

Теория на множествата

Изборен курс, зимен семестър 2017-2018 год.

Част 2

3 дефиниции към зад. 14 и зад. 15: Нека A е множество. Ще казваме, че:

- една функция $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е монотонна, ако:

$$(\forall x \in \mathcal{P}(A))(\forall y \in \mathcal{P}(A))[x \subseteq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)];$$

- една функция $\pi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е c -монотонна, ако:

$$(\forall x_1 \in \mathcal{P}(A))(\forall y_1 \in \mathcal{P}(A))(\forall x_2 \in \mathcal{P}(A))(\forall y_2 \in \mathcal{P}(A)) \\ [x_1 \subseteq x_2 \ \& \ y_1 \subseteq y_2 \Rightarrow \pi(x_1, y_1) \subseteq \pi(x_2, y_2)];$$

- една функция $\pi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е *монотонна по части*, ако за всяко $x \in \mathcal{P}(A)$ функцията $y \mapsto \pi(x, y)$ е монотонна и, симетрично, за всяко $y \in \mathcal{P}(A)$ функцията $x \mapsto \pi(x, y)$ е монотонна;

Задача 14. Докажете, че една функция $\pi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е c -монотонна точно тогава, когато е монотонна по части;

Задача 15. Нека $\pi : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е c -монотонна функция. Тогава за всяко $y \in \mathcal{P}(A)$ функцията $x \mapsto \pi(x, y)$ има най-малка неподвижна точка $\rho(y)$ (защо?). Докажете, че функцията $\rho : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ е монотонна.

Задача 16. Докажете, че за всеки ординал α е в сила равенството

$$V(\alpha) = \bigcup \{\mathcal{P}(V(\beta)) \mid \beta < \alpha\}.$$

Задача 17. Докажете, че за произволно множество A е в сила равенството

$$\text{TC}(A) = A \cup \bigcup \{\text{TC}(a) \mid a \in A\}.$$

Задача 18. Да се изразят чрез $\text{rk}(x)$: $\text{rk}(\{x\})$, $\text{rk}(\bigcup x)$, $\text{rk}(\mathcal{P}(x))$ и $\text{rk}(\text{TC}(x))$. Да се изразят чрез $\text{rk}(A)$ и $\text{rk}(B)$: $\text{rk}(f)$, където $f : A \twoheadrightarrow B$, и $\text{rk}(^A B)$.

Задача 19. Докажете, че:

а) $\text{rk}(x) = \mu\alpha[x \subseteq V(\alpha)];$

$$\text{б) } \text{rk}(x) = \bigcup \{S(\text{rk}(y)) \mid y \in x\};$$

$$\text{в) } \text{rk}(x) = \{\text{rk}(y) \mid y \in \text{TC}(x)\}.$$

Задача 20. (АС) Нека $\langle A, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество, което няма най-голям елемент. За едно множество X , $X \subseteq A$, се казва, че е *кофинално* с A , ако $(\forall a \in A)(\exists x \in X)(a \preceq x)$.

Докажете, че съществува B , $B \subseteq A$, което е кофинално с A и $\langle B, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

Идея. Фиксирайте една сюрекция на подходящ ординал α върху A . Използвайте теоремата за дефиниране по рекурсия.

Задача 21. Нека A е множество от положителни реални числа. Докажете, че ако съществува реално число, което мажорира сумата на произволен краен брой елементи на A , то множеството A е най-много изброимо.

Задача 22. Нека X е множество от естествени числа. Докажете, че има автоморфизъм в $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ с неподвижни точки точно числата от X .

Задача 23. Нека $g : \omega \longrightarrow \mathbb{Q}$. Докажете, че съществуват три биекции f_1 , f_2 и f_3 на ω върху $\mathbb{Q}$, такива че за всяко естествено число n е в сила равенството

$$g(n) = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n).$$

Вярно ли е, че винаги две биекции са достатъчни?