Допълнителни задачи за курса

“Теоретични основи на индустриалната математика”

Съдържание

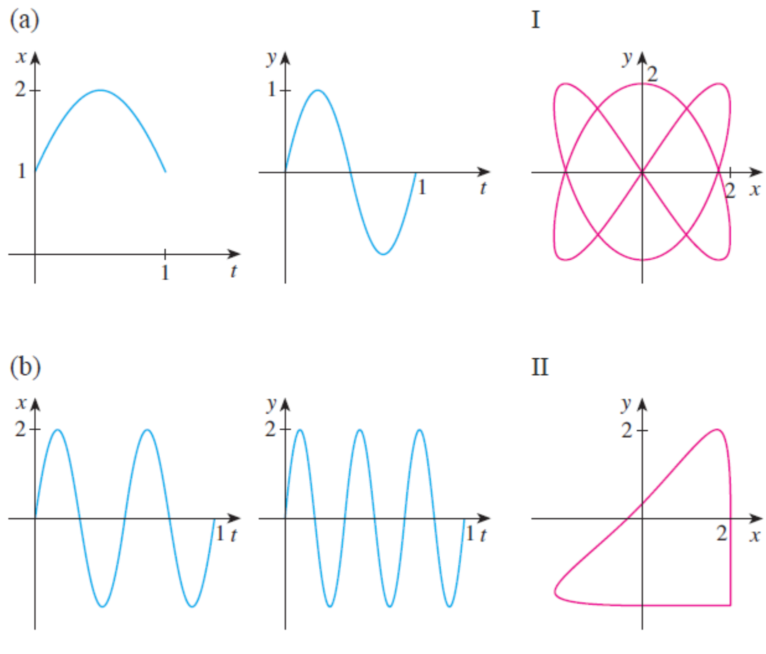
Глава 1

Векторен анализ

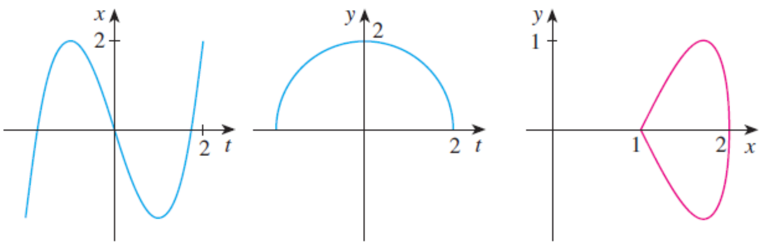
1.1 Векторни функции на един скаларен аргумент

1.1.1 Предварителни задачи

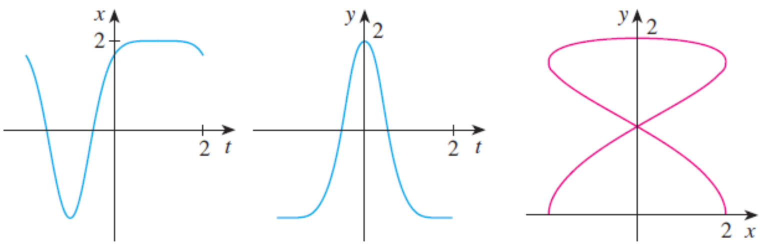
1. Свържете графиките на параметричните уравнения $x = f(t)$ и $y = f(t)$ в $(a) - (d)$ и параметричните криви I-IV:



(c) III



(d) IV



2. Свържете параматеричните уравнения с графиките I-VI без да използвате графични инструменти:

   (а) $x = t^4 - t + 1 \quad y = t^2$;

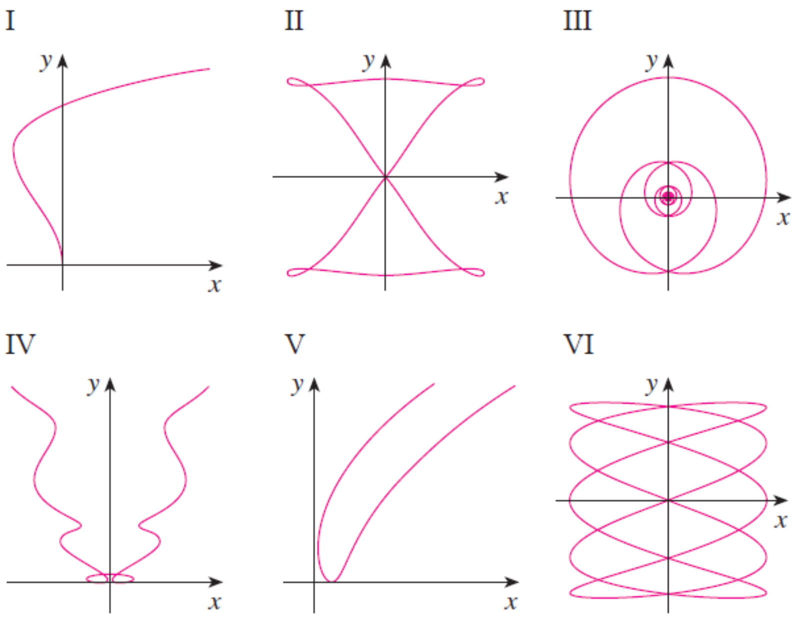
   (б) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$;

