

ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА (уводен курс)
Изпитни задачи, февруари 2017 г.

Задача 1. Забележете, че имаме две фонетично близки понятия, които трябва добре да различаваме: *транзитивно множество* и *транзитивна релация*. По-точно, нека за всяко множество $A \in \mathcal{A}$ означаваме бинарната релация $\{z \mid z \in A \times A \ \& \ \exists x \exists y (z = \langle x, y \rangle \ \& \ x \in y)\}$; трябва да правим разлика между A е транзитивно множество и $\in_A$ е транзитивна релация.

а) Дайте пример за множество A , което не е транзитивно, но $\in_A$ е транзитивна релация.

б) Нека A е транзитивно множество. Да се докаже, че $\in_A$ е транзитивна релация точно тогава, когато всеки елемент на A е транзитивно множество.

Задача 2. Нека $\Lambda \neq \emptyset$ и $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ -индексирана фамилия от множества.

а) Нека f е биекция на Λ върху Λ и Λ -индексираната фамилия от множества $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е дефинирана така: $B_\lambda = A_{f(\lambda)}$ за всяко $\lambda \in \Lambda$. Да се докаже, че

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \quad \text{и} \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

(Комутативен закон за безкрайните обединения и безкрайните сечения)

б) Нека $I \neq \emptyset$ и $g : I \rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$ е такава, че $\bigcup \text{Range}(g) = \Lambda$. Да се докаже, че

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\mu \in g(i)} A_\mu \quad \text{и} \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{\mu \in g(i)} A_\mu.$$

(Асоциативен закон за безкрайните обединения и безкрайните сечения)

Задача 3. Нека A е произволно непразно множество. Да означим със $\text{Seq}(A)$ множеството на *крайните редици от елементи на A* , т.е.

$$\forall x (x \in \text{Seq}(A) \iff \exists n (n \in \omega \ \& \ x : n \rightarrow A)).$$

Нека $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$ е строго линейно наредено множество. В множеството $\text{Seq}(A)$ на крайните редици от елементи на A дефинираме бинарната релация $\preceq$ така: ако $x, y \in \text{Seq}(A)$, $\text{Dom}(x) = n$ и $\text{Dom}(y) = k$, то

$$\langle x, y \rangle \in \preceq \iff (y \subseteq x) \vee \exists \ell (\ell \in n \cap k \ \& \ x(\ell) < y(\ell) \ \& \ (\forall i \in \ell) (x(i) = y(i))).$$

Да се докаже, че:

- 1) $\langle \text{Seq}(A), \preceq \rangle$ е линейно наредено множество, в което има най-голям елемент;
- 2) $\langle \text{Seq}(A), \preceq \rangle$ не е добре наредено множество;
- 3) ако $A = \omega$ и $<$ е обичайната наредба в ω , то $\langle \text{Seq}(\omega), \preceq \rangle$ е гъсто наредено, т.е. $(\forall x \in \text{Seq}(\omega)) (\forall y \in \text{Seq}(\omega)) (x \prec y \Rightarrow (\exists z \in \text{Seq}(\omega)) (x \prec z \ \& \ z \prec y))$.

Задача 4. $[(ZF)]$ Да се докаже, че за произволно множество A са в сила следните:

- 1) $A \sim A \cup \{A\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$;

2) $A \sim A \cup \{A\} \Rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Упътване. За 2) използвайте 1), $X^2 \sim \mathcal{P}(X)$ и $B \cap C = \emptyset \Rightarrow {}^{B \cup C}X \sim {}^B X \times {}^C X$.

Задача 5. [(ZFC)] Нека $\Lambda \neq \emptyset$. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ са две Λ -индексирани фамилии от множества, такива че $(\forall \lambda \in \Lambda)(A_\lambda \sim B_\lambda)$. Да се докаже, че
а) ако $(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall \mu \in \Lambda)(\lambda \neq \mu \Rightarrow A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset \ \& \ B_\lambda \cap B_\mu = \emptyset)$, то

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda;$$

$$\text{б) } \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda.$$

Задача 6. [(ZFC)] Нека $\mathcal{A} = \langle A, R \rangle$ е частично наредено множество. Да се докаже, че съществува такава бинарна релация S , че $R \subseteq S$ и $\langle A, S \rangle$ е линейно наредено множество.

Задача 7. В (ZF) да се докаже, че (AC) е еквивалентна с

Всеки път, когато $\Lambda \neq \emptyset$ и $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е индексирана фамилия от множества, съществува индексирана фамилия от множества $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ със свойствата:

- (1) $(\forall \lambda \in \Lambda)(B_\lambda \subseteq A_\lambda)$,
- (2) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$,
- (3) $(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall \mu \in \Lambda)(\lambda \neq \mu \Rightarrow B_\lambda \cap B_\mu = \emptyset)$.

