

# Изпит по метод на крайните елементи 1

## февруари 2019

Задача 1. Да се изведе МКЕ с линейни елементи за

$$(D) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u = 1, \bar{x} \in \Omega \\ u(x, 0) = 0, \bar{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} .$$

Задача 2. Нека е дадена триангулацията  $K$ . Да се пресметне локалната матрица на масата за елемента  $\tau$  с върхове  $(x_k, y_k), (x_l, y_l), (x_m, y_m)$ , ако глобалната матрица на масата е

$$M^0 = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2 + 1) \begin{pmatrix} \varphi_1^2 & \cdots & \varphi_1 \varphi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n \varphi_1 & \cdots & \varphi_n^2 \end{pmatrix} d\Omega,$$

където  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  са базисните линейни функции.

Задача 3. Като използвате теоремата на Лах-Милграм докажете, че съществува единствено решение на вариационната задача в  $H_0^1$ :

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in H_0^1,$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \alpha \nabla u \nabla v + uv d\Omega,$$

$$F(v) = \iint_{\Omega} f v d\Omega,$$

където  $\alpha = \alpha(x, y) \geq \alpha_{min} > 0$  и  $\alpha$  и  $f$  са непрекъснати, а  $\Omega$  е многоъгълник.

Задача 4. Да се напише и докаже лемата на Сеа. С нейна помощ да се изведе оценка за грешката на приближеното решение с линейни функции на задача 3.

Задача 5. Чрез лемата на Bramble-Hilbert изведете оценка за  $\|u - u_I\|_{L_2(E)}$  върху стандартния елемент  $E$ , където  $u_I$  е линеен интерполант.