пример, този път за система с три уравнения и две неизвестни, т.е. в лявата страна ще имаме само два тримерни вектора:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Тогава можем да достигнем само точките в една равнина в тримерното пространство (защрихована е в синьо по-долу). Дясната страна (в червено) обаче лежи в същата равнина и следователно системата има решение.



Задача. Направете row picture за същата система.

На базата на предишните примери, можем да формулираме следното очевидно твърдение.

Твърдение 13

Необходимо и достатъчно условие за това дадена линеинна алгебрична система да има решение, е дясната страна да бъде в пространството, определено от вектор-стълбовете на матрицата на системата (ще го наричаме **column space**).

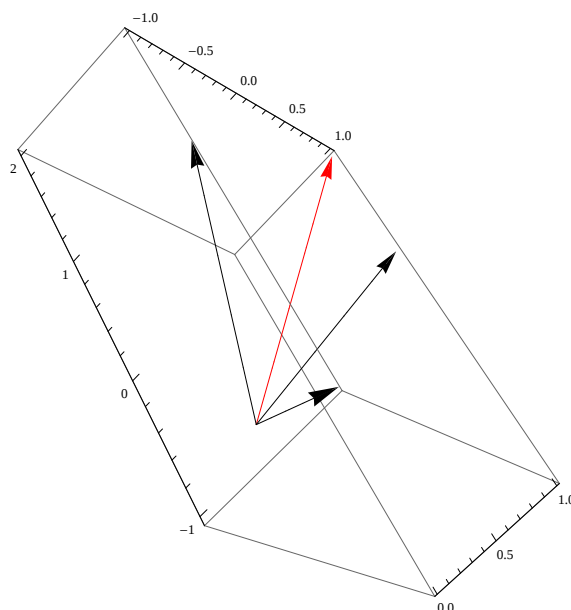
Предимството на column picture в сравнение с row picture е, че първото може непосредствено да се пренесе и в 3D, практически без промени. Идеята е толкова проста, че можем почти да “визуализираме” column picture и в 4 и повече измерения.

Пример 35. Да разгледаме системата

$$x + y + z = 1,$$

$$x - y - z = 1,$$

$$x + y - z = 2.$$



В този случай векторите в лявата страна сочат в три независими посоки и пораждат цялото $\mathbb{R}^3$. Следователно системата има единствено решение за всяка дясна страна.

N.B. 16

Дадена линейна алгебрична система може да бъде визуализирана с нейните row picture и column picture.

Работейки по редове, търсим пресечните точки на хиперравнините в n -мерното пространство, определени от всяко уравнение.

Работейки по стълбове, търсим линейната комбинация на вектор-стълбовете на матрицата на системата, равна на вектор-стълба на десните страни.

Имайки геометрична интуиция, сме готови да характеризираме всички възможности за решенията на дадена линейна алгебрична система.

Твърдение 14

За всяка линейна алгебрична система е в сила точно една от следните възможности:

- системата няма решения;
- системата има точно едно решение;
- системата има безброй много решения.

Доказателство. Вече показахме случаи, в които системата няма решения или има точно едно решение. Достатъчно е да докажем, че ако системата има две решения, то тя има безброй много.

Нека

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{Ay} = \mathbf{b}.$$

Тогава за всяко реално число λ векторът

$$\lambda x + (1 - \lambda)y$$

също е решение на системата. □

2.2 Четири основни подпространства на $\mathbb{R}^n$, свързани с дадена матрица

Вече видяхме, че въпросът за решаването на дадена линейна алгебрична система е свързан с едно подпространство на $\mathbb{R}^n$ – column space. Това ни дава основание да разгледаме по-подробно структурата на $\mathbb{R}^n$. Всъщност изучаването на структурата на $\mathbb{R}^n$ е важно и поради факта, че всяко друго крайномено пространство е еквивалентно на него (**що се отнася до операциите умножение със скалар и събиране**). Да припомним, че най-важният факт за линейните пространства е, че са множества, в които можем да пресмятаме линейни комбинации на два елемента и да оставаме в пространството.

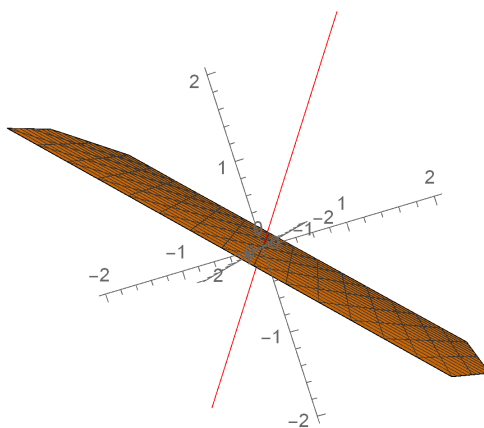
Дефиниция 17

Подмножество на дадено линейно пространство $\mathcal{A}$, което само по себе си е линейно пространство, се нарича **подпространство** на $\mathcal{A}$.

Пример 36. Пространството $\mathbb{R}^3$ е 3-мерно. То може да се визуализира чрез 3-мерното геометрично пространство, в което е въведена декартова координатна система.

Тривиалните му подпространства са цялото $\mathbb{R}^3$ и $\emptyset$. 1-мерните и 2-мерните подпространства геометрично съответстват на прави и равнини, минаващи през началото на координатната система.

Лесно може да се съобрази, че нулевият вектор трябва да се съдържа във всяко подпространство, тъй като, ако съберем два противоположни вектора, получаваме $\mathbf{0}$.



N.B. 17

За да бъде дадено множество подпространство, то задължително съдържа нулевия елемент на пространството.

Очевидно е, че обединението на две подпространства не е задължително подпространство. Да вземем за пример два вектора – един от правата и друг от равнината на горната фигура. В общия случай тяхната сума не е в нито едно от двете подпространства.

От друга страна, може лесно да се види, че сечението на две линейни подпространства е линейно подпространство.

Четирите най-важни подпространства, свързани с $\mathbb{R}^n$, от гледна точка на линейната алгебра, са пряко свързани с дадена матрица A . Това са column space на A (ще го бележим с $\mathcal{C}(A)$), row space на A (ще го бележим с $\mathcal{R}(A)$), nullspace на A (ще го бележим с $\mathcal{N}(A)$) и left nullspace на A (ще го бележим с $\mathcal{N}(A^T)$). Нека е дадена матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. За да можем да изследваме тези пространства, трябва да намерим базис за всяко от тях и да определим техните размерности.

- **Column space $\mathcal{C}(A)$.** Вече дефинирахме това подпространство. То съдържа всички линейни комбинации на стълбове на A и следователно е подпространство на $\mathbb{R}^m$. Знаем, че за да има дадена система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ решение, то $\mathbf{b}$ трябва да се съдържа в $\mathcal{C}(A)$.
- **Row space $\mathcal{R}(A)$.** Row space на A се дефинира аналогично – то съдържа всички линейни комбинации на редовете на A и е подпространство на $\mathbb{R}^n$.
- **Nullspace $\mathcal{N}(A)$.** Nullspace съдържа всички решения на хомогенната система $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Да разгледаме следния пример.

Пример 37. Дадена е матрицата $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Търсим решенията на $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. За всяка система от този вид е очевидно, че $\mathbf{0}$ е решение. Забелязвайки, че в този конкретен случай третият стълб на A е равен на сумата на първите два, можем да заключим, че друго решение е $(1, 1, -1)^T$. Всъщност всички вектори $(c, c, -c)^T = c(1, 1, -1)^T$ са решения на системата. С други думи, можем да предположим, че $\mathcal{N}(A)$ е едномерно подпространство на $\mathbb{R}^3$. Геометрично то може да бъде представено с права през началото на координатната система в 3D. Засега, разбира се, това е само обоснована хипотеза (както се оказва, вярна!), докато не видим как систематично да изследваме nullspace.

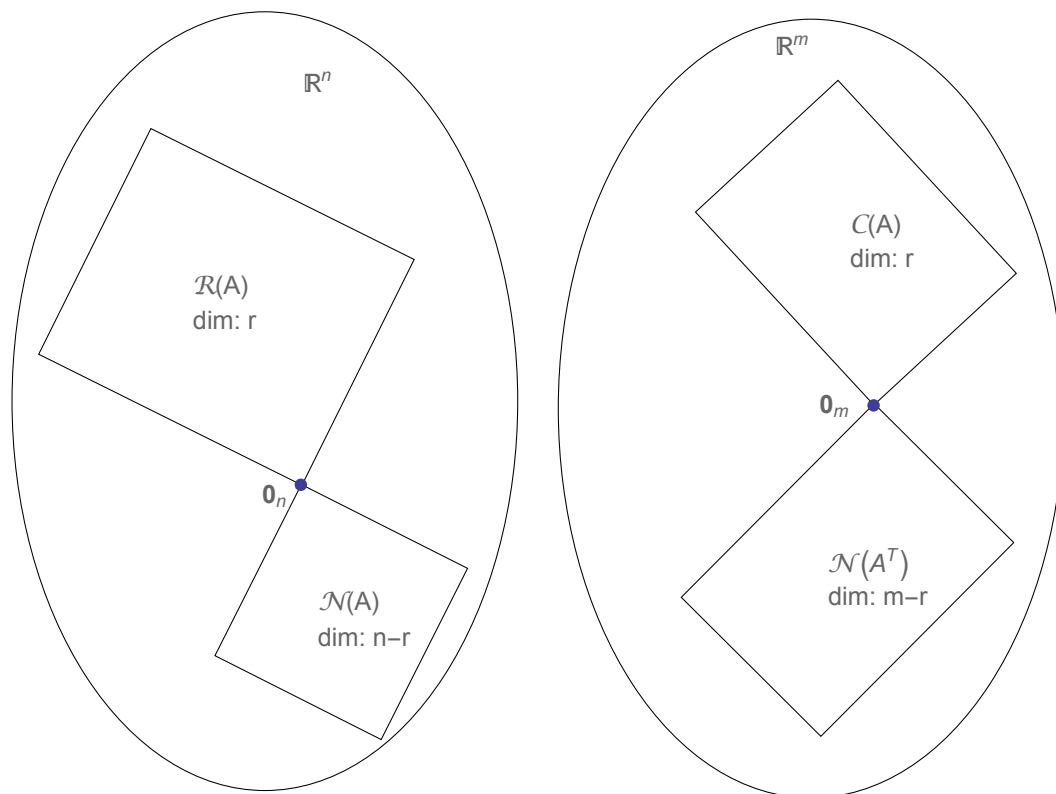
Първо, нека докажем, че $\mathcal{N}(A)$ е линейно пространство. Действително, ако $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ са такива, че $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ и $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, тогава $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$ и следователно $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(A)$, т.е. всички линейни комбинации

на два вектора от $\mathcal{N}(A)$ остават в $\mathcal{N}(A)$. Следователно $\mathcal{N}(A)$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^n$.

