

Теория на множествата

Изборен курс, зимен семестър 2017-2018 год.

Част 1

Задача 1. Докажете, че $\overline{\overline{A(BC)}} = \overline{\overline{A \times B}C}$. (Тази задача е свързана с т.нар. *currying* в компютърната наука.)

Задача 2. Нека $f : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ е монотонна функция и I е нейната най-малка неподвижна точка. Докажете, че:

1. ако $I \subseteq A \subseteq B$ и $f_A : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ е дефинирана с $f_A(X) = A \cap f(X)$ за всяко $X \subseteq A$, то I е най-малката неподвижна точка и на f_A ;
2. ако $B \subseteq C$ и $f^C : \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ е дефинирана с $f^C(X) = f(X \cap C)$ за всяко $X \subseteq C$, то I е най-малката неподвижна точка и на f^C .

Задача 3. Докажете, че:

- а) $\neg \exists B \forall a \exists b (b \in B \ \& \ \bar{a} = \bar{b})$;
- б) $\forall a (a \neq \emptyset \implies \neg \exists B \forall x (x \in B \iff \bar{a} = \bar{x}))$.

Задача 4. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. Нека $\prec$ е релацията над $\mathcal{P}(A)$, определена чрез:

$$X \prec Y \iff X \neq Y \ \& \ \min_{\leq}((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \in X.$$

Докажете, че $\prec$ е строга линейна наредба в $\mathcal{P}(A)$.

Коментар. 1. Двуместната операция, дефинирана с $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, обикновено се нарича симетрична разлика на X и Y и се означава с $X \Delta Y$. За всяко множество A алгебричната структура $\langle \mathcal{P}(A), \emptyset, A, \Delta, \cap \rangle$ е комутативен пръстен с единица (сбيرانето е симетричната разлика, а умножението — сечението).

2. В (ZF) твърдението

$$\forall A (\exists R („\langle A, R \rangle \text{ е днмн} ”) \implies \exists S („\langle \mathcal{P}(A), S \rangle \text{ е днмн} ”))$$

е еквивалентно с (AC).

Задача 5. Нека $\Lambda \neq \emptyset$ и $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е частично наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ -индексирана фамилия от частично наредени множества като $\mathcal{A}_\lambda = \langle A_\lambda, \leq_\lambda \rangle$. Дефинираме множеството A и бинарната релация $\leq$ в

него така: $A = \bigcup \{z \mid (\exists \lambda \in \Lambda)(\exists x \in A_\lambda)(z = \langle x, \lambda \rangle)\}$ (към кое множество е приложена схемата за отделяне?),

$$\langle x, \lambda \rangle \leq \langle y, \mu \rangle \iff \lambda \prec \mu \vee (\lambda = \mu \& x \leq_\lambda y),$$

където $\langle x, \lambda \rangle$ и $\langle y, \mu \rangle$ са произволни елементи на A . Докажете, че

1. $\langle A, \leq \rangle$ частично наредено множество;
2. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е линейно наредено и за всяко λ от Λ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е линейно наредено, то и $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено;
3. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е добре наредено и за всяко λ от Λ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е добре наредено, то и $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено.

Дефинираното по-горе частично наредено множество се нарича

$\langle \Lambda, \preceq \rangle$ -сума на фамилията $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и се означава така: $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda}^{\langle \Lambda, \preceq \rangle} \mathcal{A}_\lambda$. Когато няма опасност от недоразумения относно иманата предвид наредба в Λ , горният индекс просто се изпуска — $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Задача 6. Нека $\Lambda \neq \emptyset$ и $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ -индексирана фамилия от линейно наредени множества като $\mathcal{A}_\lambda = \langle A_\lambda, \leq_\lambda \rangle$. В декартовото произведение $A = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ дефинираме бинарната релация $\leq$ така:

$$f \leq g \iff (f = g) \vee (\exists \lambda \in \Lambda)(f(\lambda) \prec g(\lambda) \& \forall \mu(\mu \prec \lambda \implies f(\mu) = g(\mu))),$$

където f и g са произволни елементи на A . Докажете, че

1. $\langle A, \leq \rangle$ частично наредено множество;
2. $\langle A, \leq \rangle$ може и да не е линейно наредено;
3. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е добре наредено, то $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено;
4. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е добре наредено и за всяко λ от Λ линейно нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е добре наредено, то може $\langle A, \leq \rangle$ да не е добре наредено.

