

ТЕОРИЯ НА МНОЖЕСТВАТА
изборен курс
Изпитни задачи, февруари 2016 г.

Задача 1. Нека A е произволно непразно множество.

- (А) Да се докаже, че съществува единствено множество B , за което е в сила еквивалентността: $\forall x(x \in B \iff \exists n(n \in \omega \ \& \ x : n \rightarrow A))$.

Това единствено множество B се нарича множество на *крайните редици от елементи на A* и се означава със $\text{Seq}(A)$.

- (Б) Нека $\mathcal{A} = \langle A, < \rangle$ е строго линейно наредено множество, $A \neq \emptyset$. В множеството $\text{Seq}(A)$ на крайните редици от елементи на A дефинираме бинарната релация $\preceq$ така: ако $x, y \in \text{Seq}(A)$, $\text{Dom}(x) = n$ и $\text{Dom}(y) = k$, то

$$\langle x, y \rangle \in \preceq \iff (y \subseteq x) \vee \exists \ell(\ell \in n \cap k \ \& \ x(\ell) < y(\ell) \ \& \ (\forall i \in \ell)(x(i) = y(i))).$$

Да се докаже, че:

- 1) $\langle \text{Seq}(A), \preceq \rangle$ е линейно наредено множество, в което има най-голям елемент;
- 2) $\langle \text{Seq}(A), \preceq \rangle$ не е добре наредено множество;
- 3) ако $A = \omega$ и $<$ е обичайната наредба в ω , то $\langle \text{Seq}(\omega), \preceq \rangle$ е гъсто наредено, т. е.
 $(\forall x \in \text{Seq}(\omega))(\forall y \in \text{Seq}(\omega))(x \prec y \Rightarrow (\exists z \in \text{Seq}(\omega))(x \prec z \ \& \ z \prec y))$.

Задача 2. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. В $\mathcal{P}(A)$ дефинираме бинарната релация $\prec$ така:

$X \prec Y$ точно тогава, когато най-малкият елемент на $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ е от X .

Да се докаже, че $\langle \mathcal{P}(A), \preceq \rangle$ е линейно наредено множество.

Задача 3. (А) Нека A е крайно множество, всички елементи на което са непразни множества.

(Б) Нека $\langle X, \preceq \rangle$ е линейно наредено множество и A е множество от непразни крайни подмножества на X .

Да се докаже, че съществува функция h с дефиниционна област A , такава че $(\forall x \in A)(h(x) \in x)$.

Задача 4. Да се докаже, че събирането и умножението на естествени числа са комутативни операции.

Задача 5. Нека $\langle A, \preceq \rangle$ е частично наредено множество, в което всяко линейно наредено непразно множество има точна горна граница. Нека

функцията $f : A \rightarrow A$ има свойството $(\forall x \in A)(x \preceq f(x))$. Да се докаже, че всеки елемент на A се мажорира от неподвижна точка на f , т.е. $(\forall a \in A)\exists x(a \preceq x \ \& \ f(x) = x)$.

Задача 6. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е Λ -индексирана фамилия от множества. Нека $\{\Lambda_\mu\}_{\mu \in M}$ е M -индексирана фамилия от непразни взаимно непресичащи се подмножества на Λ , чието обединение е Λ . Да се докаже, че

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \sim \prod_{\mu \in M} \left(\prod_{\lambda \in \Lambda_\mu} A_\lambda \right).$$

Задача 7. Нека $\{F_\alpha\}_{\alpha < \gamma}$ е γ -редица от затворени множества в $\mathbb{R}^n$, $n > 0$, която е строго монотонно намаляваща по отношение на теоретико-множественото включване. Да се докаже, че γ е най-много изброим ординал.

Задача 8. Нека α е граничен ординал. Да означим с $\text{cf}(\alpha)$ най-малкия ординал σ , за който съществува монотонно растяща σ -редица от по-малки от α ординали $\{\beta_\xi\}_{\xi < \sigma}$, такава че $\bigcup\{\beta_\xi \mid \xi < \sigma\} = \alpha$.

Да се докаже, че $\text{cf}(\alpha)$ е безкрайно кардинално число и $\text{cf}(\text{cf}(\alpha)) = \text{cf}(\alpha)$.

Задача 9. Нека $\mathcal{T} = \langle T, \preceq \rangle$ е дърво. Едно множество от върхове $B \subseteq T$ се нарича *барьера* в $\mathcal{T}$, ако всеки безкраен път в $\mathcal{T}$ минава през B .

Нека $\mathcal{T} = \langle T, \preceq \rangle$ е дърво с височина ω и всеки връх в $\mathcal{T}$ има краен брой непосредствени наследници. Нека B е бариера в $\mathcal{T}$. Да се докаже, че съществува крайно B_0 , $B_0 \subseteq B$, което също е бариера в $\mathcal{T}$.

Забележка. 5 вярно решени и защитени задачи са достатъчни за оценка 6.