N.B. 18

Единствено решенията на $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ образуват линейно пространство, тъй като за нито една друга система $\mathbf{0}$ не е решение.

- **Left nullspace $\mathcal{N}(A^T)$.** Left nullspace на A се дефинира като nullspace на A^T . Следователно това е подпространство на $\mathbb{R}^m$.



Четири основни подпространства са (наред с останалите неща, които предстои да коментираме) представителни за двата основни начина да дефинираме едно линейно пространство – като зададем вектори, които го пораздат (например column и row spaces) или като зададем условия, които трябва да се изпълняват от векторите в пространството (например nullspace).

Сега трябва да отговорим на въпроса за размерностите и базисите на тези подпространства. Ефективен начин да изследваме основните подпространства е свързан със свеждането на матрицата до стъпаловиден вид (row echelon form, ref). Ще изясним идеите чрез пример.

Пример 38. Дадена е матрицата $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Искаме, използвайки елементарни операции по редове, да сведем матриците до “прост” вид, който да съдържа необходимата ни информация.

Първо, трансформираме матрицата до вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сега бихме искали да получим водещ елемент (главен елемент, pivot) във втория стълб, но дори с размяна на редовете това не може да се получи. Следователно не можем да направим нищо повече с втория стълб и продължаваме с третия:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: U.$$

Матрицата U е в т.нар. стъпаловиден вид (ref). С други думи, елементите под всеки първи ненулев елемент в реда, наречен водещ елемент (ако има такъв), са нули.

В примера има два *водещи* стълба – първият и третият – и два *свободни* стълба (т.е. без водещи елементи в тях) – вторият и четвъртият.

Дефиниция 18

Стълбовете, които съдържат водещи елементи, ще наричаме **водещи стълбове** а останалите – **свободни стълбове**. Броят на водещите елементи в ref на дадена матрица се нарича **ранг** на матрицата.

Вече сме готови да определим размерностите и да намерим базиси за четирите основни подпространства:

- Първо, лесно се съобразява, че row space (което е подпространство на $\mathbb{R}^4$) не се променя при трансформации по редове. Наистина, всички редове на U са линейни комбинации на редовете на A . Освен това, тъй като елементарните трансформации са обратими, то редовете на A също могат да се получат като линейни комбинации на редовете на U . Следователно $\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(U)$. Размерността на последното е равна на ранга $r = 2$. Базис може да бъде получен от векторите $(1, 2, 2, 2)$ и $(0, 0, 2, 4)$ или, еквивалентно, от съответните вектори в A – $(1, 2, 2, 2)$ и $(2, 4, 6, 8)$.
- За column space (подпространство на $\mathbb{R}^3$) горните разсъждения не са валидни. Операциите по редове променят column space. Например всички вектори в $\mathcal{C}(U)$ имат нули като трета компонента, което не е така при векторите в $\mathcal{C}(A)$. Оказва се обаче, че водещите стълбове на A , т.е. първият и третият – $(1, 2, 3)^T$ и $(2, 6, 8)^T$ – образуват базис на $\mathcal{C}(A)$ и неговата размерност също е равна на $r = 2$.

Действително, тъй като операциите по редове не променят решенията на дадена система, то $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ е изпълнено, точно когато $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ е в сила. Следователно едни и същи линейни комбинации (т.е. с равни коефициенти) на стълбове от A и на стълбове от U дават резултат $\mathbf{0}$. Тогава стълбовете на A са линейно независими тогава и само тогава, когато съответните стълбове в U са линейно независими.

- Размерността на nullspace е равна на броя на свободните стълбове, $n - r = 2$. Наистина, ние трябва да решим системата $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, за да определим nullspace на A . Ако поставим произволни стойности на неизвестните, отговарящи на свободните стълбове (ще ги наричаме свободни неизвестни), то водещите неизвестни ще могат да се определят еднозначно.

Да поставим произволни стойности всъщност е същото, като да изберем единични вектори и после да вземем всички техни линеини комбинации. Нека $x_2 = 1, x_4 = 0$ и $x_2 = 0, x_4 = 1$ (всъщност всеки други два линеинно независими вектора биха свършили работа). Така получаваме два вектора, образувачи базис за nullspace – $(-2, 1, 0, 0)^T$ и $(2, 0, -1, 2)^T$. И така, nullspace съдържа всички линеини комбинации на $\alpha(-2, 1, 0, 0)^T + \beta(2, 0, -1, 2)^T$, където α и β са произволни реални числа.

- Аналогично размерността на left nullspace е $m - r = 1$. Базис може да бъде намерен, като се работи с A^T .

Ще обобщим резултатите за четирите основни подпространства в следващата теорема.

Твърдение 15: Основна теорема на линеината алгебра

Нека A е матрица $m \times n$ с ранг r .

За четирите основни подпространства е в сила следното:

- Row space, $\mathcal{R}(A)$, и nullspace, $\mathcal{N}(A)$, са подпространства $\mathbb{R}^n$.
 - $\dim \mathcal{R}(A) = r$; базис може да бъде получен от водещите редове в A или от водещите редове в $\text{ref } A$;
 - $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$; базис може да бъде получен чрез решаване на системата $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ по следния начин – полагаме единични вектори на местата на свободните неизвестни и намираме съответните водещи неизвестни.
- Column space, $\mathcal{C}(A)$, и left nullspace, $\mathcal{N}(A^T)$, са подпространства на $\mathbb{R}^m$.
 - $\dim \mathcal{C}(A) = r$; базис може да бъде получен от водещите стълбове на A (водещите стълбове на $\text{ref } A$ в общия случай не образуват базис на $\mathcal{C}(A)$);
 - $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$.

Освен това $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$, както и $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{N}(A^T)$, са двойки ортогонални допълнения.

Преди да преминем към доказателството, трябва да изясним какво означава ортогонални подпространства и ортогонални допълнения/

Дефиниция 19

Казваме, че две подпространства са **ортогонални**, ако всеки елемент на едното е ортогонален на всеки вектор от другото.

Ако всички вектори, ортогонални на първото подпространство, се съдържат във второто и обратното, казваме, че двете подпространства са **ортогонални допълнения**. Ще означаваме ортогоналното допълнение на $\mathcal{U}$ с $\mathcal{U}^\perp$.

Лесно се вижда, че ако две подпространства са ортогонални помежду си, те се пресичат само в нулевия вектор. Действително, ако вектор $\mathbf{x}$ се съдържа и в двете подпространства, той трябва да бъде ортогонален на себе си, т.е. е нулевият вектор.

Два примера са ортогонални подпространства на $\mathbb{R}^3$ са:

- две перпендикулярни прави, минаващи през началото на координатната система. Те не са ортогонални допълнения, тъй като съществува трета права, ортогонална на двете;
- равнина, перпендикулярна на права, минаващи през началото на координатната система. Двете подпространства са ортогонални допълнения, тъй като всички вектори, ортогонални на равнината, се съдържат в правата и обратното.

Вече сме готови да довършим доказателството на Основната теорема на линейната алгебра.