   (в) $x = \sin 2t, \quad y = \sin(t + \sin 2t)$;

   (г) $x = \cos 5t, \quad y = \sin 2t$;

   (д) $x = t + \sin 4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$;

   (е) $x = \frac{\sin 2t}{4+t^2}, \quad y = \frac{\cos 2t}{4+t^2}$



3. Нарисувайте графиките на кривите така, че да се видят всички важни неща, свързани с поведението им.

   (а) $\mathbf{r}(t) = \big(t^4 - 2t^3 - 2t^2\big)\mathbf{i} + \big(t^3 - t\big)\mathbf{j}$;

   (б) $\mathbf{r}(t) = \big(t^4 + 4t^3 - 8t^2\big)\mathbf{i} + \big(2t^2 - t\big)\mathbf{j}$.

4. Намерете уравнение на допирателната в дадената точка.

   (а) $\mathbf{r}(t) = t\cos\mathbf{i} + t\sin t\mathbf{j}, \quad t = \pi$;

   (б) $\mathbf{r}(t) = \sin^3\theta\mathbf{i} + \cos^3\theta\mathbf{j}, \quad \theta = \pi/6$;

5. Намерете уравнение на допирателната/допирателните:

   (а) $\mathbf{r}(t) = 6\sin t\mathbf{i} + \big(t^2 + t\big)\mathbf{j}$ в (0,0);

   (б) $\mathbf{r}(t) = (\cos t + \cos 2t)\,\mathbf{i} + (\sin t + \sin 2t)\,\mathbf{j}$ в (-1,1).

6. Да се намерят $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ и да се определи за кои стойности на t е изпъкнала/вдлъбната:

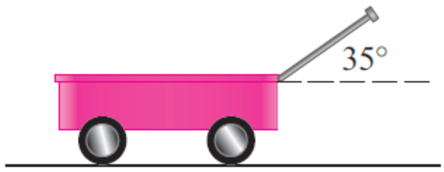
   (а) $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + (t^2 + t)\mathbf{j}$;

   (б) $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$, $0 < t < \pi$.

7. В кои точки допирателната към кривата $\mathbf{r}(t) = a\cos^3\theta\mathbf{i} + a\sin^3\theta\mathbf{j}$, където a е параметър, има наклон 1/-1?

8. Намерте компонентата на $\mathbf{b} = \big(1, 1, 2\big)^T$ върху $\mathbf{a} = \big(-2, 3, 1\big)^T$.

9. Количка се издърпва на разстояние 100 м по хоризонтален път с константна сила $\mathbf{F} = 70N$. Намерете извършената работа.



10. Сила, зададена с вектора $\mathbf{F} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, движи частица от т. $P(2,1,0)$ до т. $Q(4,6,2)$ Намерете извършената работа.

11. Намерете проекцията и компонентата на $\mathbf{b}$ върху $\mathbf{a}$

   (а) $\mathbf{a} = (-5,12)^T, \quad \mathbf{b} = (4,6)^T$;

   (б) $\mathbf{a} = (-2,3,-6)^T, \quad \mathbf{b} = (5,-1,4)^T$;

   (в) $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

12. Покажете, че векторът $\text{orth}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ е ортогонален на $\mathbf{a}$.

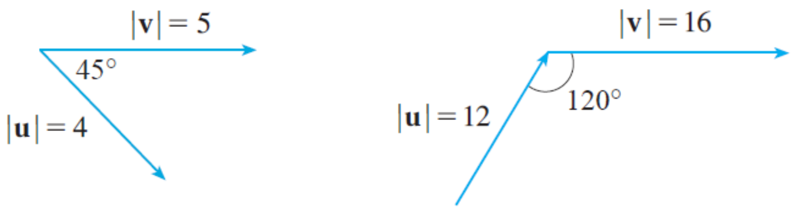
13. Пресметнете $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и проверете, че е ортогонален на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

   (а) $\mathbf{a} = \big(6,0,-2\big)^T, \quad \mathbf{b} = \big(0,8,0\big)^T$;

   (б) $\mathbf{a} = \mathbf{j}+7\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$;

   (в) $\mathbf{a} = t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}$.

