X

ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

изборен курс, зимен семестър 2020/2021 уч. год.

Поради грешка, условията на задачи 8, 9 и 13 се променят по следния начин:

- в задачи 8 и 9 допълнителни се иска ординалът α да е ненулев;
- в задача 13 допълнително се иска множеството A да е крайно.

Задача 8. (ZF) Да се докаже, че за всяко множество A съществува **ненулев** ординал α такъв, че няма сюрективна функция от A върху α:

$$(\forall A)(\exists \alpha)[\alpha \neq 0 \ \& \ \neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})].$$

Задача 9. (ZF) За всяко множество A с $h^*(A)$ означаваме най-малкия **ненулев** ординал α такъв, че няма сюрективна функция от A върху α:

$$h^*(A) = \mu\alpha[\alpha \neq 0 \ \& \ \neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})].$$

Да се докаже, че за всяко множество A са в сила:

1. $h^*(A) \leq \alpha \Rightarrow \neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})$;
2. $h^*(A)$ е кардинално число;
3. $h(A) \leq h^*(A)$;
4. ако A е добре наредимо, то $h(A) = h^*(A)$.

Задача 13. (ZF) Нека $\langle A, \leq_A \rangle$ е **крайно** добре наредено множество. В множеството ${}^A\alpha$ на всички функции от A към α, където $0 < \alpha < \omega$, дефинираме бинарната релация $\prec$ така:

$$f \prec g \quad \longleftrightarrow \quad (\exists a \in A)((\forall b \in A)(b <_A a \Rightarrow f(b) = g(b)) \ \& \ f(a) < g(a)).$$

Да се докаже, че $\langle {}^A\alpha, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА

изборен курс, зимен семестър 2020/2021 уч. год.

I част

Задача 1 (ZF) Нека $I \neq \varnothing$ и $\{A_i\}_{i\in I}$ е I-индексирана фамилия от взаимно чужди множества. Да се докаже, че множествата $\prod_{i\in I} ({}^{A_i}B)$ и ${}^{\bigcup_{i\in I} A_i}B$ са равномощни.

Задача 2 (ZF) Нека $\langle A, R\rangle$ е линейно наредено множество. Нека всеки път, когато w е начален сегмент на $\langle A, R\rangle$, е в сила $w = A$ или $(\exists x \in A)(w = \mathbf{seg}(x))$. Да се докаже, че $\langle A, R\rangle$ е добре наредено множество.

Задача 3 (ZF) Нека $A \neq \varnothing$ и $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\} \to A$ е функция на избора за $\mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

(i) $\forall B \forall C (B \neq \varnothing \,\&\, B \subseteq A \,\&\, C \neq \varnothing \,\&\, C \subseteq A \Rightarrow f(B \cup C) = f(\{f(B), f(C)\}))$;

(ii) съществува такава добра наредба $\leq$ в A, че за всяко непразно подмножество B на A е в сила $f(B) = \min\limits_{\leq} B$.

Задача 4 (ZF) Казваме, че формулната операция F е *нормална*, ако:

- за всеки ординал α, $F(\alpha)$ също е ординал,
- F е строго растяща над ординалите:

$$\alpha < \beta \Rightarrow F(\alpha) < F(\beta),$$

- и е непрекъсната върху граничните ординали:

$$\mathrm{Lim}(\lambda) \Rightarrow F(\lambda) = \sup\{F(\beta) \mid \beta < \lambda\}.$$

а) Нека F е нормална формулна операция. Да се докаже, че за всеки ординал α,

1. $\alpha \leq F(\alpha)$;
2. за всеки граничен ординал λ, $F(\lambda)$ също е граничен;

3. за всяко непразно множество от ординали A е в сила равенството $\sup\{F(\alpha) \mid \alpha \in A\} = F(\sup A)$, т. е. $\bigcup\{F(\alpha) \mid \alpha \in A\} = F(\bigcup A)$;

4. всеки път, когато $F(0) < \beta$ има най-голям ординал α, за който $F(\alpha) \leq \beta$.

б) Да се докаже, че композицията на нормални формулни операции е също нормална, т. е. ако формулните операции F и G са нормални, то и формулната операция H, дефинирана за всяко x с $H(x) = G(F(x))$, е нормална.

Задача 5 (ZF) Нека $\langle A, \leq \rangle$ е линейно наредено множество. Нека функцията $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е определена чрез:

$$\pi(X) = \{y \in A \mid \mathbf{seg}(y) \subseteq X\}.$$

Да се докаже, че π е монотонна и, че ако $A_\star$ е най-малката неподвижна точка на π, то за всяко $x \in A$ е в сила еквивалентността

$x \in A_\star \iff \langle \mathbf{seg}(x), \leq \cap (\mathbf{seg}(x) \times \mathbf{seg}(x)) \rangle$ е добре наредено множество.

Задача 6 (ZF) Нека F е нормална формулна операция. Да се докаже, че за всеки ординал α съществува такъв ординал β, че

$$\alpha \leq \beta \,\&\, F(\beta) = \beta.$$

Задача 7 Нека A и B са множества. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$, ако съществува инекция $f : A \rightarrowtail B$. Ще казваме, че $\overline{\overline{A}} \leq^\star \overline{\overline{B}}$, ако съществува сюрекция $f : B \twoheadrightarrow A$. Да се докаже, че:

1. **(ZF)** за произволни множества $A \neq \emptyset$ и B, е в сила:

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq^\star \overline{\overline{B}};$$

2. **(ZF)** за произволни множества A и B, ако B е добре наредимо, то е в сила:

$$\overline{\overline{A}} \leq^\star \overline{\overline{B}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}};$$