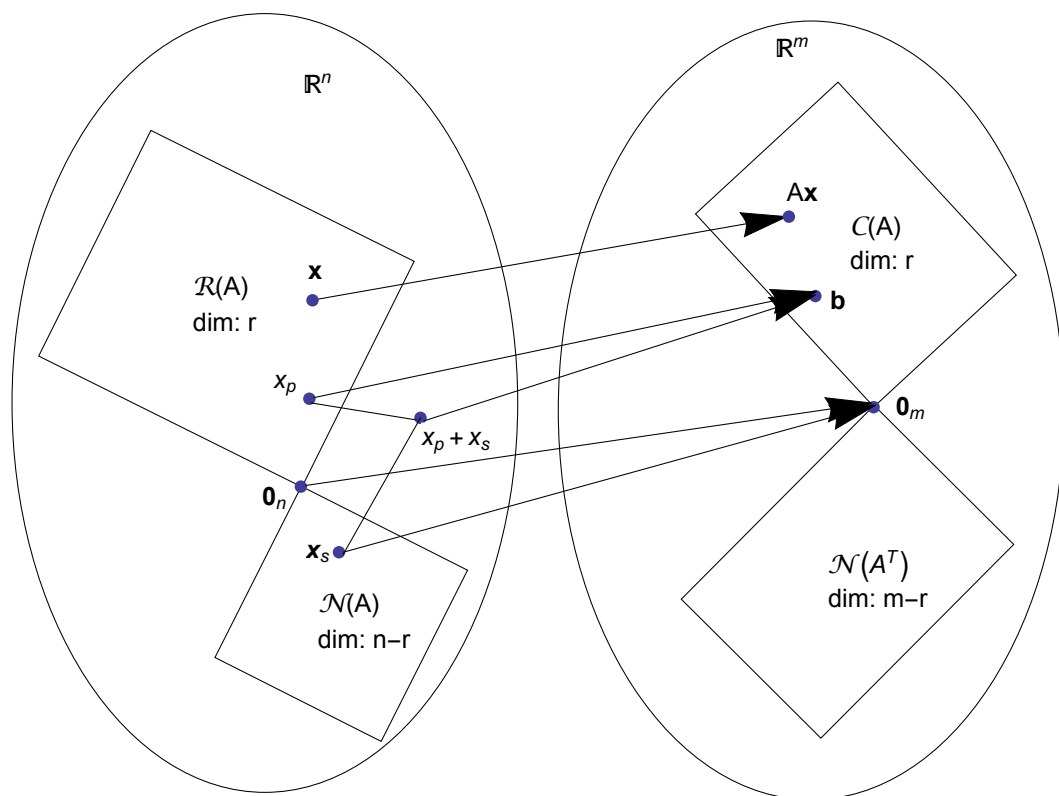
Доказателство на Основната теорема на линейната алгебра. За базисите и размерностите на основните подпространства, разсъжденията са непосредствено обобщение на примера, който направихме.

Остава да докажем, че двете двойки подпространства са ортогонални допълнения.

Ако $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$, тогава $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и следователно за всеки ред $\mathbf{a}_i$ на A е в сила следното: $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$. Тъй като всеки вектор в $\text{row } A$ е линейна комбинация на $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, m$, е ясно, че всеки вектор в $\mathcal{R}(A)$ е ортогонален на $\mathbf{x}$.

Нещо повече, тъй като $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$, то не може да съществува вектор, ортогонален на кое да е от двете подпространства, който да не се съдържа в едното от тях. Иначе щяхме да намерим $n + 1$ линейно независими вектора в $\mathbb{R}^n$. $\square$

Казаното дотук може да бъде обобщено в следната фигура:



Ако вземем предвид, че матрицата A може да се разглежда като трансформация на векторите от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, стрелките показват къде отива всеки вектор. Да обърнем още веднъж внимание, че всички вектори от $\mathbb{R}^n$ отиват в $\mathcal{C}(A)$. Затова това подпространство често се нарича **образ** на A .

Също така, е илюстриран основният факт, следващ от това, че двойките основни подпространства са ортогонални допълнения – всеки вектор може да бъде представен като компонента в едното подпространство плюс компонента в другото. Казано иначе, ако към базиса на едното подпространство добавим базиса на другото, ще получим базис на цялото пространство.

2.3 Линеините алгебрични системи и четирите основни подпространства

След като се запознахме с четирите основни подпространства на $\mathbb{R}^n$, сме готови да характеризираме всички решения на дадена произволна линеиня алгебрична система.

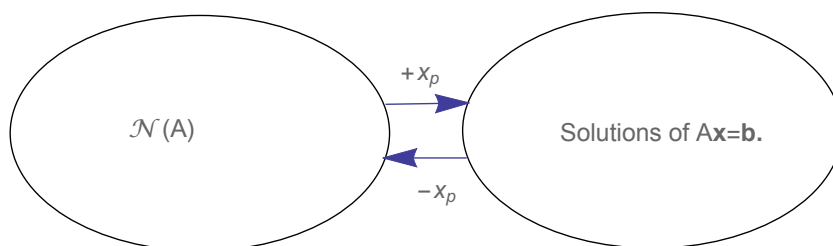
Твърдение 16

Нека $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ има решение за дадено $\mathbf{b}$ и нека $\mathbf{x}_p$ е решение. Тогава всички решения на $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ са множеството от векторите $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s$, за които $\mathbf{x}_s$ е произволен елемент на $\mathcal{N}(A)$.

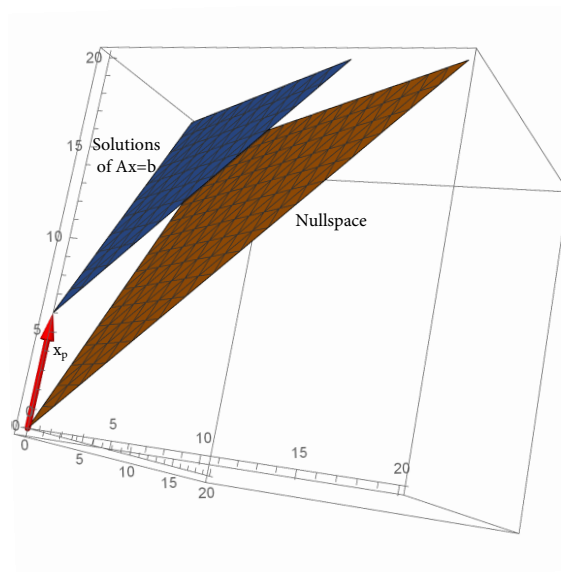
Доказателство. ($\Rightarrow$) Първо, очевидно е, че ако $\mathbf{x}_p$ е решение и $\mathbf{x}_s \in \mathcal{N}(A)$, тогава $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s$ също е решение, тъй като $A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_s = \mathbf{b} + \mathbf{0}$.

($\Leftarrow$) Остава да докажем, че ако $\mathbf{x}_p$ е решение, тогава всички решения имат посочения вид. Действително, нека $\mathbf{x}$ е кое да е друго решение. Тогава $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{0}$ и следователно $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p \in \mathcal{N}(A)$, което доказва твърдението. $\square$

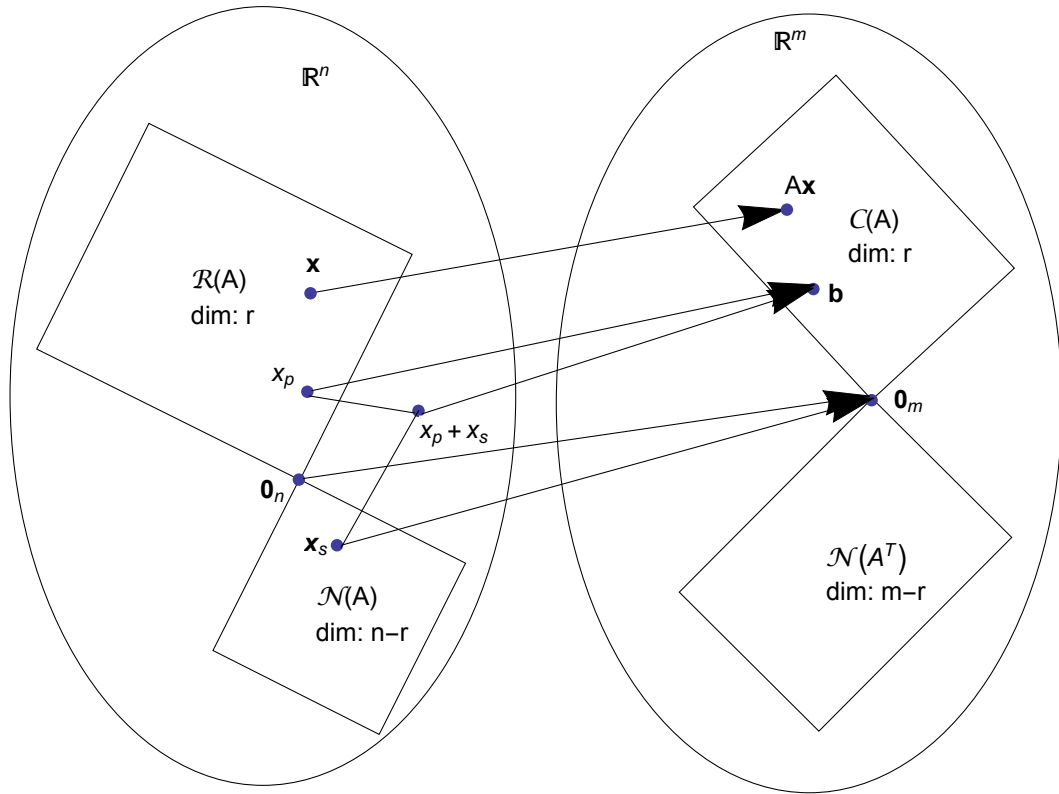
Можем да илюстрираме последния резултат със следната фигура:



В 3D графично нещата биха могли да изглеждат по следния начин:



За да разберем по-задълбочено твърдението, нека отново насочим вниманието си към четирите основни подпространства. Да разгледаме следната фигура:



Да направим следните наблюдения:

- Първо, да забележим, че за образа на всеки вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$ (и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, изобщо) е $A\mathbf{x} \in \mathcal{C}(A)$, тъй като $A\mathbf{x}$ дава линейна комбинация на стълбовете на A . Следователно можем да решим системата $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ само ако $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$.
- Обратното също е вярно – всеки вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ може да бъде получен от вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$. Нещо повече, $\mathbf{x}$ е единствен.

Доказателство.

