Теория на множествата

Изборен курс, зимен семестър 2017-2018 год.

Част 1

Задача 1. Докажете, че $\overline{\overline{{}^{A}({}^{B}C)}} = \overline{\overline{{}^{A\times B}C}}$. (*Тази задача е свързана с т.нар. currying в компютърната наука.*)

Задача 2. Нека $f : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(B)$ е монотонна функция и I е нейната най-малка неподвижна точка. Докажете, че:

1. ако $I \subseteq A \subseteq B$ и $f_A : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е дефинирана с $f_A(X) = A \cap f(X)$ за всяко $X \subseteq A$, то I е най-малката неподвижна точка и на f_A;

2. ако $B \subseteq C$ и $f^C : \mathcal{P}(C) \to \mathcal{P}(C)$ е дефинирана с $f^C(X) = f(X \cap B)$ за всяко $X \subseteq C$, то I е най-малката неподвижна точка и на f^C.

Задача 3. Докажете, че:

а) $\neg\exists B \forall a \exists b (b \in B \ \& \ \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{b}})$;

б) $\forall a (a \neq \varnothing \implies \neg\exists B \forall x (x \in B \iff \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{x}}))$.

Задача 4. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. Нека $\prec$ е релацията над $\mathcal{P}(A)$, определена чрез:

$$X \prec Y \leftrightharpoons X \neq Y \ \& \ \min_{\leq}((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)) \in X.$$

Докажете, че $\prec$ е строга линейна наредба в $\mathcal{P}(A)$.

Коментар. 1. Двуместната операция, дефинирана с $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$, *обикновено се нарича* симетрична разлика на X и Y *и се означава с* $X \triangle Y$. *За всяко множество* A *алгебричната структура* $\langle \mathcal{P}(A), \varnothing, A, \triangle, \cap \rangle$ *е комутативен пръстен с единица (събирането е симетричната разлика, а умножението — сечението).*

2. В (ZF) твърдението

$$\forall A (\exists R (\text{„}\langle A, R \rangle \text{ е днмн”}) \implies \exists S (\text{„}\langle \mathcal{P}(A), S \rangle \text{ е днмн”}))$$

е еквивалентно с (AC).

Задача 5. Нека $\Lambda \neq \varnothing$ и $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е частично наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ-индексирана фамилия от частично наредени множества като $\mathcal{A}_\lambda = \langle A_\lambda, \leq_\lambda \rangle$. Дефинираме множеството A и бинарната релация $\leq$

в него така: $A = \{z \mid (\exists\lambda \in \Lambda)(\exists x \in A_\lambda)(z = \langle x, \lambda\rangle)\}$ (към кое множество е приложена схемата за отделяне?),

$$\langle x, \lambda\rangle \leq \langle y, \mu\rangle \iff \lambda \prec \mu \vee (\lambda = \mu \,\&\, x \leq_\lambda y),$$

където $\langle x, \lambda\rangle$ и $\langle y, \mu\rangle$ са произволни елементи на A. Докажете, че

1. $\langle A, \leq\rangle$ частично наредено множество;

2. ако $\langle \Lambda, \preceq\rangle$ е линейно наредено и за всяко λ от Λ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е линейно наредено, то и $\langle A, \leq\rangle$ е линейно наредено;

3. ако $\langle \Lambda, \preceq\rangle$ е добре наредено и за всяко λ от Λ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е добре наредено, то и $\langle A, \leq\rangle$ е добре наредено.

Дефинираното по-горе частично наредено множество се нарича $\langle \Lambda, \preceq\rangle$-*сума на фамилията* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и се означава така: $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\langle\Lambda,\preceq\rangle} \mathcal{A}_\lambda$. Когато няма опасност от недоразумения относно иманата предвид наредба в Λ, горният индекс просто се изпуска — $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Задача 6. Нека $\Lambda \neq \varnothing$ и $\langle \Lambda, \preceq\rangle$ е линейно наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ е Λ-индексирана фамилия от линейно наредени множества като $\mathcal{A}_\lambda = \langle A_\lambda, \leq_\lambda\rangle$. В декартовото произведение $A = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ дефинираме бинарната релация $\leq$ така:

$$f \leq g \iff (f = g) \vee (\exists\lambda \in \Lambda)(f(\lambda) \prec g(\lambda) \,\&\, \forall\mu(\mu \prec \lambda \implies f(\mu) = g(\mu)),$$

където f и g са произволни елементи на A. Докажете, че

1. $\langle A, \leq\rangle$ частично наредено множество;

2. $\langle A, \leq\rangle$ може и да не е линейно наредено;

3. ако $\langle \Lambda, \preceq\rangle$ е добре наредено, то $\langle A, \leq\rangle$ е линейно наредено;

4. ако $\langle \Lambda, \preceq\rangle$ е добре наредено и за всяко λ от Λ линейно нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е добре наредено, то може $\langle A, \leq\rangle$ да не е добре наредено.