Задача 8. Нека $f, g_1, g_2, \dots, g_k \in {}^\omega \mathbb{Q}$. Казваме, че f е сума на $g_1, g_2, \dots, g_k$, ако за всяко естествено число n е в сила равенството

$$f(n) = g_1(n) + g_2(n) + \dots + g_k(n).$$

а) Докажете, че за всяка $f \in {}^\omega \mathbb{Q}$ съществуват три биекции $g_1, g_2, g_3 \in {}^\omega \mathbb{Q}$, такива че f е сума на g_1, g_2, g_3 .

б) Дайте пример за $f \in {}^\omega \mathbb{Q}$, която не е сума на две биекции $g_1, g_2 \in {}^\omega \mathbb{Q}$.

Задача 9. [(ZFC)] Нека $\mathcal{A} = \langle A, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество. За едно множество B , $B \subseteq A$, казваме, че е *кофинално* с $\mathcal{A}$, ако $(\forall x \in A)(\exists y \in B)(x \preceq y)$.

Да се докаже, че за всяко линейно наредено множество $\mathcal{A} = \langle A, \preceq \rangle$ съществува кофинално с $\mathcal{A}$ множество B , за което $\langle B, \preceq \rangle$ е добре наредено. (Използвайте подходяща форма на аксиомата за избора.)

Задача 10. [(ZF)] Да се докаже, че аксиомата за избора е еквивалентна с

За всяка преднаредба R има максимална относно $\subseteq$ R -антиверига.

(*Преднаредба* се нарича бинарна релация, която е рефлексивна и транзитивна. R -*антиверига* е подмножество X на полето на преднаредбата R , удовлетворяващо $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow x = y)$.)

Задача 11. Нека $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ са линейно наредени множества. Докажете, че ако $\langle A, \leq_A \rangle$ е изоморфно с начален отрез на $\langle B, \leq_B \rangle$, а $\langle B, \leq_B \rangle$ е изоморфно с финален отрез на $\langle A, \leq_A \rangle$, то $\langle A, \leq_A \rangle$ и $\langle B, \leq_B \rangle$ са изоморфни.

(Начален отрез на $\langle B, \leq_B \rangle$ е подмножество B_1 на B с индуцираната наредба, удовлетворяващо $(\forall x \in B_1) \forall y (y \leq_B x \Rightarrow y \in B_1)$. Финален отрез на $\langle A, \leq_A \rangle$ е подмножество A_1 на A с индуцираната наредба, удовлетворяващо $(\forall x \in A_1) \forall y (x \leq_A y \Rightarrow y \in A_1)$.)

Задача 12. Нека $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$. За едно подмножество B на A казваме, че е затворено относно f , ако

$$(\forall x \in B)(\forall y \in B)(f(x, y) \in B).$$

(1) Докажете, че ако $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, то за всяко подмножество B на A има най-малко относно теоретико множественото включване множество B_f , което е затворено относно f и $B \subseteq B_f$.

(2) Докажете, че за всяко $B, C \subseteq \mathcal{P}(A)$, са в сила равенствата $B \cup C = B \cup C$, $B \cap C = B \cap C$ и $B \cap C = B \cap C$:

Задача 13. Нека $\{A_n\}_{n \in \omega}$ е индексирана фамилия от множества. Дефинираме

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k} \quad \text{и} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k}$$

Да се докаже, че са изпълнени следните включвания

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Дайте пример за индексирана фамилия $\{A_n\}_{n \in \omega}$, за която горните три включвания са строги.

Задача 14. Разглеждаме редици (ω -редици) от цели положителни числа. Нека $\{a_n\}_{n < \omega}$ и $\{b_n\}_{n < \omega}$ са две редици. Ще казваме, че редицата $\{b_n\}_{n < \omega}$ е по-бърза от редицата $\{a_n\}_{n < \omega}$, ако $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

а) Докажете, че за всяка редица съществува по-бърза от нея редица.

б) Нека H е множество от редици, удовлетворяващи условието: за всяка редица u съществува редица v от H , която е по-бърза от u . Докажете, че H е неизброимо множество.

Задача 15. [(ZFC)] Да се докаже, че едно множество A е крайно точно тогава, когато всяко непразно подмножество на $\mathcal{P}(A)$ има максимален относно $\subseteq$ елемент.

Оценката е $\min\{6, \max\{2, n-1\}\}$, където n е броят на вярно решените и защитени задачи.