□

- Четвъртото подпространство $\mathcal{N}(A^T)$ не може да бъде достигнато от никой вектор от $\mathbb{R}^n$. Това подпространство обаче е важно при приближения по метода на най-малките квадрати, както ще видим по-късно в курса.
- Всички вектори от $\mathcal{N}(A)$ се трансформират в $\mathbf{0}_m$.
- Тъй като $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$ са ортогонални допълнения, то всеки вектор от $\mathbb{R}^n$ може да бъде представен като сума на вектор от $\mathcal{R}(A)$ и вектор от $\mathcal{N}(A)$. В частност всички решения на $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ако има такива) могат да бъдат представени като (единственото) частно решение от $\mathcal{R}(A)$ (или кое да е друго частно решение) и произволен вектор от $\mathcal{N}(A)$.

Задача. Да предположим, че A е квадратна обратима матрица, $m = n = r$. Какво са $\mathbf{x}_p$ и $\mathbf{x}_s$?

Нека сега разгледаме случая, в който матрицата A има пълен ранг по стълбове.

Пример 39. Вземаме за пример следната матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

и дясна страна $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$. Трансформираме разширената матрица до rref и получаваме

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & 2b_1 + b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right].$$

Правейки още една стъпка, довеждаме системата до reduced row echelon form (rref), като правим всички водещи елементи 1, а останалите елементи във водещите стълбове – 0:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right].$$

Очевидно системата е несъвместима при $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$ и съвместима – иначе. Във втория случай, тъй като няма свободни стълбове и следователно няма свободни неизвестни, съществува единствено решение

$$\mathbf{x} = (2b_1 - b_2, b_2 - b_1)^T.$$

Можем да обобщим примера по следния начин.

N.B. 19

Всяка матрица A , която има пълен ранг по стълбове, има следните свойства:

- Всички стълбове на A са водещи стълбове;
- Няма свободни неизвестни;
- Подпространството $\mathcal{N}(A)$ съдържа само нулевия вектор $\mathbf{0}$;
- Ако $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ има решение (може и да няма!), това решение е единствено;
- A има ЛНЗ стълбове;
- $A^T A$ е обратима;
- $\text{rref } A$ е

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Rref на разширената матрица $[A \ \mathbf{b}]$ е

$$\left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{d} \end{array} \right].$$

Ако $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, тогава $\mathbf{x} = \mathbf{c}$ е единственото решение. Ако $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, тогава системата е несъвместима, т.е. няма решение;

- Row space е цялото $\mathbb{R}^n$.

Другият краен случай е, когато A има пълен ранг по редове. Тогава $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ има едно или безброй много решения. Да разгледаме следния пример:

Пример 40. Дадена е системата

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x + 2y - z &= 4. \end{aligned}$$

Трансформираме разширената матрица на системата до rref и получаваме последователно

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right] &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{ref}) \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \end{array} \right] \quad (\text{rref}) \end{aligned}$$

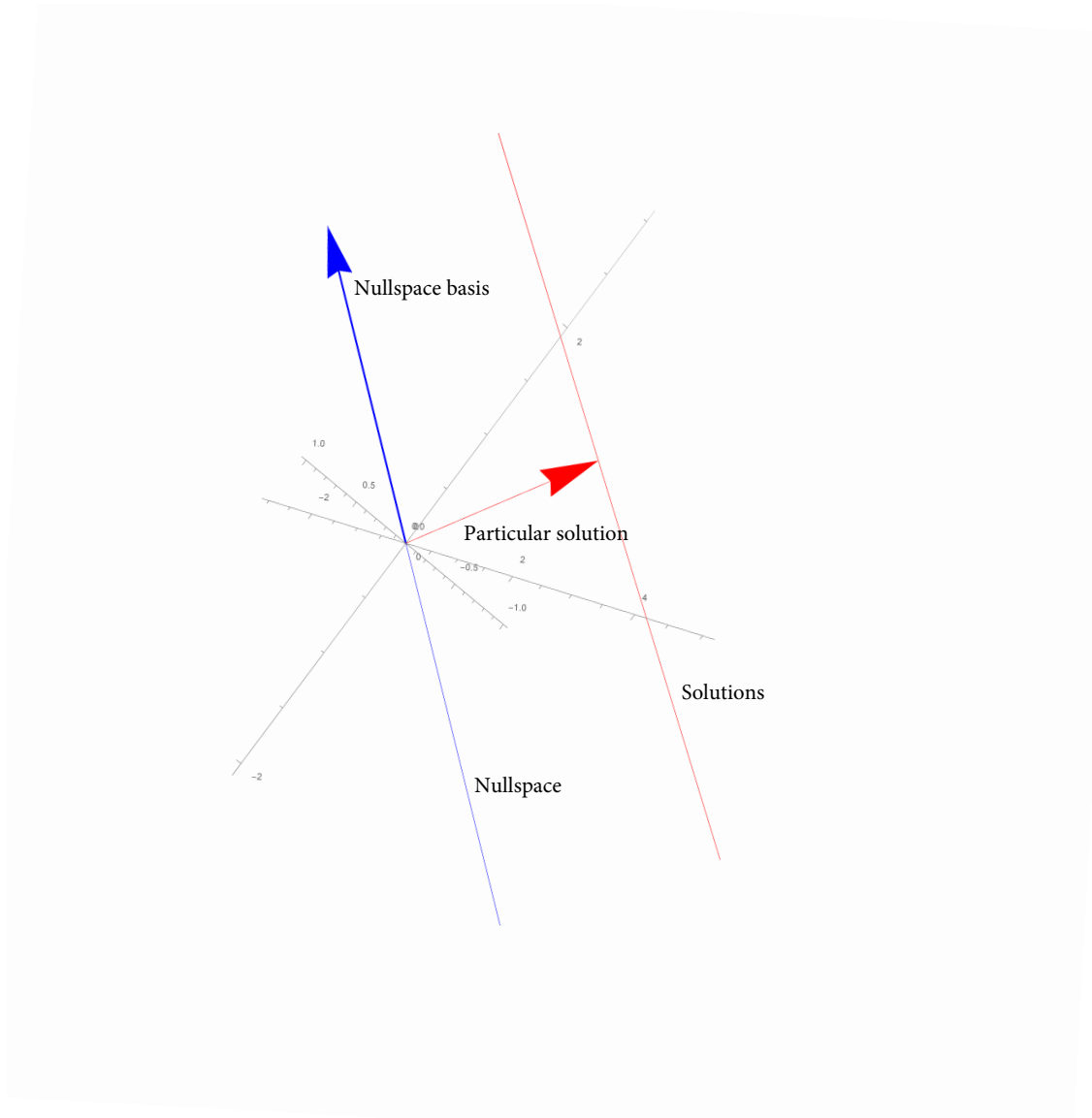
Системата има пълен ранг по редове и следователно размерността на $\mathcal{N}(A)$ е 1.

Лесно можем да получим едно частно решение, като положим всички свободни неизвестни да бъдат равни на 0. Получаваме $\mathbf{x}_p = (2, 1, 0)^T$. Замествайки

свободното неизвестно s 1, получаваме базис на 1-мерното подпространство $\mathcal{N}(A)$, който е $\mathbf{x}_s = (-3, 2, 1)^T$. Следователно всички решения имат вида

$$\mathbf{x} = (2, 1, 0)^T + \alpha(-3, 2, 1)^T, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

В този конкретен случай решението е права в тримерното пространство.



Обобщавайки горния резултат, можем лесно да видим, че rref на разширената матрица при пълен ранг по редове (след евентуално пренареждане на стълбове/неизвестни) има вида

$$[I \quad F \mid \mathbf{d}]$$

и следователно съществува поне едно решение

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Освен това, тъй като има свободни неизвестни (освен ако A не е квадратна матрица), nullspace е нетривиален и следователно съществуват безброй много решения.

N.B. 20

Всяка матрица с пълен ранг по редове има следните свойства:

- Всички редове съдържат водещи елементи и rref няма нулеви редове;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ има решение за всяка дясна страна $\mathbf{b}$. Ако $r = m < n$, тогава решенията са безброй много;
- Column space е цялото пространство $\mathbb{R}^m$;
- Размерността на nullspace е $n - r = n - m$;
- Редовете са ЛНЗ.

Базирайки се на досегашните наблюдения, можем да систематизираме възможностите за система линейни уравнения в зависимост от ранга r в следната таблица:

ранг	форма	брой решения на $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	rref
$r = m$ и $r = n$	квадратна и обратима	1 решение	$[I]$
$r = m$ и $r < n$	къса и широка	∞ решения	$[I \ F]$
$r < m$ и $r = n$	дълга и тясна	0 или 1 решение	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$
$r < m$ и $r < n$	неизвестна форма	0 или ∞ решения	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.4 Линейни оператори

След като разгледахме въпроса за решаването на линейни алгебрични системи, се насочваме към другото важно приложение на матричното смятане – линейните трансформации в крайномерни пространства.

Дефиниция 20

Казваме, че операторът $T : U \rightarrow V$ е линеен, ако

$$T(\lambda u + \beta v) = \lambda Tu + \mu Tv, \forall u, v \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2.4.1 Матрица на линеен оператор

Нека разгледаме линейния оператор $T : U \rightarrow V$ и нека пространствата U и V са определени съответно с $U = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ и $V = \text{span}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$. Тогава, ако вземем вектор $\mathbf{x} \in U$, той може да се представи като

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

Неговият образ под действието на трансформацията, използвайки линейността, е

$$T\mathbf{x} = \alpha_1 T\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{x}_n = (T\mathbf{x}_1, \dots, T\mathbf{x}_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

С други думи, за да изразим образа на който да е вектор $\mathbf{x}$, е достатъчно да знаем образите на $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Ако те са съответно

$$\begin{aligned} T\mathbf{x}_1 &= a_{11}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{1m}\mathbf{y}_m, \\ &\dots\dots\dots \\ T\mathbf{x}_n &= a_{n1}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{y}_m, \end{aligned}$$

получаваме

$$T\mathbf{x} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

е матрица на трансформацията T . В нейните стълбове стоят координатите на образите на базиса $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ по отношение на $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$.

