Теоретични основи на индустриалната математика
Допълнителни задачи, част 3

Линейни системи. Четирите основни подпространства на $\mathbb{R}^n$

Задача 1. Нарисувайте row и column picture за системата:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= -3 \\ 2x + 2y + 2z &= -2 \\ 3x + 5y + 6z &= -5 \end{aligned}$$

Задача 2. Определете дали следните вектори са ЛНЗ:

- $(1,3,2),\ (2,1,3),\ (3,2,1)\,.$
- $(1,-3,2),\ (2,1,-3),\ (-3,2,1)\,.$

Задача 3. Намерете размерността и определете базисите на четирите фундаментални линейни подпространста за матриците A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Намерете размерността и базисите на $R(A), C(A), R(U), C(U)$. Кои от пространствата съвпадат?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Характеризирайте всички решения на $A\vec{x} = \vec{b}$, ако

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Задача 6. Опишете четирите основни подпространства за матрицата A и характеризирайте всички решения на системата $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. Без да превеждате в ref, отговорете какви условия трябва да изпълняват b_1, b_2, b_3 и b_4, за да бъдат системите съвместими? Ако тези условия са изпълнени, определете $\vec{x}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$