14. Определете дали $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ сочи в страницата или от нея.



15. Намерете нормален вектор към равнината $2x+3y+4z = 12$ в т. (2,4,-1).

16. Дадена е функцията $\mathbf{r}(t)$. Скицирайте кривата, пресметнете $\mathbf{r}'(t)$, скицирайте радиус-вектора $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ и допирателния вектор $\mathbf{r}'(t)$ за даденото t. Намерете единичния допирателен вектор $\mathbf{T}(t)$.

   (а) $\mathbf{r}(t) = \big(t-2, t^2+1\big)^T$, $t = -1$;

   (б) $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i}+e^{-t}\mathbf{j}$, $t = 0$.

1.1.2 Основни задачи

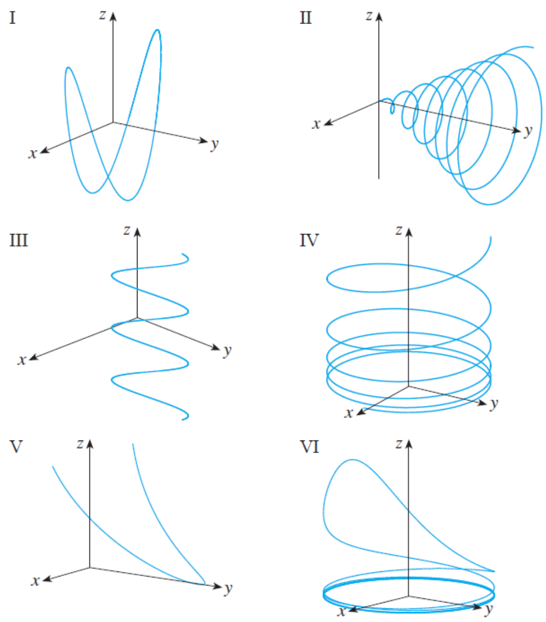
1. Нека позицията на частица се описва от $x_1 = 3\sin t$, $y_1 = 2\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, а на друга частица от $x_2 = -3 + \cos t$, $y_2 = 1 + \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.
   (а) Нарисувайте графиките на двете траектории.
   (б) Някои от пресечните точки точки на сблъскване ли са?
   (в) Променя ли се нещо, ако $x_2 = \cos t, y_2 = 1 + \sin t$, $0 \le t \le 2\pi$?
2. Крива е определна от $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 3t)\mathbf{j}$.
   (а) Покажете, че кривата има две допирателни в т. (3,0) и намерете техните уравнения.
   (б) Намерете точките, където допирателните са хоризонтални или вертикални.
   (в) Определете къде кривата е изпъкнала/вдлъбната.
   (г) Скицирайте кривата на ръка.
   (д) Постройте графиката и сравнете заключенията си.
3. Крива е зададена като $\mathbf{r}(t) = C(t)\mathbf{i} + S(t)\mathbf{j}$ (**Cornu's spiral**), където $C(t) = \int_0^t \cos(\pi u^2/2)du$, $S(t) = \int_0^t \sin(\pi u^2/2)du$ и C и S са така наречените функции на Френел.
   (а) Нарисувайте графика. Какво се случва при $t \to \infty$, $t \to -\infty$?
   (б) Намерете дължината на кривата от началото на координатната система до точката, отговаряща на параметъра t.
4. Докажете, че в декартова координатна система $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, $n = 2, 3$.
5. Докажете, че дирекционните косинуси на даден вектор, т.е. косинусите на насочените ъгли α, β, γ, които векторът $\mathbf{a}$ сключва с осите x, y, z, са координатите на вектора $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.
6. В кои случаи $\mathrm{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathrm{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ и в кои $\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathrm{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$?
7. Покажете, че разстоянието между точката $P_1(x_1, y_1)$ и правата $ax + by + c = 0$ е $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
8. Докажете еквивалентността на двете дефиниции за $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
9. Да се докажат свойствата
   (а) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
10. Свържете параметричните уравнения с графиките. Обосновете избора си.
    (а) $x = t\cos t$, $y = t$, $z = t\sin t$, $t \ge 0$;
    (б) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1/(1 + t^2)$;

(в) $x = t,\ y = 1/(1+t^2),\ z = t^2$;

(г) $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos 2t$;

(д) $x = \cos 8t,\ y = \sin 8t,\ z = e^{0.8t},\ t \geq 0$;

(е) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t,\ z = t$.



11. Нека $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имат граница при $t \to a$. Докажете, че

    (а) $\lim_{t\to a} \big[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\big] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\cdot\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$;

    (б) $\lim_{t\to a} \big[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\big] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\times\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$.