N.B. 21

Ако векторът $\mathbf{x}$ има координати $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, то образът му $\mathbf{y}$ има координати $A\alpha$ по отношение на базиса $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$.

Важно е да отбележим, че матрицата на трансформацията A зависи от избора на бази на U и V .

Задача. Да се намери матрицата на трансформацията $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ при използване на стандартния базис. Каква е матрицата, ако първообразите се разглеждат по отношение на стандартния базис, а образите – по отношение на базиса $\mathbf{l} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{m} = 2\mathbf{j}$?

Задача. Каква е матрицата на трансформацията $Proj_1 : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ при даден вектор $\mathbf{l}$, ако и за първообразите, и за образите се използва базисът $\mathbf{l}, \mathbf{m}$, където $\mathbf{m}$ е единичен вектор, ортогонален на $\mathbf{l}$?

Задача. Покажете, че трансформацията $Rot_\varphi : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$ с въведен стандартният базис и за първообразите, и за образите, е

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Пример 41. Нека разгледаме диференциалния оператор $d/dx : P_2 \rightarrow P_2$ и нека използваме стандартния базис на $P_2 - 1, x, x^2$. Имаме $d/dx(1) = 0$, $d/dx(x) = 1$, $d/dx(x^2) = 2x$, т.е. за $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ е в сила

$$d/dx[P(x)] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

и матрицата на трансформацията при така въведените базиси е

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да направим някои наблюдения, които илюстрират факта, че матрицата A на практика копира свойствата на оператора:

- Образът на d/dx е $\text{span}\{1, x\}$, а $\mathcal{C}(A) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T\}$;
- $\mathcal{N}(d/dx)$ е пространството от всички константи, а неговото ортогонално допълнение следователно е $\text{span}\{x, x^2\}$. За матрицата съответно имаме $\mathcal{N}(A) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T\}$, а $\mathcal{R}(A) = \text{span}\{(0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$.
- Матрицата A е необратима. Трансформацията – също, тъй като първообразът на даден образ е определен с точност до адитивна константа.

2.4.2 Матрица на линеен оператор и смяна на базисите

Често се налага по някаква причина да се смени базиса на пространството U или този на пространството V . Тук ще коментираме въпроса какво се случва с матрицата на трансформацията.

Пример 42 (Смяна на базиса на пространството V). Да вземем за пример трансформацията идентитет $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ако сме въвели стандартния базис, трансформацията се задава с единичната матрица:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Нека сега направим смяна на базиса в образа, като въведем $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ така, че

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{i} - \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Във векторно-матрична форма можем да запишем

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

или още, обръщайки матрицата в дясната страна,

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} =: [\mathbf{l}, \mathbf{m}]M.$$

Следователно за трансформацията получаваме

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Матрицата на трансформацията при промяна на базиса на образа се получава, като умножим отляво с матрицата на прехода M . Така, ако матрицата преди смяната на базиса е означена с A , новата матрица е MA .

Пример 43 (Смяна на базиса в пространството U). Този път ще изложим идеята за трансформацията $Proj_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, където $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Намирането на матрицата на трансформацията по отношение на стандартния базис $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ изисква повече технически пресмятания. От друга страна, ако изберем ортонормиран базис $\mathbf{l}, \mathbf{m}$, нещата изглеждат съвсем просто:

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Обикновено обаче даден вектор $\mathbf{x}$ е дефиниран по отношение на стандартния базис. Следователно матрицата на трансформацията може да е по-добре да взема координати по отношение на $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ в пространството от първообразите. Имаме

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =: [\mathbf{i}, \mathbf{j}] M^{-1}$$

и следователно можем да запишем

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})^T} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Еквивалентно,

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix}.$$

Следователно смяна на базиса в пространството от първообразите води до умножение отлясно с обратната матрица на преход. Новата матрица е AM^{-1} .

N.B. 22

Нека матрицата A съответства на линейна трансформация $T : V \rightarrow V$, като и в пространството от първообразите, и в образа е въведен един и същ базис. Ако сменим този базис и матрицата на прехода е M , тогава матрицата на трансформацията при новия базис е $\bar{A} = MAM^{-1}$. Ще казваме, че двете матрици A и $\bar{A}$ са подобни, тъй като представят една и съща трансформация при различни базиси.

Задача. Напишете матрицата на трансформация за диференциалния оператор $d/dx : P_{2,\{1,x,x^2\}} \rightarrow P_{2,\{1,x,x^2\}}$. Като я използвате, намерете матриците на трансформацията, ако се смени базиса на:

- пространството на първообразите;
- образа;
- и пространството на първообразите, и образа

с интерполационния базис, съответстващ на възлите $0, 1/2, 1$.

2.5 Собствен базис. Диагонализация на матрица.

Когато решаваме система линеини уравнения, се опитваме матрицата да бъде възможно най-проста, като в същото време не променяме решенията на системата. Видяхме ползите от привеждането на матрицата в `ref` или `rref`.

Когато матрицата описва линеиня трансформация (при фиксирани базиси), отново бихме искали тя да е възможно най-проста, така че веднага “да разкрива” важните неща, свързани с трансформацията, и като цяло да бъде лесна за работа. Най-простият начин, по който матрица може да действа върху вектор от координати е ако матрицата е диагонална.

Разбира се, матрицата на даден оператор зависи от избора на базисите. Да разгледаме линеиния оператор $\mathcal{L} : V \rightarrow V$, където V е n -мерно линеино пространство. Нека $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ образуват базис на V . Тогава, ако матрицата Λ на $\mathcal{L}$ е диагонална в този базис, произволен вектор

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

трябва да се трансформира от $\mathcal{L}$ в

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Но последното означава, че за базисните вектори следното трябва да бъде изпълнено:

$$\mathcal{L}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \dots, \mathcal{L}\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n.$$

Този “хубав” базис, който изпълнява горните условия, се нарича **собствен базис** (eigenbasis) на $\mathcal{L}$.

Дефиниция 21

Ненулевият вектор $\mathbf{x}$ се нарича **собствен вектор** (eigenvector) за оператора $\mathcal{L}$, ако съществува $\lambda \in \mathbb{C}$, така че

$$\mathcal{L}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Числото λ се нарича **собствена стойност** или **собствено число** (eigenvalue).

N.B. 23

Геометрично, собствените вектори на даден оператор са тези вектори, които запазват направлението си след трансформацията.

Пример 44. Нека $Proj_{\mathbf{x}}$ означава проекцията върху даден вектор $\mathbf{x}$. Тогава собствените вектори са $\mathbf{x}$ със съответстваща собствена стойност 1, и $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ със съответна собствена стойност 0 (нарисувайте картинка, с която да илюстрирате). Да забележим, че всеки вектор, колинеарен на $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ също е собствен вектор.

Очевидно е следното твърдение.

Твърдение 17

Собствените вектори, съответстващи на дадена собствена стойност, допълнени с нулевия вектор, образуват линейно пространство. Всяко такова подпространство (съответстващо на всяка собствена стойност) се нарича собствено подпространство.

Задача. Докажете твърдението.

Остава да видим как можем да намерим собствения базис. Оказва се, че е по-удобно първо да намерим собствените стойности.

Твърдение 18

Собствените стойности на матрицата A са решенията на уравнението

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Доказателство. По дефиниция λ е собствена стойност, ако съществува ненулев вектор $\mathbf{x}$ такъв, че

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

или, еквивалентно,

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е. $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$. Но това означава, че матрицата $A - \lambda I$ няма пълен ранг, т.е. нейната детерминанта е 0. $\square$

Пример 45. Да намерим собствените стойности и собствените вектори на матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Първо, намираме собствените стойности, решавайки

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Те са 0 и 5.

Тогава собствените вектори на A са в nullspace на следните матрици:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Два ЛНЗ собствени вектора са следователно $\mathbf{x}_1 = (-2, 1)^T$ и $\mathbf{x}_2 = (1/2, 1)^T$.

N.B. 24

Да отбележим, че $\lambda_1 = 0$ е собствена стойност на матрицата A т.с.т.к. A е сингулярна.

Пример 46. Матрицата

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

отговаря на ротация на 90° по отношении на стандартния базис. Собствените стойности са чисто имагинерни: $\pm i$. Това може да се очаква, тъй като нито един реален вектор не може да запази посоката си след ротация.

Твърдение 19

За собствените стойности на матрицата A е в сила

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= \text{trace}(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \\ \lambda_1 \dots \lambda_n &= \det(A). \end{aligned}$$

Освен това, ако матрицата A е триъгълна, нейните собствени стойности лежат по главния диагонал.

Диагонализация на матрица

Една много полезна декомпозиция на дадена матрица е пряко свързана с казаното дотук.

Твърдение 20

Нека матрицата A има (не задължително различни) собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и съответстващи ЛНЗ собствени вектори $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Тогава A може да се разложи във вида

$$A = T\Lambda T^{-1},$$

където T е матрица, чиито стълбове са собствените вектори на A , а Λ е диагонална матрица със собствените стойности на A по главния диагонал.

