

Домашна работа No 2

Задача 1. Разглеждаме числения метод с тегло θ

$$y_{j+1} = y_j + h\theta f_{j+1} + h(1 - \theta)f_j.$$

- Кои методи се получават при $\theta = 0$ и $\theta = 1$?
- Как даденият метод може да бъде изведен от явния и неявния метод на Ойлер?
- За кои стойности на θ методът е неявен?
- Изведете условие за А-устойчивост за произволно θ .
- За кои стойности на θ методът е А-устойчив (за всяко $h > 0$)?
- За кои стойности на θ методът е монотонен (за всяко $h > 0$)?
- Покажете, че за всяко θ ЛГА е $O(h)$.
- Съществува ли стойност на θ , за която ЛГА е $O(h^2)$?

Задача 2. Разглеждаме уравнението

$$u'(t) = -300t^2y^3, \quad 0 \leq t \leq 3$$

с начално условие $u(0) = 1$.

- Покажете, че точното решение на горната задача на Коши е

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{200t^3 + 1}}.$$

- Приложете метода с адаптивен избор на стъпката RK23, разглеждан на упражнения с толеранс 0.0001.
- Намерете допуснатата грешка във всяка точка и сравнете с толеранса.

- Покажете как се е изменяла стъпката при решаването на задачата. Къде стъпката е малка? Защо?
- Каква равномерна стъпка очаквате да е необходима за метод на Рунге-Кута от трети ред, за да бъде постигната същата точност?
- Приложете метод на Рунге-Кута от трети ред с равномерна мрежа, така че да получите същата точност. Сравнете времената за изпълнение на програмата при равномерна и адаптивна стъпка, като използвате вградената функция TimeUsed
- Направете същото, като в предишната подточка, за явния и неявния метод на Ойлер и за методи на Рунге-Кута от четвърти и пети ред (за съответните таблици на Butcher вижте книгата на Butcher, качена в Moodle).
- Потърсете информация в интернет за метода на Runge-Kutta-Fehlberg (RK45), който е най-често използваният на практика метод с адаптивен избор на стъпката. Решете задачата, като го използвате. Сравнете времето за изпълнение на програмат с това при RK23.