12. Докажете, че

    (а) $\frac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$;

    (б) $\frac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)\big] = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$

    Забележка: За 11 и 12 е достатъчно да се докаже за $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^3$.

13. Намерете ъгъла на пресичане на кривите $\mathbf{r_1}(t) = (t, t^2, t^3)^T$ и $\mathbf{r_2}(t) = (\sin t, \sin 2t, t)^T$ с точност до най-близкия градус.

14. Намерете формула за $\frac{d}{dt}\big[\mathbf{u}(t)\cdot(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t))\big]$.

15. Покажете, че кривата с векторно уравнение $\mathbf{r}(t) = (a_1t^2+b_1t+c_1, a_2t^2+b_2t+c_2, a_3t^2+b_3t+c_3)^T$ лежи в равнина и намерете уравнението на тази равнина.

16. Да се направи анимация на построяването на циклоида $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1-\cos\theta)$, $\theta \in R$, описвана от фиксираната точка P върху окръжност, търкаляща се надясно.

17. Да се направи анимация с полиноми на Тейлър от нарастващи степени и фунцкията $f(x) = \sin x$.

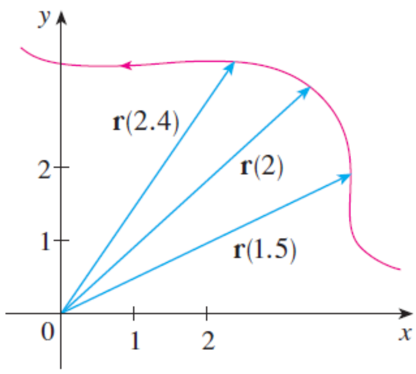
18. Прочетете следната статия в Wikipedia: Vector space model. Използвайте информацията там, за да се реализира проста търсачка върху колекция от 10 документа, съдържжащи 30 думи. Да се пресметне и интерпретира AA^T и $A^T A$, където стълбовете на A отговарят на документите.

1.2 Движение на частица. Статика. Втори закон на Нютон. Движение по окръжност

1.2.1 Предварителни задачи

1. Частица се движи по траекторията $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t^2, t^3\right)^T$. Намерете тангенциалната и нормалната компонента на скоростта.

2. На фигурата функцията $\mathbf{r}(t)$ описва траекторията на частица.



   (а) Нарисувайте вектор, който описва средната скорост за $2 \leq t \leq 2.4$.

   (б) Нарисувайте вектор, който описва средната скорост за $1.5 \leq t \leq 2$.

   (в) Нарисувайте апроксимация на вектора $\mathbf{v}(2)$. Намерете скоростта на частицата за $t = 2$.

3. Намерете функцията, която описва движението на частицата, и нарисувайте нейната траектория, ако:

   (а) $\mathbf{a}(t) = 2t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$.

   (б) $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

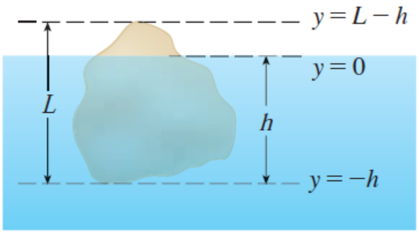
4. Сила с големина $20N$ действа право нагоре от равнината xy на частица с маса $m = 4kg$. Частицата започва да се движи с начална скорост $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Намерете векторната функция, която описва движението на частицата, и нейната скорост във време t.

1.2.2 Основни задачи

1. Принципът на Архимед гласи, че върху обект, частично или изцяло потопен във флуид, действа сила, равна на теглото на флуида, изместен от обекта. На обект с плътност ρ_o, потопен във флуид с плътност ρ_f, действа сила $\mathbf{F} = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)dy$, където $A(y)$ е лицето на напречно сечение (виж фигурата към задачата).

    (а) Покажете, че частта от обема на тялото, намираща се над повърхността на водата (в %), е $100\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$.

    (б) $\rho_{ice} = 917kg/m^3$, $\rho_{seawater} = 1030kg/m^3$. Каква част от обема на айсберга на фигурата е над водата?



Упътване: Теглото на тялото се задава с

$$W = \rho g \int_{-h}^{L-h} A(y)dy.$$

2. Според закона на Нютон за гравитацията $F_{\text{earth grav}} = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$, където $x = x(t)$ е разстоянието от повърхността до обекта в момент t и R е радиусът на Земята.

    (а) Нека ракета е изстреляна вертикално нагоре с начална скорост v_0 и h е максималната височина, която тя може да достигне. Покажете, че $v_0 = \sqrt{\frac{2gRh}{R+h}}$.
    Упътване: От правилото за диференциране на съставна функция имаме $m(dv/dt) = mv(dv/dx)$.

