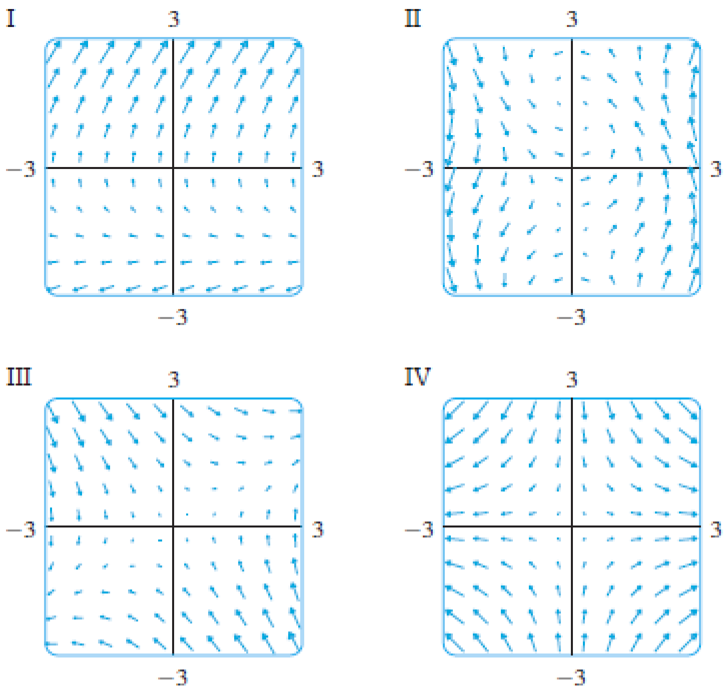
Теоретични основи на индустриалната математика
Допълнителни задачи, част 2

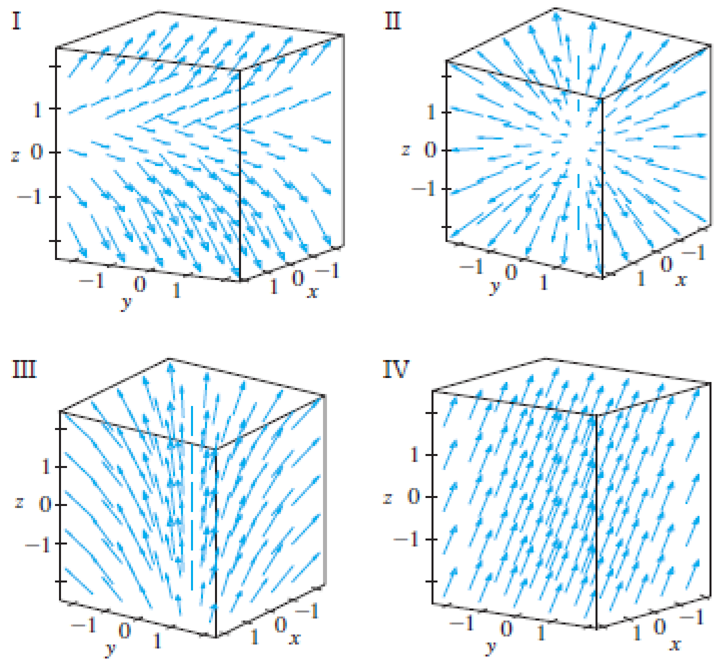
1 Векторни функции на векторен аргумент/векторни полета

Задача 1. Коя от следните картинки на кое векторно поле съответства:



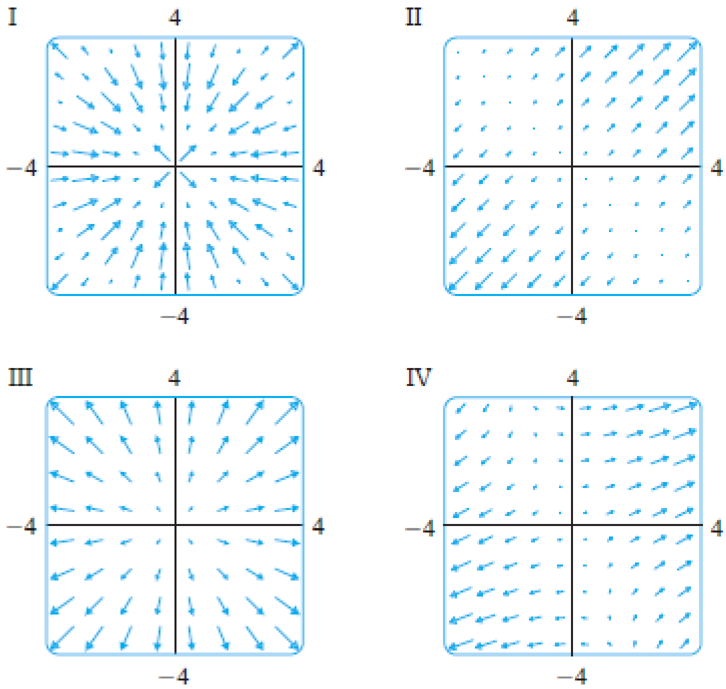
- $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$;
- $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j}$;
- $\mathbf{F}(x, y) = (y, y + 2)$;
- $\mathbf{F}(x, y) = \cos(x + y)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$?

