Теоретични основи на индустриалната математика, 2018/2019
Контролна работа No 2

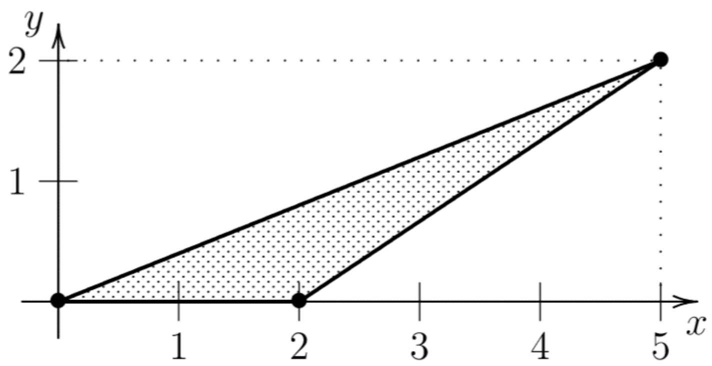
Задача 1. Тяло с маса m се движи за време $t \in [0,1]$ така, че позицията му се описва с векторната функция
$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}.$$
Намерете силата, която действа на тялото във време t и пресметнете работата, извършена от нея.

Задача 2. Поле на скоростите на двумерен поток на идеален флуид около цилиндър се задава с
$$\mathbf{F}(x,y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}\right],$$
където A е положителна константа.

(а) Визуализирайте потока;

(б) Покажете, че, когато (x,y) е далеч от началото на координатната система, $\mathbf{F}(x,y) \approx A\mathbf{i}$.

Задача 3. Използвайте теоремата на Грийн, за да пресметнете лицето на триъгълника като сума от криволинейни интеграли.



Задача 4. Дадена е линейната система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, където
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$
Определете размерностите и базисите на $\mathcal{C}(A)$ и $\mathcal{N}(A)$. Какви условия трябва да изпълнява $\mathbf{b}$, за да има системата решение? При тези предположения, намерете общото решение на системата.

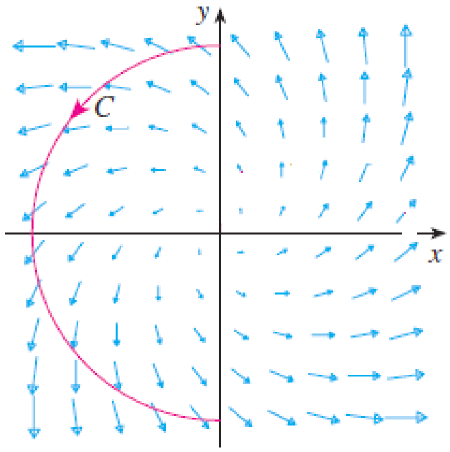
Задача 5. Какво можете да кажете за векторите $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ако системата
$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$
има решение $(2,3,0)^T$? Обосновете се.

Задача 6. Да се провери, че за векторното поле $\mathbf{v} = \left(3xz^2, -yz, x+2z\right)^T$ е в сила
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta \mathbf{v}.$$

Задача 7. Покажете, че за достатъчно гладки $f, g, \Omega, \partial\Omega$ е в сила

$$\int_{\partial\Omega}(f\nabla g)\cdot\mathbf{n}ds = \iint_{\Omega}(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)d\Omega.$$

Задача 8. Векторното поле $\mathbf{F}$ и кривата C са изобразени по-долу. Какъв е знакът на $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$? Обосновете се.



Задача 9. Какво можете да кажете за редовете на матрицата AB, ако редовете на B са линейно-зависими? Обосновете се.

Задача 10. Формулирайте математически модел на разпространението на микроорганизми в дадена област Ω вследствие на случайно движение и насочено движение към даден атрактант с концентрация m. Микроорганизмите не могат да напускат границите на областта.

Основни теореми на интегралното смятане:

$$\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)d\Omega = \oint_{\partial\Omega}(Pdx + Qdy).$$

$$\oint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}ds = \iint_{\Omega}\text{div}\mathbf{F}d\Omega.$$

$$\iint_{\Omega}(2D curl\ \mathbf{F})d\Omega = \oint_{\partial\Omega}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$