    (б) Пресметнете границата $v_e = \lim_{h\to\infty} v_0$. Константата v_e се нарича "escape velocity" за Земята.

    (в) Ако $R = 3960\ mi$ и $g = 32ft/s^2$, намерете v_e.

3. Обект с маса m се движи хоризонтално в резистивна среда. Нека $v(0) = v_0$, $s(0) = s_0$. Какво е разстоянието, което обектът изминава, ако $f(v) = -kv$ и $f(v) = -kv^2$?

4. Кое е по-бързо – да отиваш нагоре или да слизаш надолу?
Топка с маса m е изстреляна вертикално нагоре от повърхността на Земята с положителна начална скорост v_0. Ако на топката действат гравитационната сила и линейно/квадратично съпротивление на въздуха, кое е по-бързо?

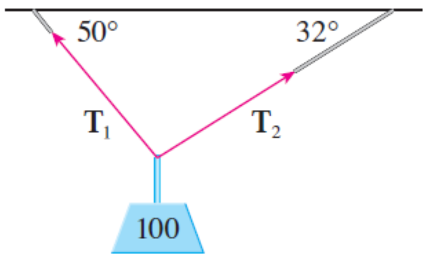
5. Ако игнорираме силата на съпротивление на въздуха, няма разлика между скоростта на леки и тежки свободно падащи обекти. Намерете $\frac{dv}{dm}$, ако имаме линейно съпротивление на въздуха.

6. Покажете, че за параметричната крива $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ е в сила
$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}.$$

7. Намерете кривината на параболата $y = x^2$ в т.$(1, 1)$. Къде кривината е най-голяма? (Преди да пресметнете направете хипотеза.)

8. Пресметнете кривината на циклоидата $\mathbf{r}(\theta) = (\theta - \sin\theta)\mathbf{i} + (1 - \cos\theta)\mathbf{j}$ на върха на някоя от дъгите ѝ.

9. Теглилка с тегло $100lb$ виси, закачена на две жици. Намерете силите на опън на жиците и тяхната големина.



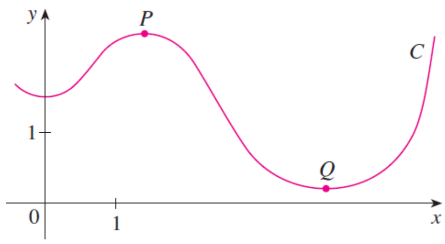
10. Да се намери кривината на $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)^T$ в т. (0,0,0).

11. Да се докаже, че $\kappa(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$.

12. Постройте графиката на $\mathbf{r}(t) = (\sin 3t, \sin 2t, \sin 3t)^T$. В колко точки изглежда, че $\kappa(t)$ достига локален и глобален максимум? Пресметнете $\kappa(t)$ (използвайте системата *Mathematica*) и сравнете вашата хипотеза.

13. Дадена е кривата C.

    - Посочете коя е по-голяма – кривината в т. P или кривината в т. Q?
    - Намерете кривината в т. P и в т. Q, като нарисувате допирателните окръжности към кривата в точките.



14. Покажете, че ако частица се движи с постоянна скорост, тогава **v** и **a** са ортогонални.

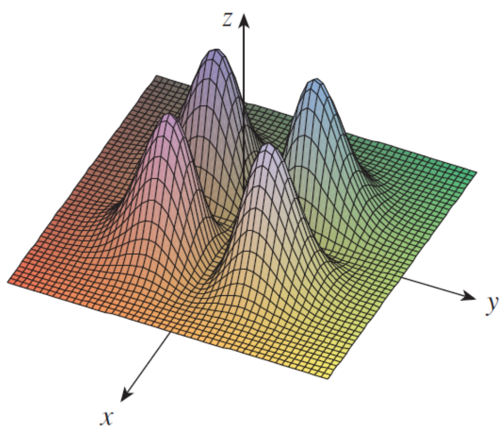
1.3 Скаларни функции на векторен аргумент

1.3.1 Предварителни задачи

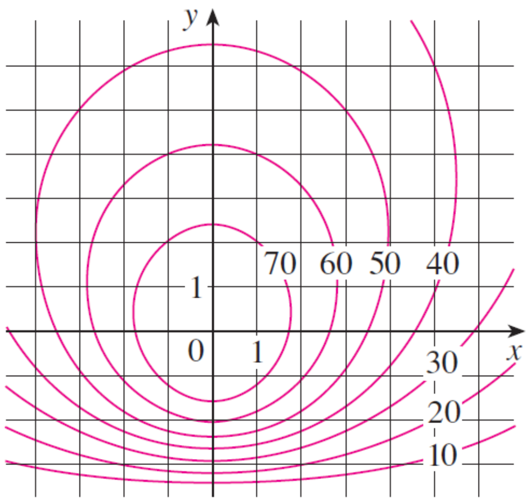
1. Скицирайте дефиниционното множество на функциите
   (а) $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$;
   (б) $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$;
   (в) $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$.