Задача 2. Коя от следните картинки на кое векторно поле съответства:



- $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$;
- $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$?

Задача 3. Коя от следните картинки отговаря на градиентното поле на всяка от зададените функции:



- $f(x, y) = x^2 + y^2$;
- $f(x, y) = x(x + y)$;
- $f(x, y) = (x + y)^2$

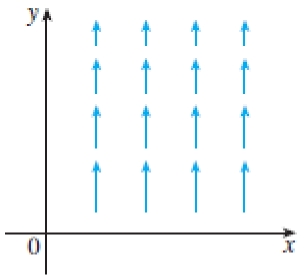
- $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$?

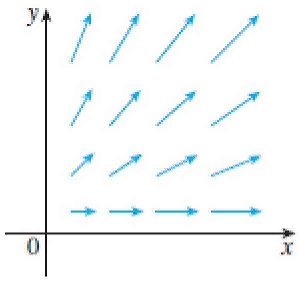
Задача 4. Частица се движи в поле от скорости

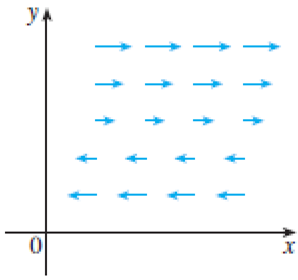
$$\mathbf{F}(x,y) = (xy-2, y^2-10).$$

Ако в момента от време $t=1$ тя се намира в точката $(1,3)$, дайте приблизителното ѝ положение в момента $t=1.05$.

Задача 5. Всяко от следните векторни полета $\mathbf{F}$, изобразени в равнината xy има същия вид във всяка успоредна равнина (т.е. не зависи от z).







Определете:

- Какъв е знакът на $\nabla \cdot \mathbf{F}$? Обосновете се.
- Накъде сочи $\nabla \times \mathbf{F}$? Обосновете се.

Задача 6. Нека f е скаларно поле, а $\mathbf{F}$ е векторно поле. Кои от следните изрази имат смисъл? За тези, които имат, посочете дали резултатът е вектор или скалар:

- $\nabla \times f$;
- $\nabla \times (\nabla f)$;
- $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \mathbf{F})$;
- $\mathrm{div}(\mathrm{curl}(\mathrm{grad} f))$;
- $(\nabla f) \times (\nabla \cdot \mathbf{F})$.

Задача 7. Тънка метална пластина, намираща се в равнината Oxy, има температура $T(x,y)$ в точката (x,y). Линиите на ниво на T се наричат изотерми. Скицирайте няколко изотерми, ако функцията, моделираща температурата, е

$$T(x,y) = \frac{100}{1+x^2+2y^2}.$$

Направете скица на дифузионния поток.

Задача 8. Нека $V(x,y)$ описва електричния потенциал в точката (x,y) в равнината Oxy. Линиите на ниво на V се наричат еквипотенциални линии. Нарисувайте няколко еквипотенциални линии, ако

$$V(x,y) = \frac{c}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},$$

където c е положителна константа. Скицирайте електричното поле.

Задача 9. Покажете, че ако $g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$ и f е диференцируема функция, тогава g удовлетворява уравнението

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

Задача 10. Във флуидната динамика, токовите линии, определени от дадено векторно поле, са траекториите, обхождани от частица, за която даденото векторно поле е поле на скоростите.

- Като използвате Mathematica, изобразете векторното поле $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Използвайте чертежа, за да скицирате няколко токови линии.

- Направете предположение какво е общото уравнение на токовите линии.

- Ако всяка от токовите линии е параметризирана чрез

  $$x = x(t),\ y = y(t),$$

  обяснете защо тези функции удовлетворяват

  $$\frac{dx}{dt} = x,\ \frac{dy}{dt} = -y.$$

  Вземайки предвид последното, решете уравненията, за да получите токовата линия, минаваща през $(1,1)$.

Задача 11. Скицирайте векторното поле

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

заедно с няколко токови линии. Каква форма изглежда да имат токовите линии? Ако параметричните уравнения на дадена токова линия са $x = x(t)$, $y = y(t)$, какви ОДУ удовлетворяват тези функции? Покажете, че $dy/dx = x$. Решете диференциалните уравнения.