Доказателство – първи начин. Твърдението се доказва непосредствено, ако мислим за матрицата A като за изображение $\mathcal{L}$ от дадено n -мерно пространство V в себе си при фиксиран базис. Тогава собствените вектори на A съдържат координатите на собствените вектори на $\mathcal{L}$ в дадения базис. От казаното в предходната секция за смяна на базиса твърдението следва непосредствено – матрицата Λ е матрица на същата трансформация, като сменим базиса и на пространството от първообразите, и на образа със собствения базис. $\square$

Доказателство – втори начин. Можем да докажем твърдението и директно:

$$\begin{aligned}
 T^{-1}AT &= T^{-1}A \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\
 &= T^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\
 &= T^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
 &= \Lambda.
 \end{aligned}$$

□

Не всяка матрица е диагонализируема, тъй като не всяка матрица има n ЛНЗ собствени вектора. Достатъчно (но не необходимо) условие за диагонализируемост е всички собствени стойности да са различни.

Твърдение 21

На различни собствени стойности съответсват ЛНЗ собствени вектори.

Доказателство. Нека $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ са два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности $\lambda_1 \neq \lambda_2$ на матрицата A и нека

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Умножавайки двете страни с A и с λ_2 , получаваме съответно

$$\begin{aligned}
 c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0}, \\
 c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

и следователно

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \implies c_2 = 0.$$

Аналогично се проверява, че $c_1 = 0$, т.е. векторите $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ са ЛНЗ. □

Един особено важен клас диагонализируеми матрици са симетричните матрици. Може да се докаже, че следното е в сила.

Твърдение 22

Ако A е $n \times n$ симетрична матрица, тогава съществува ортонормиран собствен базис и съответните собствени стойности са реални числа (казано с други думи всеки две собствени подпространства са ортогонални помежду си). Еквивалентно, диагонализацията на A се дава от

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

където Q е ортонормирана матрица.

Какво ни дава диагонализацията

Тук ще се спрем на няколко важни въпроса, свързани с приложенията на диагонализацията.

- Пресмятане на степени на A . Ако знаем диагонализацията $A = T\Lambda T^{-1}$, тогава

$$A^n = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) \dots (T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda^n T^{-1}.$$

- Пресмятане на обратната матрица. Може лесно да се провери, че

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1}.$$

- Ако матрицата означава дадена трансформация, тя дава веднага съществената информация за изображението в диагоналната матрица – дали е обратимо, дали е свиващо, можем лесно да прилагаме изображението многократно и т.н.
- Ако диагоналната матрица съдържа само положителни елементи, матрицата/трансформацията е положително определена;
- Позволява ни намиране на апроксимация от по-нисък ред на матрицата (ще коментираме по-подробно този въпрос, когато говорим за по-общата декомпозиция по сингулярни стойности).
- Дава информация за обусловеността на матрицата (отново ще коментираме по-подробно в темата “Декомпозиция по сингулярни стойности”).

2.6 Метод на най-малките квадрати – линейни задачи

Както видяхме, съществуват три случая за решенията на дадена линейна алгебрична система:

- единствено решение;
- безброй много решения (в този случай, за да изберем “правилното” решение в контекста на конкретната задача, може да е въведен допълнителен критерий, например решението с най-малка норма/което съответства на минимална енергия и т.н.);
- няма решения.

Сега ще се концентрираме върху последния случай, защото той е много важен на практика.

Да разгледаме следната задача.

Дадени са точките $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$. Търсим $\varphi = \sum_{j=1}^n q_j \varphi_j \in V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ така, че φ да минава възможно най-близо до дадените точки.

В общия случай φ може да е функция на много променливи.

При $n = s$ задачата е всъщност интерполационна задача, която (при достатъчно добре избран базис на крайномерното пространство V) има единствено решение за произволни различни възли и съответни стойности. На тази задача очевидно съответства линейна алгебрична система за коефициентите $(q_1, \dots, q_n)^T$, която има квадратна матрица.

Интересният за нас случай е $n < s$. Тогава е ясно, че не можем да се надяваме интерполационната задача да има решение за произволен избор на точки. В този случай търсим оптимално решение. Ще разбирате последното в смисъла на метода на най-малките квадрати и ще формулираме съответната задача по три еквивалентни начина.

Формулировка на (линейната) задача за най-малки квадрати (НМК)

1. Добре познатата формулировка от курсовете по числени методи е следната. Търсим коефициентите в обобщения полином $\varphi(x)$ така, че

$$\varepsilon(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^s (\varphi(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n}.$$

2. Търсим вектора от коефициентите $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ така, че

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{q})\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n},$$

където $\mathbf{r}(\mathbf{q}) = (\varphi(x_1) - y_1, \dots, \varphi(x_s) - y_s)^T$ е векторът на грешката.

Забележка. Тази формулировка е може би най-обща, тъй като можем да минимизираме и по отношение на коя да е друга норма. Работата с втората норма обаче има някои съществени предимства. Първо, векторът на грешката е минимален в смисъла на стандартната Евклидова дължина. Второ, нормата е породена от скалярно произведение, т.е. можем да използваме общата теория и всички предимства на работата в Хилбертови пространства.

Да обърнем внимание и че тази формулировка може да се използва и в случая, когато коефициентите участват нелинейно, за разлика от следващата.

3. Езикът на линейните задачи е линейната алгебра, съответно векторно-матричното смятане. Следователно, когато коефициентите участват линейно (както в задачата, която си поставихме) можем да запишем следната преопределена система:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_s) & \cdots & \varphi_n(x_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

или, записано кратко,

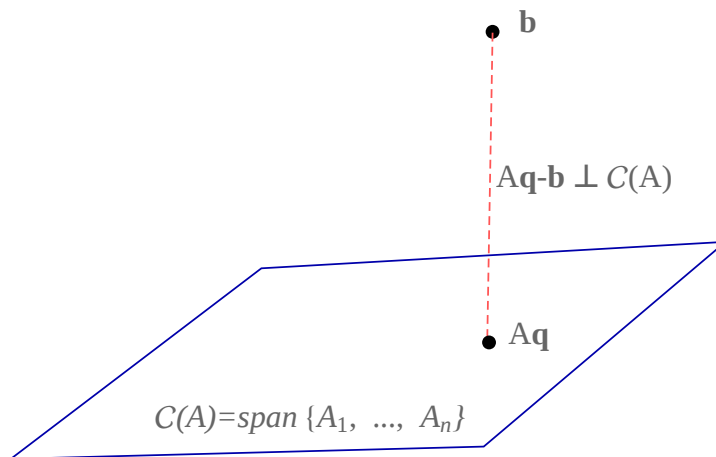
$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}.$$

Решаването на последната система трябва да се разбира в следния смисъл:

$$\|A\mathbf{q} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n}.$$

Нормални уравнения за намиране на оптималното решение

В случая когато задачата е линейна, е най-естествено да разглеждаме системата (2.1). Първо, да обърнем внимание, че ако $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$, тогава системата има точно решение и грешката е 0, т.е. намираме интерполант. Нека сега разгледаме общия случай, т.е. ще допускате възможността $\mathbf{b} \notin \mathcal{C}(A)$. С други думи, нашата задача е да определим $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ така, че $A\mathbf{q} \in \mathcal{C}(A)$ да е възможно най-близко до $\mathbf{b}$ (в смисъла на $\|\cdot\|_2$ -нормата). Доказвали сме, че в едно Хилбертово пространство това се постига т.с.т.к. $A\mathbf{q}$ е ортогоналната проекция на $\mathbf{b}$ в $\mathcal{C}(A)$:



С други думи, трябва да определим $\mathbf{q}$ така, че

$$(\mathbf{b} - A\mathbf{q}, A_i) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

където A_i са стълбовете на A . Последното условие е същото като

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

или

$$A^T A\mathbf{q} = A^T \mathbf{b}.$$

Получихме т.нар. **нормални уравнения**. Да забележим, че ако A има пълен ранг по стълбове (засега ще се ограничим до този случай, тъй като той е най-важен на практика), матрицата $A^T A$ е квадратна, обратима, симетрична и положително определена.

Твърдение 23: Нормални уравнения за линейна задача за НМК

Нека A е матрица с пълен ранг по стълбове. Тогава оптималното решение (в смисъла на метода на най-малките квадрати) на преопределената система $A\mathbf{q} = \mathbf{b}$ е единственото решение на

$$A^T A\mathbf{q} = A^T \mathbf{b}.$$

Да обърнем внимание, че матрицата на системата нормални уравнения е всъщност добре познатата матрица на Грам за базиса $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ по отношение на стандартното скалярно произведение в $\mathbb{R}^s$. Ще разпишем системата по-подробно, като я изведем по още един начин – на база на аналитични съображения.

Изхождайки от първата формулировка на задачата, необходимо условие за това функцията $\varepsilon(q_1, \dots, q_n)$ да достига минимум е частните ѝ производни да се нулират:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_j} = 2 \sum_{i=1}^s (q_1 \varphi_1(x_i) + \dots + q_n \varphi_n(x_i) - y_i) \varphi_j(x_i) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Записана във векторно-матрична форма системата има следния вид:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) \varphi_n(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) y_i \end{bmatrix}.$$

Да обърнем още веднъж внимание, че това е същата система от нормални уравнения, изведена по друг начин.

N.B. 25

Макар нормалните уравнения да изглеждат като прост подход за намиране на решение по метода на най-малките квадрати, много често на практика те не могат да се използват, защото системата е много лошо обусловена.