2. Начертайте графиките на функциите
   (а) $f(x, y) = 1 + y$;
   (б) $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$;
   (в) $f(x, y) = e^{-y}$;
   (г) $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

3. Скицирайте на ръка линиите на ниво за функцията, чиято графика е

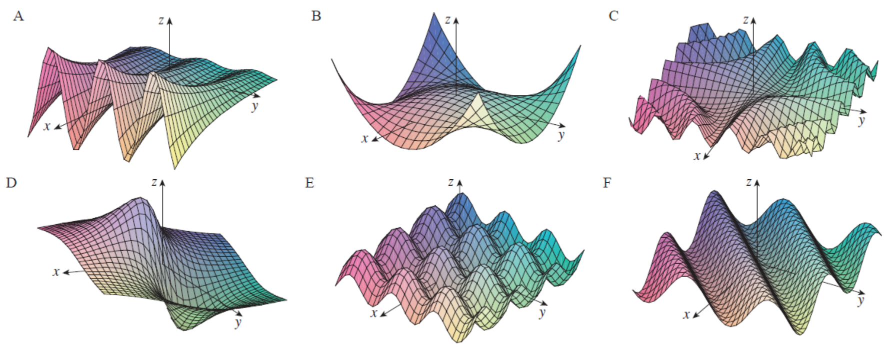


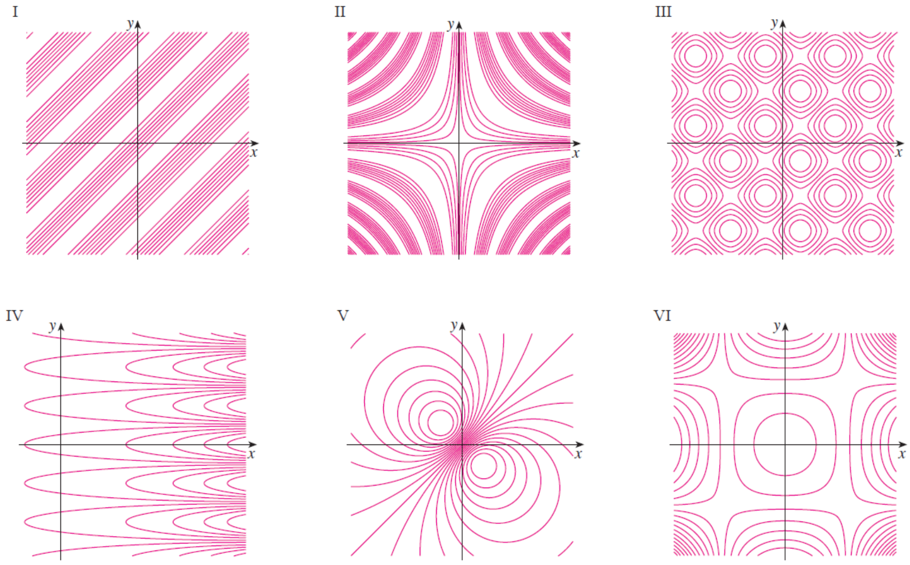
4. На графиката са показани линиите на ниво на фунцията f. Използвайте ги, за да определите $f(-3, 3)$ и $f(3, -3)$. Какво може да кажете за формата на нейната графика?



5. Свържете функцията с нейната графика и линиите ѝ на ниво. Обосновете се.

   (а) $z = \sin xy$;
   (б) $z = \sin(x - y)$;
   (в) $z = (1 - \sin x^2)(1 - \sin y^2)$;
   (г) $z = e^x \cos y$;
   (д) $z = \sin x - \sin y$;
   (е) $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$.





6. Начертайте линии на ниво на функцията

   (а) $f(x,y) = ye^{x}$;

   (б) $f(x,y) = y \sec x$.

7. Използвайте *Mathematica* и обяснете защо границите на функциите не съществуват.

   (а) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$;

   (б) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$.

8. Намерете $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, ако z е дефинирана неявно като

   (а) $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$;

   (б) $e^z = xyz$;

   (в) $yz + x \ln y = z^2$.

9. Начертайте графиката на функцията и допирателната равнина в дадената точка. Приближете двете графики, докато станат неразличими.

   (а) $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1,1,5)$;

   (б) $z = \arctan(xy^2), \quad (1,1,\pi/4)$.

