

5. Линејни филтри за обработка на полутонтови изображения. Представяне в обектното и в честотното пространство. Диференциални филтри. Нелинейни филтри [9,4,24,25].

(Виж страници 28 – 37 ПР_част1)

При бинаризацията имаме изолация само на част от шума. Изолираме само този с малък интензитет и остава проблема за шума с висок интензитет.

Вместо истинска хистограма – интегрираме.

$$\tilde{f}(l) = \frac{1}{m} \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} f(l+i) - \text{плаваща средна стойност.}$$

Ако $m = \max$ имаме права, ако $m=1$ – фигурата в дясно. А ако m е някаква средна стойност има изглаждане.

Нека сега дефинираме така наречената преходна

функция вместо - $\tilde{f}(l) = \frac{1}{m} \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} f(l+i) \cdot 1$

заместваме 1 с $k(i)$ - $\tilde{f}(l) = \frac{1}{m} \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} f(l+i) \cdot k(i)$.

Интегриращи филтри с дадена преходна функция

Нека $k(i) \geq 0$ m – дефиниционната област на филтъра – k .

Ако $f=1 \Rightarrow \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} k(i) = s$, за нормализиране - $\sum \frac{k(i)}{s} = 1$

Ако $s > 1$ наричаме s коефициент на усилване, а ако $s < 1$ коефициент на отслабване.

За да може да дефинираме интегриращи филтри трябва - $k(i) \geq 0$ и $\sum k(i) = 1$.

Ако $s = 0$ тогава получаваме нещо като производна или – диференциращ филтър.

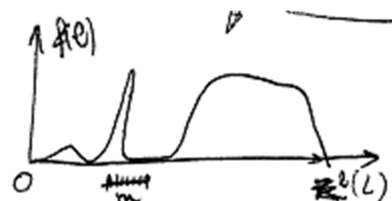
При $\sum k(i) > 1 \rightarrow$ интегриращ филтър + коеф. на усилване s .

$\sum k(i) = 1$ – интегриращ филтър

$\sum k(i) = 0$ – диференциращ филтър

$0 < \sum k(i) < 1$ – интегриращ филтър с коефициент на отслабване s

$\sum k(i) = -1$ – интегриращ филтър с инверсия.



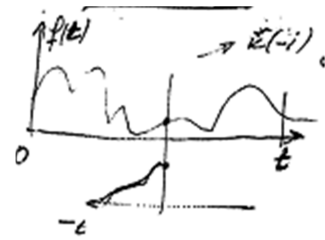
Сега нека преминем от сумиране към интегриране.

$S=0$ в този смисъл означава $|\int k(l)dl| < \epsilon$, можем да определим, че при $s \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ са диференциращи филтри а останалите са интегриращи.

Нека дефиниме $\tilde{k}(i) = k(-i)$ или така нареченото обръщане на оста на времето, защото сумирането в бъдещето е неизвестно. Специалистите по signal processing разглеждат именно конволюцията на f и k във времето.

$$\tilde{f}(l) = \frac{1}{m} \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} f(l+i) \cdot \tilde{k}(-i)$$

$$(f \otimes k)(t) = \int f(l-\tau) \cdot k(\tau) \cdot d\tau = \int f(t+\tau) \cdot k(-\tau) \cdot d\tau \\ = (k \otimes f)(t)$$



Операцията конволюция е комутативна.

Дефинираме $k(-\tau) = \tilde{k}(\tau)$, $f(-\tau) = \tilde{f}(\tau)$.

Изчислителната сложност на конволюцията е $L \cdot m \sim L^2$ – едномерната конволюция е с квадратна сложност, а 2D – L^4 :

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} \sum_{j=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} f(x+i, y+j) \cdot g(-i, -j) = (f \otimes g)(x, y) \text{ или} \\ \tilde{f}(x, y) = \frac{1}{\iint \frac{1}{didi}} \iint f(x+i, y+j) \cdot g(-i, -j) didi = (f \otimes g)(x, y),$$

където f и g имат еднакви дефиниционни области.

Ако $g = k(x, y)$ и $f(x, y)$ входен експеримент – то можем да кажем, че имаме линеен филтър с ф-я $k(x, y)$, $x, y \in D_k \subset D_f$. К още се нарича ядро на филтъра.

Ако имаме филтър филтриращ филтъра (една картинка искаме да я филтрираме с друга картинка) – $O(\Phi(x, y) \in D) = N^4$.

Конволюцията във Фурие трансформации, минавайки в честотното пространство:

$$\Phi(f \otimes g) = \bar{\Phi}(f) \bar{\Phi}(g)$$

$$f \otimes g = \Phi^{-1}(\Phi(f \otimes g)) = \Phi^{-1}(\Phi(f) \Phi(g)) \sim O = N^2 \log_2 N(2D) \text{ и } O = N \log_2 N(1D)$$

Както вече казахме филтрирането се свързва най-вече с премахването на шум от изображението.

- 1) Изглаждане в 1D и 2D с цел подтискане на шума. (Идеята е да бъде смъкнат под някаква граница за да може да бъде игнориран след това)

Осредняващ филтър с плаваща средна стойност.