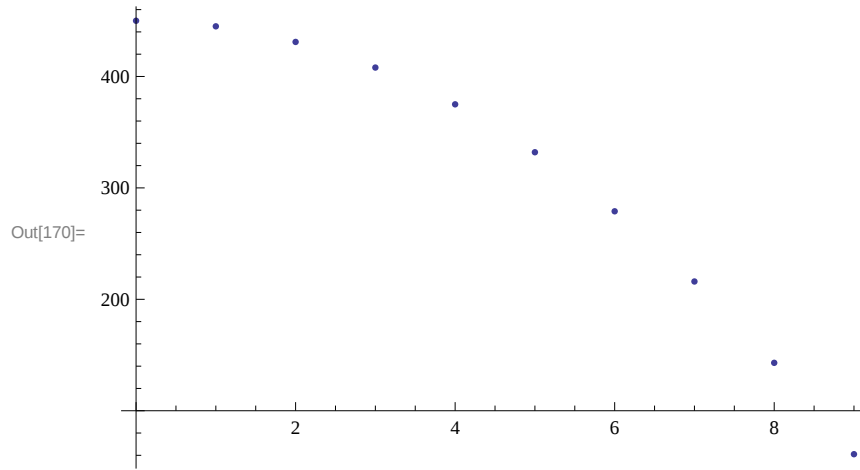
Метод на Холецки за решаване на системи със симетрични и положително-определени матрици

В случаите, когато нормалните уравнения могат да се използват, класическият подход за тяхното решаване, като се вземе предвид че матрицата на системата е симетрична и положително-определена, е като се използва методът на Холецки. Нека го припомним накратко. За повече информация, виж [1].

Пример 47. Тяло е пуснато от височина $450m$. Неговата височина е измервана през интервали от 1 сек. Данните са систематизирани в следната таблица:

t, sec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

Търсим подходяща функция, описваща процеса. Нека първо да изобразим точките. Графиката изглежда по следния начин



Точките изглеждат да лежат върху парабола. Затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. За да определим по метода на най-малките квадрати коефициентите на полинома, вземайки предвид казаното дотук, трябва да решим системата

$$A^T A \mathbf{q} = A^T \mathbf{b},$$

където

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 9 & 81 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 450 \\ 445 \\ 431 \\ 408 \\ 375 \\ 332 \\ 279 \\ 216 \\ 143 \\ 61 \end{bmatrix}.$$

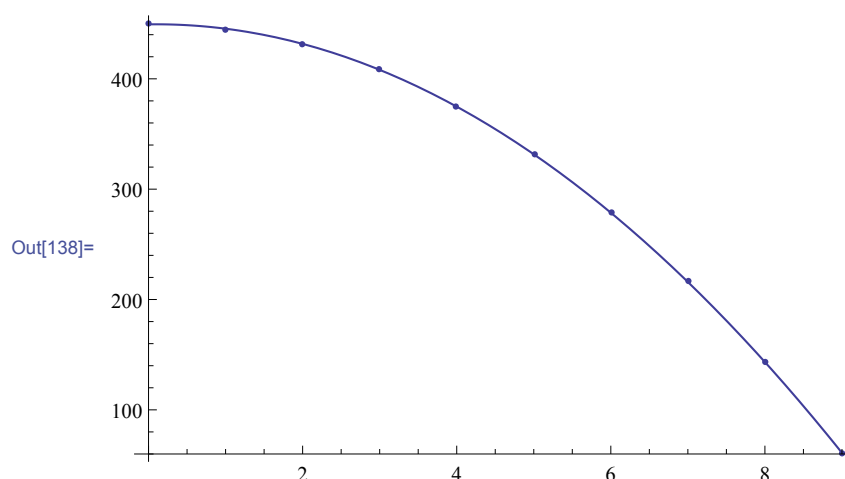
Нека означим $B := A^T A$, $\mathbf{c} := A^T \mathbf{b}$. Тогава системата, която трябва да решим, е $B \mathbf{q} = \mathbf{c}$. Първо, ще разложим матрицата B , която е симетрична и положително определена по метода на Холецки. Например използвайки Mathematica, получаваме, че $B = LL^T$, където матрицата L има вида

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 9\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{165}{2}} & 0 \\ 57\sqrt{\frac{5}{2}} & 9\sqrt{\frac{165}{2}} & 4\sqrt{33} \end{bmatrix}.$$

Остава да решим системата $LL^T \mathbf{q} = \mathbf{c}$ на две стъпки, като решаваме системи с триъгълни матрици.

1. Намираме $\mathbf{z} := L^T \mathbf{q}$, като решим системата $L\mathbf{z} = \mathbf{c}$.
2. Решаваме системата $L^T \mathbf{q} = \mathbf{z}$ и намираме неизвестните $\mathbf{q}$.

Окончателно получаваме $\mathbf{q} = (449.364, 0.962121, -4.90152)^T$.



2.7 Декомпозиция по сингулярни стойности (SVD). Псевдообратни матрици.

Както отбелязахме, нормалните уравнения често водят до съществени проблеми при числени пресмятания. По принцип “тежката артилерия”, когато става въпрос за такива, е декомпозицията по сингулярни стойности (SVD = singular value decomposition). Тя има много приложения, някои от които ще коментираме, но основната ни цел в момента ще бъде да получим решение на линейната задача за НМК.

SVD

Разглеждаме произволна матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с ранг r . Можем да си мислим, че тя съответства на някаква линейна трансформация, която без ограничение на общността е от $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

N.B. 26: S

Д има много приложения, които нямат нищо общо с представата за дадена матрица като линейна трансформация. Разглеждането на основните подпространства обаче отново се оказва незаменимо при изучаване на тази декомпозиция.

Ще се опитаме да обобщим идеята на диагонализацията, като по този начин получим диагонална матрица на произволна трансформация или, казано иначе, разложим произволна матрица до вид, подобен на диагонализацията. Нещо повече, ще се стремим към “най-добрата” възможна диагонализация, т.е. с ортогонални матрици.

И така, нека $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ е ортонормиран базис на $\mathcal{R}(A)$ и $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$ е ортонормиран базис на $\mathcal{N}(A)$. Освен това, нека $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ е ортонормиран базис на $\mathcal{C}(A)$ и $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$ е ортонормиран базис на $\mathcal{N}(A)$.

Тогава за всеки вектор $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r \mathbf{v}_r$, прилагайки трансформацията, представена с A , получаваме

$$\alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r A \mathbf{v}_r = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_r \mathbf{u}_r \in \mathcal{C}(A).$$

Следователно, ако изберем “хубави базиси” на $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{C}(A)$, то можем да получим диагонална матрица на трансформацијата. Тези базиси очевидно треба да исполнуваат следното:

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, i = \overline{1, r}. \quad (2.2)$$

Ќе наричаме σ_i сингуларни стойности, а $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$ – сингуларни вектори на A .

Така, разсъждавајќи както при диагонализацијата, ќе получим декомпозиција

$$A = U\Sigma V^T,$$

където Σ е диагонална матрица, съдържаща сингуларните стойности, а U и V са ортогонални матрици, съдържащи сингуларните вектори.

На пръв поглед изглежда, че не постигнахме много с досегашните разсъждения, тъй като трябва да намерим два различни набора от неизвестни вектори $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$, както и съответните сингуларни стойности σ_i . Оказва се обаче, че е в сила следното твърдение.

Твърдение 24

Всяка матрица A може да се разложи във вида

$$A = U\Sigma V^T,$$

където U е ортогонална матрица, съдържаща собствените вектори на AA^T , V е ортогонална матрица, съдържаща собствените вектори на $A^T A$, а Σ е диагонална матрица, съдържаща по главния диагонал квадратните корени на собствените стойности на AA^T (или, което е същото, на $A^T A$).

Доказателство.

$$A^T A = V\Sigma U^T U\Sigma V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T.$$

Последното очевидно е диагонализацијата на симетричната и положително определена матрица $A^T A$. Следователно V съдържа собствените вектори на $A^T A$, а $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, където λ_i са собствените стойности на $A^T A$. Аналогично U съдържа сингуларните стойности на AA^T , сингуларните стойности са също квадратните корени на собствените стойности на AA^T . $\square$

Има две основни форми на SVD.

- Съкратена форма, в която използваме само r сингуларни вектора, намерени от (2.2) (това са “важните части от базисите”, т.е. базисите на $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$). В този случај $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$.
- За да получим пълната форма, треба да изберем произволни ортогонални вектори от $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{N}(A^T)$ (на пример използвајќи метода на Gram–Schmidt) за да допълним базисите на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, соответно. В този случај $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Приложение на SVD за решаване на линейни задачи за НМК. Псевдообратна матрица.

Слдващите редове ще посветим на основния резултат в тази тема.

Твърдение 25

Нека е дадена следната линейна задача за НМК: $A\mathbf{q} = \mathbf{b}$ и нека сме намерили съкратената SVD $A = U\Sigma V^T$. Тогава оптималното решение е

$$\mathbf{q} = A^+\mathbf{b},$$

където A^+ е псевдообратната матрица (обратна матрица на Moore–Penrose):

$$A^+ = V\Sigma^+U^T,$$

а Σ^+ е диагонална матрица, съдържаща реципрочните на сингулярните стойности.

Доказателство. Нека разгледаме основните подпространства, свързани с A^+ :

- Матрицата A^+ се получава, като умножим U^T отляво с нещо. Следователно редовете на A^+ са линейни комбинации на редовете на U^T , т.е. на сингулярните вектори $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. Тогава $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{C}(A)$. Оттук веднага следва и че $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^T)$;
- За всяко $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ образът $A^+\mathbf{b}$ се получава, като умножим матрицата V отдясно с някакъв вектор, т.е. е линейна комбинация на $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$. С други думи $\mathcal{C}(A^+) = \mathcal{R}(A)$.