10. Намерете $\frac{\partial z}{\partial s}$ и $\frac{\partial z}{\partial t}$

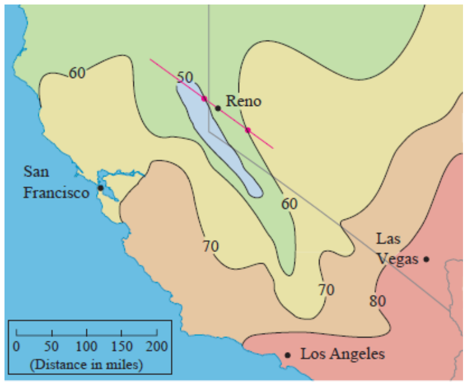
    (а) $z = x^2y^3, \quad x = s\cos t, \quad y = s \sin t$;

    (б) $z = e^r \cos\theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2+t^2}$;

    (в) $z = \tan(\frac{u}{v}), \quad u = 2s + 3t, \quad v = 2s - 2t$.

11. Дадени са функциите $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$ и $t = \gamma^2\alpha$. Намерете $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial u}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ за $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

12. На фигурата са дадени линиите на ниво на функцията $T(x, y)$, която описва температурата в Калифорния и Невада в 15:00ч. Намерете производната по посока на функцията в Рино, в североизточна посока.



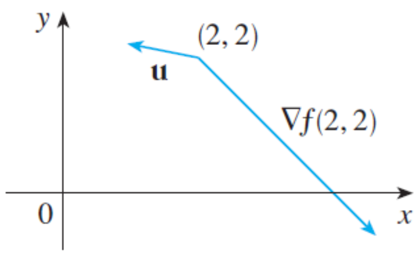
13. Намерете градиента на фунцкията f. Намерете градиента в точката P. Намерете скоростта на изменение на функцията f в точката P по посока на вектора $\mathbf{u}$.

    (а) $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$, $\quad P(-6, 4)$, $\quad \mathbf{u} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}\right)$;

    (б) $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$, $\quad P(2, -1, 1)$, $\quad \mathbf{u} = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T$;

    (в) $f(x, y) = y^2 e^{xyz}$, $\quad P(0, 1, -1)$, $\quad \mathbf{u} = \left(\frac{3}{14}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)^T$;

14. Използвайте фигурата, за да определите геометрично на графиката $\frac{df}{d\mathbf{u}}(2, 2)$



1.3.2 Основни задачи

1. Дадена е функцията

$$f(x) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \text{ или } y \geq x^4 \\ 1, & 0 \leq y \leq x^4. \end{cases}$$

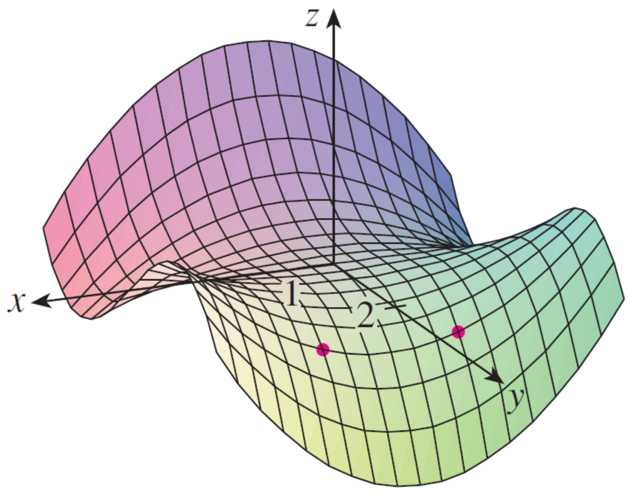
    (а) Покажете, че $f(x, y) \to 0$ при $(x, y) \to (0, 0)$, където (x, y) принадлежи на всяка права от вида $y = mx^a$, за $a < 4$.

    (б) Покажете, че въпреки подточка (а) функцията е прекъсната в точката $(0, 0)$.

(в) Намерете две криви съдържащи $(0,0)$, за които функцията е прекъсната.

2. Функцията $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$ има сингулярност в $(0,0)$. Отстранима ли е тази сингулярност? Ако да – посочете как.