Апертура – 1D – 1x3 и 2D – 3x3

$$\Phi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline k1 & k2 & k1 \\ \hline k2 & k0 & k2 \\ \hline k1 & k2 & k1 \\ \hline \end{array} \quad \int \Phi(l) dl \approx \sum_{l \in D(3x3)} \Phi(l) = k_0 + 4 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 = 1$$

- 2) Гаусов филтър - служи за изглаждане

$$1D - g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$

$$2D - g(x, y) = g(x) \cdot g(y)$$

- 3) Диференциращи филтри

Могат да се използват за оконтуряване, където контур е границата на компактно множество. Контур C е свързан с понятието градиент – grad или граница на едно множество D : $\text{Lim}(D) = \text{grad}(f(x, y))$. Контур най-общо е мястото където f има максимално изменение:

$$\text{grad}(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Градиента в 2D се характеризира с модул и посока, а в 1D е скалар.

Можем да векторизираме контура като задаваме върху изображението крива с параметър s - $x = x(s)$, $y = y(s)$ и щом имаме контур - $g(x, y) = 0$.

- Филтър на Собел

Идеята при него е да получим оценка за хоризонталното изменение или вертикалното изменение на функцията на изображението.

$$\vec{F}_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta \vec{x}$$

$$\vec{F}_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta \vec{y}$$

Тъй като работим с пиксели $|\Delta \vec{x}| = |\Delta \vec{y}| = 1$.

При Собел имаме $|F(x, y)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ и съответните апертури:

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_x(f) = f \otimes \Phi_x = |F_x|$$

$$\Phi_y(f) = f \otimes \Phi_y = |F_y|$$

Конволюцията е линейна операция и интегрирането също, но корена не е. Затова $Sobel(f) = \sqrt{f \otimes g}$ не е линеен.

- Филтър на Робертс

Апертури – 2x2 намиране граница по диагонали ляв-десен наклон.

$$\text{Десен} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и ляв} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{После} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

- Филтър на Лаплас

$$L(f) = \nabla^2 f = \Delta f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y)$$

$$\text{Апертури: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

След Лаплас трябва CrossZero, но пък е линеен.

Собел е по-устойчив на шум, докато Лаплас и най-малкия шум оказва влияние.

- Медианен филтър

Имаме сортиране в квадрат и избор на средното – Премахва шумове без да размазва ръбовете.

Медианния филтър не може да се реализира в честотното пространство.

Фурие преобразуване

$$\Phi(f)_w = F(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

$$\Phi^{-1}(f) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{j\omega t} dw$$

Свойства:

1) $\Phi, \Phi^{-1} = I$

2) Преобразованието на Фурие е линейно

$$\Phi(\alpha f + \beta g) = \alpha \Phi(f) + \beta \Phi(g)$$

Фурие може да се разглежда още като:

$$\int f(t) \cdot \cos \omega t \cdot dt + j \int f(t) \cdot \sin \omega t \cdot dt$$

Като лявата част за краткост се бележи – CoFT, а дясната – SiFT.

3) FFT

Ако $f(t) = f(-t)$ – четна функция $\Rightarrow$ SiFT = 0.

Има такава функция от експеримент. Правим я симетрична тогава:

$$CoFT = 2\Phi(\tilde{f}), \text{ а } \tilde{f} = \begin{cases} f(t), t > 0 \\ f(-t), t < 0 \end{cases}$$

Което всъщност е формулата за бързо преобразуване на Фурие.

Дискретно преобразуване на Фурие

$$\Delta t = 1, t = i\Delta t - i$$

$$F(k) = 1 \cdot \sum_{i=0}^N f(i) e^{-j\Omega k i}$$

Където $\omega = k\Delta\omega$, а $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \Omega$, N – броя на интервалите, на които сме дискретизирали ф-ята.

$$f(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j\Omega k i}$$

Това е FFT – сложност N^2 .

Свойства:

1) Компресия

2) Бързи изчисления

Компресиране спектъра на сигнала в ограничен спектър, докато сигнала може да е с голяма ширина.

За 2D:

- Интеграл

$$F(w_x, w_y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(w_x \cdot x + w_y \cdot y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} F(w_x, w_y) e^{j(w_x \cdot x + w_y \cdot y)} dw_x dw_y$$

- Дискретен

$$F(k, m) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} f(i, l) e^{-j(\frac{2\pi}{N}ik + \frac{2\pi}{M}ln)}$$

$$f(i, k) = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{M-1} F(k, m) e^{j(\frac{2\pi}{N}ik + \frac{2\pi}{M}ln)}$$

Имаме сложност $\sim N^4$.

3) FFT – бързо повишава производителостта

Филтри в честотното пространство

$$\Phi(f(t)) = f \otimes \Phi_t = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau$$

Не знаем напред какво става и затова можем да конволюираме само в обратна посока.

В дискретния вариант имаме:

$$\Phi(f(t)) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(\tau) \Phi(t - \tau) \Delta\tau (= 1)$$

Сложността е $O(N^2)$.

Умножаваме два спектъра и получаваме или ниско честотен или високо честотен филтър.

$$F(f \otimes \Phi) = F(f) \cdot F(\Phi)$$

$$\Phi(f) = f \otimes \Phi = F^{-1}(F(f) \cdot F(\Phi))$$

$$F(\Phi) = O(M^2)$$

$$F(f) = O(N^2)$$

FFT в честотното пространство има сложност – $O(N \cdot \log_2 N)$

То се използва за бързи изчисления навсякъде където има конволюция.