Дефинираното по-горе частично наредено множество се нарича $\langle \Lambda, \preceq \rangle$-*лексикографска наредба на декартовото произведение на фамилията* $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и се означава така: $\bigotimes\limits_{\lambda\in\Lambda}^{\langle\Lambda,\preceq\rangle} \mathcal{A}_\lambda$. Когато няма опасност от недоразумения относно иманата предвид наредба в Λ, горният индекс просто се изпуска — $\bigotimes\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$.

Задача 7. (Използвайки (**AC**).) Нека $\Lambda \neq \varnothing$ и $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е частично наредено множество. Нека $\{\mathcal{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и $\{\mathcal{B}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ са Λ-индексирани фамилии от частично наредени множества. Нека освен това за всяко $\lambda \in \Lambda$ частично нареденото множество $\mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\mathcal{B}_\lambda$. Докажете, че

1. $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda$;

2. ако $\langle \Lambda, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество и за всяко $\lambda \in \Lambda$ множеството $\mathcal{B}_\lambda$ е линейно наредено, то $\bigotimes\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ е изоморфно вложимо в $\bigotimes\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda$:

Задача 8. Нека $\mathcal{W}_1 = \langle W_1, \leq_1 \rangle$ и $\mathcal{W}_2 = \langle W_2, \leq_2 \rangle$ са добре наредени множества. Нека $f \subseteq W_1 \times W_2$ е релацията:

$$f = \{\langle a, b \rangle \mid \langle seg_{W_1}(a), \leq_1^a \rangle \cong \langle seg_{W_2}(b), \leq_2^b \rangle\},$$

където за $i = 1, 2$, ако $x \in W_i$, то $\leq_i^x = \leq_i \restriction (seg_{W_i}(x) \times seg_{W_i}(x))$ е породената в $seg_{W_i}(x)$ наредба от $\leq_i$. Докажете, че:

1. f е инективна функция;

2. за произволни $a, a' \in W_1$ е в сила $a <_1 a' \implies f(a) <_2 f(a')$;

3. $W_1 = Dom(f)$ или $W_2 = Rng(f)$;

4. в сила е точно едно от трите:

   - $\mathcal{W}_1$ и $\mathcal{W}_2$ са изоморфни;
   - $\mathcal{W}_1$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_2$;
   - $\mathcal{W}_2$ е изоморфно на начален сегмент на $\mathcal{W}_1$.

Задача 9. Нека A и B са множества. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$, ако съществува инекция $f : A \rightarrowtail B$. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}}$, ако съществува сюрекция $f : B \twoheadrightarrow A$. Докажете, че:

1. (без **AC**) за произволни множества $A \neq \emptyset$ и B е в сила
$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}};$$
2. (без **AC**) за произволни множества A и B, ако B е добре наредимо, то
$$\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}};$$
3. (Използвайки **AC**) за произволни множества A и B е в сила
$$\overline{\overline{A}} \leq^* \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}.$$

Задача 10. Нека A е произволно множество от ординали. Докажете, че:

1. ако A е непразно, то $\bigcap A$ е най-малкият елемент на A;
2. $\bigcup\{S(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е най-малкият ординал, който е по-голям от всеки елемент на A.

Задача 11. Нека $\langle A, \leq\rangle$ е добре наредено множество. В $A \times A$ дефинираме бинарната релация $\preceq$ така:

$$\begin{aligned}\langle a_1, b_1\rangle \preceq \langle a_2, b_2\rangle \iff & (\max_{\leq}\{a_1, b_1\} < \max_{\leq}\{a_2, b_2\}) \ \vee \\ & (\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \,\&\, a_1 < a_2) \vee \\ & (\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \,\&\, a_1 = a_2 \,\&\, b_1 \leq b_2)\end{aligned}$$

за произволни $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A$.

Докажете, че $\langle A \times A, \preceq\rangle$ е добре наредено множество.

Задача 12. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ е Λ-индексирана фамилия от множества. *Изфиняване на фамилията* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ще наричаме Λ-индексирана фамилия $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, удовлетворяваща следните три условия:

(i) $(\forall\lambda \in \Lambda)(B_\lambda \subseteq A_\lambda)$;

(ii) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$;

(iii) $(\forall\lambda \in \Lambda)(\forall\mu \in \Lambda)(\lambda \neq \mu \implies B_\lambda \cap B_\mu = \varnothing)$.

Докажете, че ако Λ е добре наредимо множество, то всяка Λ-индексирана фамилия от множества има изфиняване.

Задача 13. *Вж. предната задача.* Докажете, че ако за всяко множество Λ всяка Λ-индексирана фамилия от множества има изфиняване, то е в сила аксиомата за избора.