Дефинираното по-горе частично наредено множество се нарича $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ -лексикографска наредба на декартовото произведение на фамилията $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и се означава така: $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda}^{\langle \Lambda, \preceq \rangle} \mathcal{A}_\lambda$. Когато няма опасност от недоразумения относно иманата предвид наредба в Λ , горният индекс просто се изпуска — $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Задача 7. (Използвайки (АС).) Нека $\Lambda \neq \emptyset$ и $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е частично наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ са Λ -индексирани фамилии от частично наредени множества. Нека освен това за всяко $\lambda \in \Lambda$ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\mathcal{B}_\lambda$. Докажете, че

1. $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$;
2. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество и за всяко $\lambda \in \Lambda$ множеството $\mathcal{B}_\lambda$ е линейно наредено, то $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}_\lambda$;

Задача 8. Нека $\mathcal{W}_1 = \langle W_1, \leq_1 \rangle$ и $\mathcal{W}_2 = \langle W_2, \leq_2 \rangle$ са добре наредени множества. Нека $f \subseteq W_1 \times W_2$ е релацията:

$$f = \{ \langle a, b \rangle \mid \langle \text{seg}_{W_1}(a), \leq_1^a \rangle \cong \langle \text{seg}_{W_2}(b), \leq_2^b \rangle \},$$

където за $i = 1, 2$, ако $x \in W_i$, то $\leq_i^x = \leq_i \upharpoonright (\text{seg}_{W_i}(x) \times \text{seg}_{W_i}(x))$ е поредената в $\text{seg}_{W_i}(x)$ наредба от $\leq_i$. Докажете, че:

1. f е инективна функция;
2. за произволни $a, a' \in W_1$ е в сила $a <_1 a' \implies f(a) <_2 f(a')$;
3. $W_1 = \text{Dom}(f)$ или $W_2 = \text{Rng}(f)$;
4. в сила е точно едно от трите:
 - $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ са изоморфни;
 - $\mathcal{W}_1$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_2$;
 - $\mathcal{W}_2$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_1$.

Задача 9. Нека A и B са множества. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$, ако съществува инекция $f : A \rightarrow B$. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}}$, ако съществува сюрекция $f : B \rightarrow A$. Докажете, че:

1. (без **АС**) за произволни множества $A \neq \emptyset$ и B е в сила

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}};$$

2. (без **АС**) за произволни множества A и B , ако A е добре наредимо, то

$$\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}};$$

3. (Исползвайки **АС**) за произволни множества A и B е в сила

$$\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}.$$

Задача 10. Нека A е произволно множество от ординали. Докажете, че:

- ако A е непразно, то $\bigcap A$ е най-малкият елемент на A ;
- $\bigcup \{S(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е най-малкият ординал, който е по-голям от всеки елемент на A .

Задача 11. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. В $A \times A$ дефинираме бинарната релация $\preceq$ така:

$$\begin{aligned} \langle a_1, b_1 \rangle \preceq \langle a_2, b_2 \rangle &\iff (\max_{\leq} \{a_1, b_1\} < \max_{\leq} \{a_2, b_2\}) \vee \\ &(\max_{\leq} \{a_1, b_1\} = \max_{\leq} \{a_2, b_2\} \ \& \ a_1 < a_2) \vee \\ &(\max_{\leq} \{a_1, b_1\} = \max_{\leq} \{a_2, b_2\} \ \& \ a_1 = a_2 \ \& \ b_1 \leq b_2) \end{aligned}$$

за произволни $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A$.

Докажете, че $\langle A \times A, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

Задача 12. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ -индексирана фамилия от множества. *Изфиняване на фамилията* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ ще наричаме Λ -индексирана фамилия $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, удовлетворяваща следните три условия:

- $(\forall \lambda \in \Lambda)(B_\lambda \subseteq A_\lambda)$;
- $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$;
- $(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall \mu \in \Lambda)(\lambda \neq \mu \implies B_\lambda \cap B_\mu = \emptyset)$.

Докажете, че ако Λ е добре наредимо множество, то всяка Λ -индексирана фамилия от множества има изфиняване.

Задача 13. *Вж. предната задача.* Докажете, че ако за всяко множество Λ всяка Λ -индексирана фамилия от множества има изфиняване, то е в сила аксиомата за избора.