Задача 12. Ако скоростта на даден флуид е зададена с

$$\mathbf{v} = (ax + by)\mathbf{i} + (cx + dy)\mathbf{j},$$

намерете условия за a, b, c, d, така че

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,\ \nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Проверете, че в този случай

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(ax^2 + 2bxy - ay^2).$$

Какво може да кажете тогава за векторното поле $\mathbf{v}$.

Задача 13. Да се провери, че за векторното поле

$$\mathbf{v} =< 3xz^2, -yz, x + 2z >$$

е в сила

$$\nabla \times (\nabla \times v) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v},$$

където $\Delta := \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ е операторът на Лаплас.

Задача 14. Проверете, че $\Delta\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$, за векторното поле

$$\mathbf{v} = x^2y(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

.

Задача 15. Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k},$$

където f, g, h са диференцируеми функции, е безвихрово, т.е. $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Дайте физична интерпретация за това понятие.

Задача 16. Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\mathbf{i} + g(x, z)\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k},$$

където f, g, h са диференцируеми функции, е несвиваемо, т.е. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Дайте физична интерпретация за това понятие.

Задача 17. Уравненията на Maxwell, които свързват електричното поле $\mathbf{E}$ и магнитното поле $\mathbf{H}$, при определени предположения са

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},
\end{aligned}$$

където c е скоростта на светлината. Докажете следните равенства:

- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$;
- $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$;
- $\nabla^2 \mathbf{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$.

Задача 18. Да се имплементира методът на Нютон за решаване на нелинейни системи.

Задача 19. Да се намери линеаризацията на аналитично зададените нелинейни векторни полета от настоящата тема.

2 Уравнения на топло- и масо-пренос

Задача 20. Дадено е уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (u^{\alpha} \nabla u) + f.$$

Дайте възможна физическа интерпретация на това уравнение. Запишете в координатна форма:

- в декартови координати в 3D;
- в полярни координати в 2D;
- в цилиндрични координати в 3D.

Задача 21. Като използвате системата Mathematica, решете уравнението на дифузията върху кръг с радиус 1 и условия за идеално изолирана граница. Използвайте различни начални условия и проверете, че във всеки от случаите топлинната енергия в системата се запазва.

Задача 22. Формулирайте математически модел на разпространението на топлина в правоъгълна област вследствие на дифузия и конвективен поток, насочен в посоката на $\mathbf{i}$ и имащ константна скорост c. Границата е идеално изолирана. Съставете и имплементирайте числена схема за решаване на диференциалната задача. Направете числени експерименти за различни начални условия. Запазва ли се топлинната енергия в този случай?

3 Криволинейни интеграли. Основни теореми на интегралното смятане.

Задача 23. Токът се дефинира като преминалия през проводника заряд Q за единица време. Като имате предвид това, дайте математическа дефиниция за $I(t)$. Дайте физична интерпретация на

$$\int_5^{10} I(t)dt.$$

Задача 24. Ако x се измерва в метри, а $f(x)$ – в Нютони, то в какво се измерва

$$\int_0^{100} f(x)dx?$$

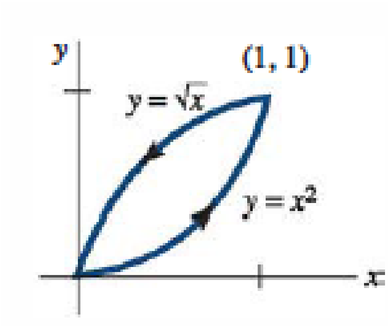
Обосновете се.

Задача 25. Ако x се измерва в метри, а $a(x)$ – в килограми на метър, в какво се измерва da/dx? А

$$\int_2^8 a(x)dx?$$

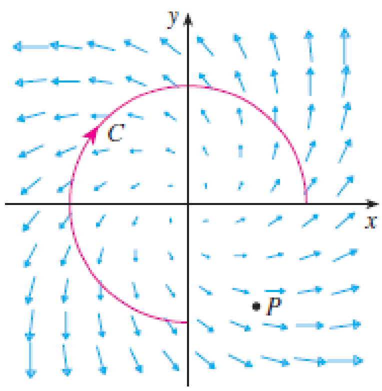
Обосновете се.

Задача 26. Линейната плътност на тел, която има следната форма:



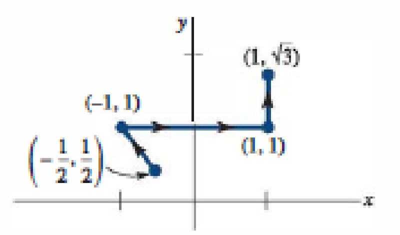
е $\rho(s) = 9 + 2\sqrt{s}$, измерена в kg/m, където s е дължината от началото на телта (началото на координатната система). Като използвате фигурата, определете приблизително каква е масата ѝ.