3. **(ZFC)** за произволни множества A и B, е в сила:

$$\overline{\overline{A}} \leq^\star \overline{\overline{B}} \Rightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}.$$

Задача 8 (ZF) Да се докаже, че за всяко множество A съществува ординал α такъв, че няма сюрективна функция от A върху α:

$$(\forall A)(\exists \alpha)[\neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})].$$

Задача 9 (ZF) За всяко множество A с $h^*(A)$ означаваме най-малкия ординал α такъв, че няма сюрективна функция от A върху α:

$$h^*(A) = \mu\alpha[\neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})].$$

Да се докаже, че за всяко множество A са в сила:

1. $h^*(A) \leq \alpha \Rightarrow \neg(\overline{\overline{\alpha}} \leq^* \overline{\overline{A}})$;
2. $h^*(A)$ е кардинално число;
3. $h(A) \leq h^*(A)$;
4. ако A е добре наредимо, то $h(A) = h^*(A)$.

Задача 10 (ZF) Да се докаже, че следващото твърдение, наричано *принцип на Хаусдорф за максималност* (HMP), е еквивалентно с аксиомата за избора.

Всеки път, когато $\langle A, \leq \rangle$ е частично наредено множество и L_0 е верига в него, съществува максимална по отношение на $\subseteq$ верига в $\langle A, \leq \rangle$, такава че $L_0 \subseteq L$.

Задача 11 (ZF) (*Индукция по крайните множества.*)

Нека $\varphi(x, \overline{y})$ е теоретико множествено свойство. Нека $\overline{u}$ е набор от множества и следните са в сила:

- $\varphi(\varnothing, \overline{u})$
- $\forall A \forall a(\mathrm{Fin}(A) \,\&\, \varphi(A, \overline{u}) \Rightarrow \varphi(A \cup \{a\}, \overline{u}))$.

Тогава $\forall A(\mathrm{Fin}(A) \Rightarrow \varphi(A, \overline{u}))$.

Задача 12 (ZF) Нека $B \subseteq \alpha$ и $\langle B, \leq \rangle \cong \langle \beta, \leq \rangle$. Да се докаже, че $\beta \leq \alpha$.

Задача 13 (ZF) Нека $\langle A, \leq_A \rangle$ е добре наредено множество. В множеството ${}^A\alpha$ на всички функции от A към α, където $0 < \alpha < \omega$, дефинираме бинарната релация $\prec$ така:

$$f \prec g \quad \longleftrightarrow \quad (\exists a \in A)((\forall b \in A)(b <_A a \Rightarrow f(b) = g(b)) \,\&\, f(a) < g(a)).$$

Да се докаже, че $\langle {}^A\alpha, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

Задача 14 (ZF) Да се даде пример за линейно наредено множество $\langle A, \leq_A \rangle$, такова че $\langle {}^A 2, \preceq \rangle$ не е добре наредено множество, където

$$f \prec g \quad \longleftrightarrow \quad (\exists a \in A)((\forall b \in A)(b <_A a \Rightarrow f(b) = g(b)) \,\&\, f(a) < g(a)).$$

Задача 15 (ZF) Да се даде пример за такова добре наредено множество $\langle A, \leq_A \rangle$, че $\langle {}^A\omega, \preceq \rangle$ не е добре наредено множество, където

$$f \prec g \quad \longleftrightarrow \quad (\exists a \in A)((\forall b \in A)(b <_A a \Rightarrow f(b) = g(b)) \,\&\, f(a) < g(a)).$$

Задача 16 (ZF) Нека A е безкрайно множество, т.е. $\forall n(\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{n}})$. Да се докаже, че ако съществува добра наредба $\leq_1$ в A, то съществува добра наредба $\leq_2$ в A, за която добре наредените множества $\langle A, \leq_1 \rangle$ и $\langle A, \leq_2 \rangle$ не са изоморфни.

Задача 17 (ZF) Нека $\mathcal{H}$ е формулната операция на Хартогс. Да се докаже, че $\forall A(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{\mathcal{H}(A)}})$.

Задача 18 (ZFC) Нека S и T са множества и $\sim$ е релация на еквивалентност в S. Да се докаже, че следните две условия са еквивалентни:

(i) $\overline{\overline{S/_{\sim}}} \leq \overline{\overline{T}} \,\&\, \overline{\overline{T}} \leq \overline{\overline{S}}$;

(ii) $\exists f(f : S \twoheadrightarrow T \,\&\, \forall s_1 \forall s_2(f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow s_1 \sim s_2))$.

Задача 19 (ZF) Да се докаже, че за произволно множество A са в сила следните:

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}}}$;
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup \{A\}}} \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))}}$.

Упътване. За 2) използвайте 1), че ${}^{X}2$ и $\mathcal{P}(X)$ са равномощни, както и че $B \cap C = \emptyset$ влече, че ${}^{B\cup C}X$ и ${}^{B}X \times {}^{C}X$ са равномощни.

Задача 20 (ZFC) Нека $\langle A, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество, което няма най-голям елемент. За едно множество X, $X \subseteq A$, се казва, че е *кофинално* с A, ако:

$$(\forall a \in A)(\exists x \in X)[a \preceq x].$$

Да се докаже, че съществува B, $B \subseteq A$, което е кофинално с A и $\langle B, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

Идея. Фиксирайте една сюрекция на подходящ ординал α върху A. Използвайте теоремата за дефиниране по рекурсия.

Задача 21 (ZF) Да се докаже, че в $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$ има вериги, които са равномощни с $\mathcal{P}(\omega)$.

Задача 22 (ZFC) Нека $X \subseteq \mathbb{R}$ е добре наредено от обичайната наредба в $\mathbb{R}$. Да се докаже, че X е или крайно, или изброимо.