Всеки вектор $\mathbf{b}$ можем да разложим на сума от компонента в $\mathcal{C}(A)$ и компонента в $\mathcal{N}(A^T)$: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_C + \mathbf{b}_N$. Вземайки предвид горните наблюдения, можем да заключим, че

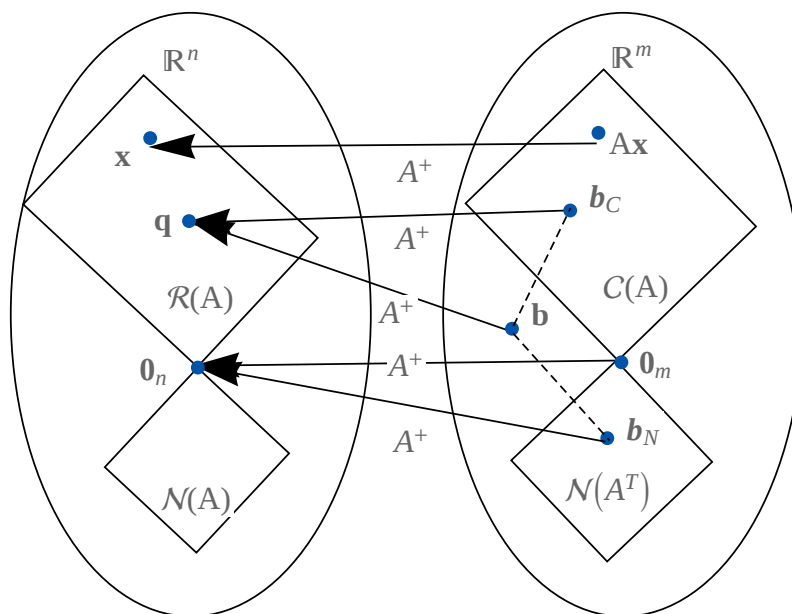
$$\mathbf{q} = A^+\mathbf{b} = A^+(\mathbf{b}_C + \mathbf{b}_N) = A^+\mathbf{b}_C.$$

Оптималното решение по метода на НМК трябва да е решение на системата $A\mathbf{q} = \mathbf{b}_C$. Нека се уверим в това:

$$A(A^+\mathbf{b}) = U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T \mathbf{b}_C = \mathbf{b}_C.$$

С това доказателството е завършено. □

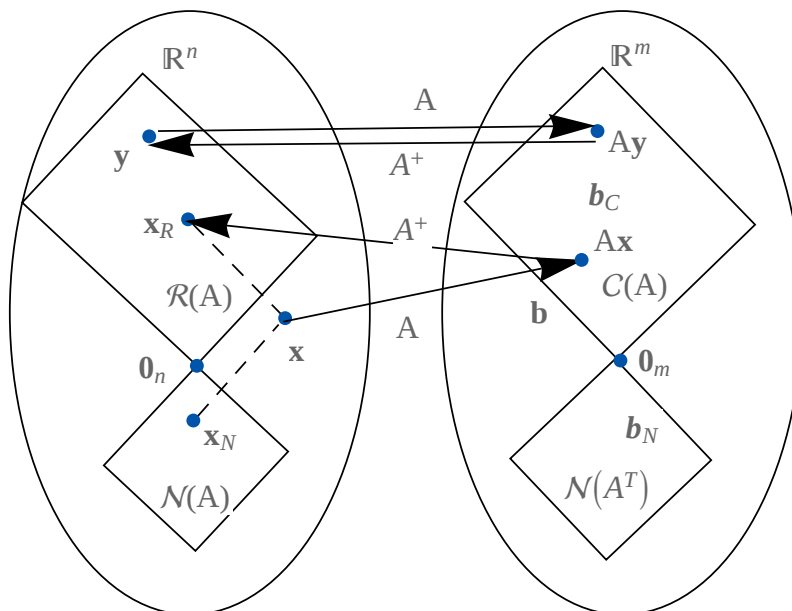
Можем да илюстрираме горното със следната фигура:



Забележка. Да отбележим, че аналогично доказателство може да се направи и ако се използва пълната форма на SVD. Допълнителните стълбове в U и V нямат никакъв принос, тъй като се умножават с 0.

Да отбележим някои основни свойства на A^+ :

- Ако A е квадратна и обратима, тогава $A^{-1} = A^+$;
- Връзката между A и A^+ илюстрираме със следната фигура:



Пример 48. Да разгледаме отново пример 47. Този път нека разложим A . Получаваме (като използваме Mathematica, която връща пълната форма на

SVD):

$$U \approx \begin{bmatrix} 0.00015 & -0.091 & 0.78 & -0.36 & 0.27 & 0.31 & 0.24 & 0.14 & 0.051 & -0.051 \\ 0.0091 & -0.26 & 0.46 & 0.81 & -0.077 & -0.11 & -0.10 & -0.097 & -0.11 & -0.13 \\ 0.034 & -0.38 & 0.20 & -0.46 & -0.36 & -0.43 & -0.36 & -0.28 & -0.22 & -0.19 \\ 0.075 & -0.44 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.90 \\ 0.13 & -0.44 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & -0.22 \\ 0.20 & -0.39 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 & -0.31 & -0.20 \\ 0.29 & -0.28 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & -0.39 & -0.25 & -0.16 \\ 0.40 & -0.11 & -0.12 & 0 & 0 & 0.73 & -0.43 & -0.26 & -0.16 & -0.086 \\ 0.52 & 0.11 & 0.013 & 0 & 0.71 & -0.42 & -0.20 & -0.080 & -0.019 & 0.010 \\ 0.65 & 0.39 & 0.21 & 0.013 & -0.54 & -0.088 & 0.11 & 0.16 & 0.16 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma \approx \begin{bmatrix} 125. & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V \approx \begin{bmatrix} 0.018 & -0.41 & 0.91 \\ 0.13 & -0.90 & -0.41 \\ 0.99 & 0.13 & 0.038 \end{bmatrix}$$

Тогава

$$\Sigma^+ \approx \begin{bmatrix} 1/125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и умножавайки

$$A^+b = V\Sigma^+U^T$$

получаваме същия резултат като в пример 47.

Какво друго ни дава SVD?

Приложенията на SVD далеч не се изчерпват с решаването на задачи по метода на НМК. Тук ще се спрем на следното:

- Едно много важно приложение на SVD е свързано с намаляване размерността на даден модел или задача, в т.ч. компресия на данни, изображения и др. Идеята е следната. Използвайки умножение стълб по ред, можем да напишем

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T.$$

Сега, ако сингулярните стойности са подредени в низходящ ред, тогава можем да запазим само най-големите s от тях и да получим приближение от по-нисък ред:

$$A \approx \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{u}_s\sigma_s\mathbf{v}_s^T.$$

Пример 49. Да разгледаме матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 40 & -4 & -1 \\ -50 & 70 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Като използваме Mathematica, получаваме нейната декомпозиция по сингулярни стойности:

$$A \approx \begin{bmatrix} -0.33 & -0.94 & -0.02 \\ 0.94 & -0.33 & -0.02 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90.5 & 0. & 0. \\ 0. & 28.8 & 0. \\ 0. & 0. & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.67 & -0.74 & 0.03 \\ 0.75 & -0.67 & 0.02 \\ 0.004 & 0.03 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Ако пренебрегнем най-малката сингулярна стойност и вместо нея поставим 0, като умножим обратно трите матрици, получаваме

$$\begin{bmatrix} 40. & -3.99999 & -0.999631 \\ -50. & 70. & 0.000295231 \\ -0.000516673 & 0.999631 & -0.0191981 \end{bmatrix},$$

което е доста добро приближение на оригиналната матрица.

В практиката се работи с големи матрици, много от сингулярните стойности на които често са много малки. Тяхното пренебрегване позволява запазването на компресирани данни с малка загуба на информация.

- SVD дава информация за обусловеността на матрицата A . Широко използвана дефиниция за число на обусловеност е следната:

$$\text{cond}(A) = \sigma_1/\sigma_n.$$

- SVD съдържа информация за базисите на четирите основни подпространства, свързани с A .

Задача. Потърсете информация в интернет за приложенията на SVD.

Библиография

- [1] Б. Боянов, Лекции по числени методи, Дарба, 2008.
- [2] B. Cooperstein, Advanced Linear Algebra, 2nd Edition, CRC Press, 2015.
- [3] R Hibbeler, Engineering Mechanics – Statics & Dynamics, Pearson, 2015.
- [4] G. James, Modern Engineering Mathematics, Pearson Education Ltd, 2015.
- [5] W. Kaplan, Advanced Calculus, Pearson, 5th ed., 2002.
- [6] D. Lay, S. Lay, J. McDonald, Linear Algebra and its Applications, 5th Edition, Pearson, 2016.
- [7] N. Loehr, Advanced Linear Algebra, CRC Press, 2014.
- [8] H. Ricardo, A Modern Introduction to Linear Algebra, CRC Press, 2010.
- [9] R. Serway, J. Jewett, Principles of Physics. A Calculus-Based Text, 4th Edition, Brooks Cole, Cengage, 2005.
- [10] J. Stewart, Calculus, Brooks/Cole, Cengage learning, 7th Edition, 2012.
- [11] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley-Cambridge Press, 4th Edition, 2009.
- [12] D. Zill, Advanced Engineering Mathematics, 5th Edition, Jones & Bartlett Learning, 2014.

Материалът в настоящия курс е до голяма степен повлиян от източници [10, 11] и в по-малка степен от [4, 6, 12]. За въведението в Нютоновата механика се препоръчват [3, 9]. Останалите са допълнителни източници, които могат да служат за справка в областта на линейната алгебра и ДИС при необходимост.