Задача 27. Векторното поле $\mathbf{F}$, кривата C и точката P са изобразени по-долу:

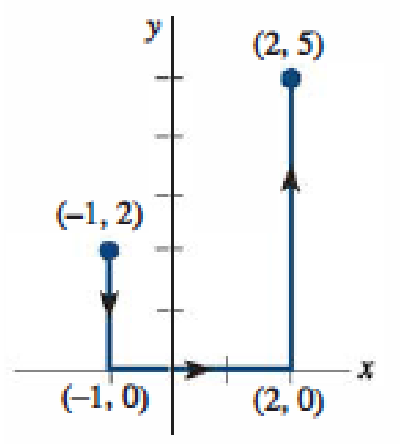


Какъв е знакът на $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$? Какъв е знакът на div $\mathbf{F}(P)$? Обосновете се.

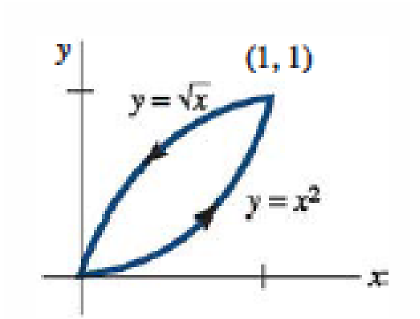
Задача 28. Намерете работата, извършена от силовото поле $\mathbf{F} = \dfrac{2}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ при движение от точката (-1/2, 1/2) до точката $(1, \sqrt{3})$ по траекторията, изобаразена по-долу:



Задача 29. Пресметнете $\int_C (2x + y)dx + xydy$ върху кривата C:



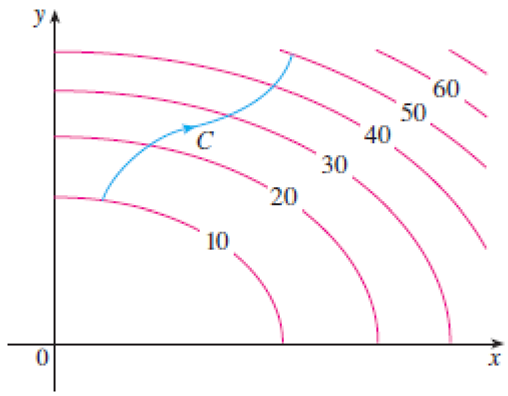
Задача 30. Пресметнете $\oint_C (x^2 + y^2)dx - 2xydy$ върху следната затворена крива:



Задача 31. Пресметнете $\oint_C (x^2 - y^2)ds$, където C се задава с

$$x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

Задача 32. На фигурата е показана крива C и линиите на ниво на функцията f, чийто градиент е непрекъснат. Намерете $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



Задача 33. Покажете, че ако векторното поле $\mathbf{F} = P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ е консервативно и P, Q, R имат непрекъснати частни производни, тогава

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Задача 34. Пресметнете

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

където $\mathbf{F}(x, y) = (1+xy)e^{xy}\mathbf{i}+x^2e^{xy}\mathbf{j}$, където кривата C е определена от $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i}+2\sin t\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Задача 35. Покажете, че интегралът не зависи от конкретния избор на кривата C:

$$\int_C 2xe^{-y}dx + (2y - x^2e^{-y})dy,$$

където C е коя да е крива, свързваща точките $(1, 0)$ и $(2, 1)$.

Задача 36. Частица започва движението си от точката $(-2, 0)$ и се движи по оста x до точката $(2, 0)$, след което се движи по полу-окръжността $y = \sqrt{4 - x^2}$ до началната точка. Намерете работата, която извършва при това движение силовото поле

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, x^3 + 3xy^2).$$

Задача 37. Нека $\mathbf{F} = \nabla f$, където $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Намерете криви C_1 и C_2 такива, че

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1.$$

Задача 38. Да се пресметне

$$\int_C (y + e^{\sqrt{x}})dx + (2x + \cos y^2)dy,$$

където C е границата на областта, заключена от параболите $y = x^2$ и $x = y^2$.

Задача 39. Като използвате теоремата на Green, докажете формулата за смяна на променливите под интеграла за частния случай, когато $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dxdy = \iint_S \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

В последното R е област в равнината xy, която отговаря на област S в равнината uv – образ под действието на трансформацията

$$x = g(u, v), \ y = h(u, v).$$

Задача 40. Нека Ω и $\partial\Omega$ удовлетворяват условията на теоремата за дивергенцията, а скаларните функции и компонентите на векторните полета са поне два пъти непрекъснато диференцируеми. Докажете следните тъждества:

- $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}dS = 0$, където $\mathbf{a}$ е константен вектор;
- $V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS$, където $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$;
- $\iint_{\partial\Omega} curl\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}dS = 0$;
- $\iint_{\partial\Omega}(f\nabla g) \cdot \mathbf{n}dS = \iiint_{\Omega}(f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)dV$;
- $\iint_{\partial\Omega}(f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}dS = \iiint_{\Omega}(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dV$;