3. Определете знаците на частните производни на f в съответните точки, ако графиката ѝ е



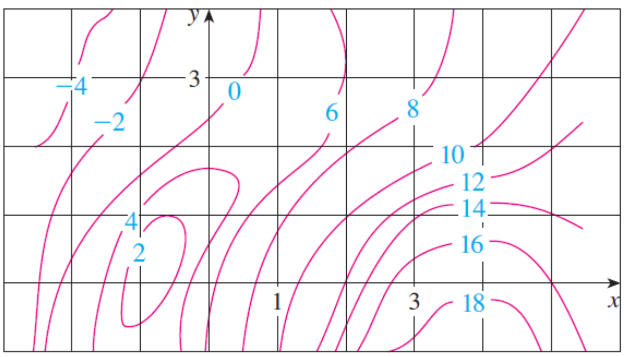
(а) $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$;

(б) $f_x(-1,2)$, $f_y(1,2)$;

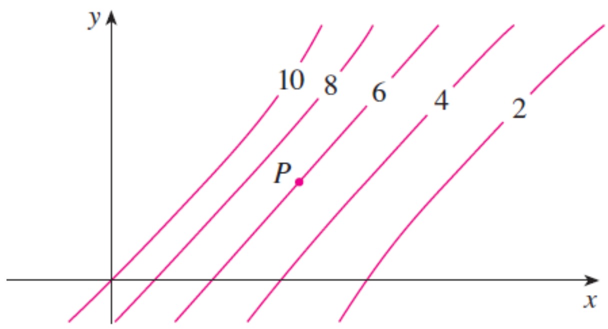
(в) $f_{xx}(-1,2)$, $f_{yy}(-1,2)$;

(г) $f_{xy}(1,2)$, $f_{xy}(-1,2)$;

4. На чертежа са дадени линиите на ниво на функцията f. Използвайте ги, за да определите $f_x(2,1)$ и $f_y(2,1)$



5. На чертежа са дадени линиите на ниво на функцията f. Определете знаците на частните производни f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}.



6. Ако $u = x^4y + y^2z^3$, където $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ и $z = r^2 s\sin t$, намерете стойността на $\frac{\partial u}{\partial s}$ за $r = 2$, $s = 1$ и $t = 0$.

7. Ако $z = f(x, y)$ има непрекъснати частни производни от втори ред и $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, то намерете $\frac{\partial z}{\partial r}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

8. Продукцията на пшеница W през дадена година зависи от средната температура T и годишното количество валежи R. Учени са установили, че T се повишава със скорост 15°/година, а количеството валежи намалява със скорост 0.1cm/година. Освен това е за настоящата продукция е в сила $\frac{\partial W}{\partial T} = -2$, $\frac{\partial W}{\partial R} = 8$.

   (а) Какво е значението на знака на двете частни производни?

   (б) Намерете скоростта на изменение на W в момента.

9. Всички функции в условието на задачата са диференцируеми.

   (а) Ако $z = f(x, y), x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, покажете че

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2;$$

   (б) Ако $u = f(x, y)$, $x = e^s\cos t$, $y = e^s\sin t$, покажете че

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right];$$

10. Докажете, че ∇f е ортогонален на линиите на ниво/повърхнината на ниво в точка за функция на 2/3 променливи.

11. Като използвате доказаното в предходната задача, намерете нормален вектор към равнината

$$ax + by + cz + d = 0.$$

12. Температурата T във всяка точка в метална топка е обратно пропорционална на разстоянието на точката от центъра на топката, който ще считаме за начало на координатната система. Температурата в точката с координати (1,2,2) е 120°.

(а) Намерете скоростта на изменение на T в точката (1,2,2) по посока на точката (2,1,3);

(б) Покажете, че във всяка точка посоката на най-бързо нарастване сочи към центъра на топката.

13. Нека f е функция на две променливи, която има непрекъснати частни производни и са дадени точките $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$, $D(6,15)$. Ако производната по посока на векторите **AB** и **AC**, взети в точката A, са съответно равни на 3 и 26, то намерете производната по посока на вектора **AD** в точката A.

14. Докажете следните свойства на оператора ∇ :

- $\nabla(au+bv) = a\nabla u + b\nabla v$;
- $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$;
- $\nabla(\frac{u}{v}) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$;
- $\nabla u^n = nu^{n-1}\nabla u$.

15. Втората производна по посока на единичния вектор $\mathbf{u}$ се задава с $\frac{d}{d\mathbf{u}}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right) = \frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2}$. Покажете, че

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2} = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2,$$

където $\mathbf{u} = (a,b)^T$. Намерете втората производна на $f(x,y) = xe^{2y}$ по посока на $\mathbf{v} = (4,6)^T$.

16. Биолози са открили, че ако акула засече наличието на кръв във водата, то тя ще се движи по посока на най-бързо нарастване на количеството кръв. Експериментално е установено, че концентрацията на кръв се приближава с функцията

$$c(x,y) = e^{-(x^2+2y^2)/10^4},$$

където x, y се измерват в метри в правоъгълна координатна система, за която източника на кръв е в центъра ѝ.

(а) Определете линиите на ниво на функцията c и скицирайте няколко от тях заедно с примерен път на акулата до източника;

(б) Нека акула се намира в точката (x_0, y_0), когато засича наличието на кръв. Намерете уравенението, което описва пътя на акулата.