

за игра с n играчи:

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i = 1, \sigma_i \geq 0, i=1, \dots, n$$

$$\prod_{i=1}^n (j_i, j_2, \dots, j_n), i=1, \dots, n$$

множество от съществени стратегии на i -тия играч x_i :

$$X_i = \{x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{n_i}), x_i^j \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} x_i^j = 1, \forall i\}$$

Определена игра в съществени стратегия на i -тия играч:

$$P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \dots \sum_{j_n=1}^{n_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n} \cdot$$

$$\text{бележит } c \text{ с } X \cdot \prod_{i=1}^n (j_i, j_2, \dots, j_n)$$

$$P_i(\bar{x}) = \sum_{j_i=1}^{n_i} x_i^{j_i} \cdot P_i(x_1, \dots, x_{i-1}, j, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \sum_{j_i=1}^{n_i} x_i^{j_i} \cdot P(\bar{x}_i^{j_i})$$

$\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ е равновесие за тази игра, ако:

$$P_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq P_i(x^*), i=1, \dots, n$$

Ако $P_i(x^{**}) \leq P_i(x^*), i=1, \dots, n$

$$k=1, \dots, n$$

$\Rightarrow \forall OK$

$$/* x_i' = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^n c_k}, i=1, \dots, m$$

$$c_i = \max(0, P(i, y) - P(x, y))$$

$$y_j' = \frac{y_j + c_j}{1 + \sum_{k=1}^n c_k}, j=1, \dots, n$$

$$c_j = \max(0, Q(x, j) - Q(x, y))$$

Глобално е за 2 -ма играчи. *

В случае с n играми:

$$F: x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n \rightarrow x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$$

$$y_i^j = x_i^j + c_i^j, \quad c_i^j = \max(0, P_i(z^j) - P(z^j))$$

Неподвижная точка:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n), \quad x_i = y_i$$

$$\Rightarrow F(z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n),$$

$$z_i^j = z_i^j + c_i^j = z_i^j + \frac{\sum_{s=1}^n c_i^s}{n}$$

$$\text{Ако } \forall c_i^j = 0 \Rightarrow \text{НОК}$$

Нека $c_i^j > 0$ за някои i и j .

$$\Rightarrow z_i^j = z_i^j + c_i^j = z_i^j + \frac{\sum_{s=1}^n c_i^s}{n} > z_i^j \text{ за някои } j$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^n c_i^s > 0 \Rightarrow n \sum_{s=1}^n c_i^s > 1.$$

Ако $z_i^j > 0$, допускаме, че имаме неравенство

$$P_n(z_i^j) > P(z^j)$$

(Ако имаме противоречие, ще следва, че $\exists z_i^j > 0$, за което $P_i(z_i^j) = P(z^j)$).

$$\text{Имаме: } P_i(z^j) > P(z^j) \cdot \sum_{j=1}^n z_i^j$$

$$\Rightarrow P_i(z^j) > P(z^j).$$

n -матрична игра, конкурсивен вариант

$\rightarrow$ излъкната обвивка в n -мерното пространство $\Rightarrow$ излъкнало, затворено и ограничено множество S :
 $S \subset \mathbb{R}^n, \quad u^* \in R: (S, u^*)$

$$u^* = \max_{x \in X} \min_{\bar{x} \in \bar{X}} f(x).$$

понадбаа $x \in X$ $\bar{x} \in \bar{X}$

Питаме за n играти:

Шестте свойства:

$$① \bar{u} \in S$$

$$② \bar{u} \geq u^* \text{ (това са вектори-} \\ \text{неравенството е покомпонентно)}$$

$$③ \nexists u \in S: u \geq \bar{u}, \text{ като за (поне) една} \\ \text{компонента, неравенството е} \\ \text{строго.}$$

$$④ T \in S, (S, u^*) \rightarrow \bar{u}, \bar{u} \in T \\ \Rightarrow (T, u^*) \rightarrow \bar{u}$$

$$⑤ L u = u', u' = d_1 u + \beta_i, d_i > 0 \\ (S, u^*) \rightarrow \bar{u} \\ \Rightarrow (L(S), L(u^*)) \rightarrow L(\bar{u}).$$

$$⑥ u \in S \rightarrow T u \in S \Rightarrow (S, u^*) \rightarrow (T, \bar{u}) \\ \text{призовава пермутация} \\ \text{(точки, на които са разменени} \\ \text{координатите)}$$

$$u^0 \in S \quad \left| \quad \prod_{i=1}^n (u_i - u_i^*) \rightarrow \max \right.$$

$$u^0 \geq u^*$$

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in S$$

$$u_i \geq u_i^*, i=1, \dots, n$$

Доказателството на свойството за n играти е аналогично на доказателството за двама играчи.

Разлика има само при функцията h_i :

$$h_i(u) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$$

$$a_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\prod_{j=1}^n (u_j - u_j^*) \right) = \prod_{j \neq i}^n (\bar{u}_j - u_j^*) / \mu = \mu$$

$$h_i(u) = \sum_{j=1}^n \frac{u_j}{\bar{u}_j - u_j^*}$$

μ и μ се разминават с 1

$$\text{коэффициент: } \prod_{j=1}^n (\bar{u}_j - u_j^*), \text{ който}$$

не скаква бързо на рел. / год *

$$u_i^* = u_i^*$$

$$u_i^* = u_i^* - u_i^*$$

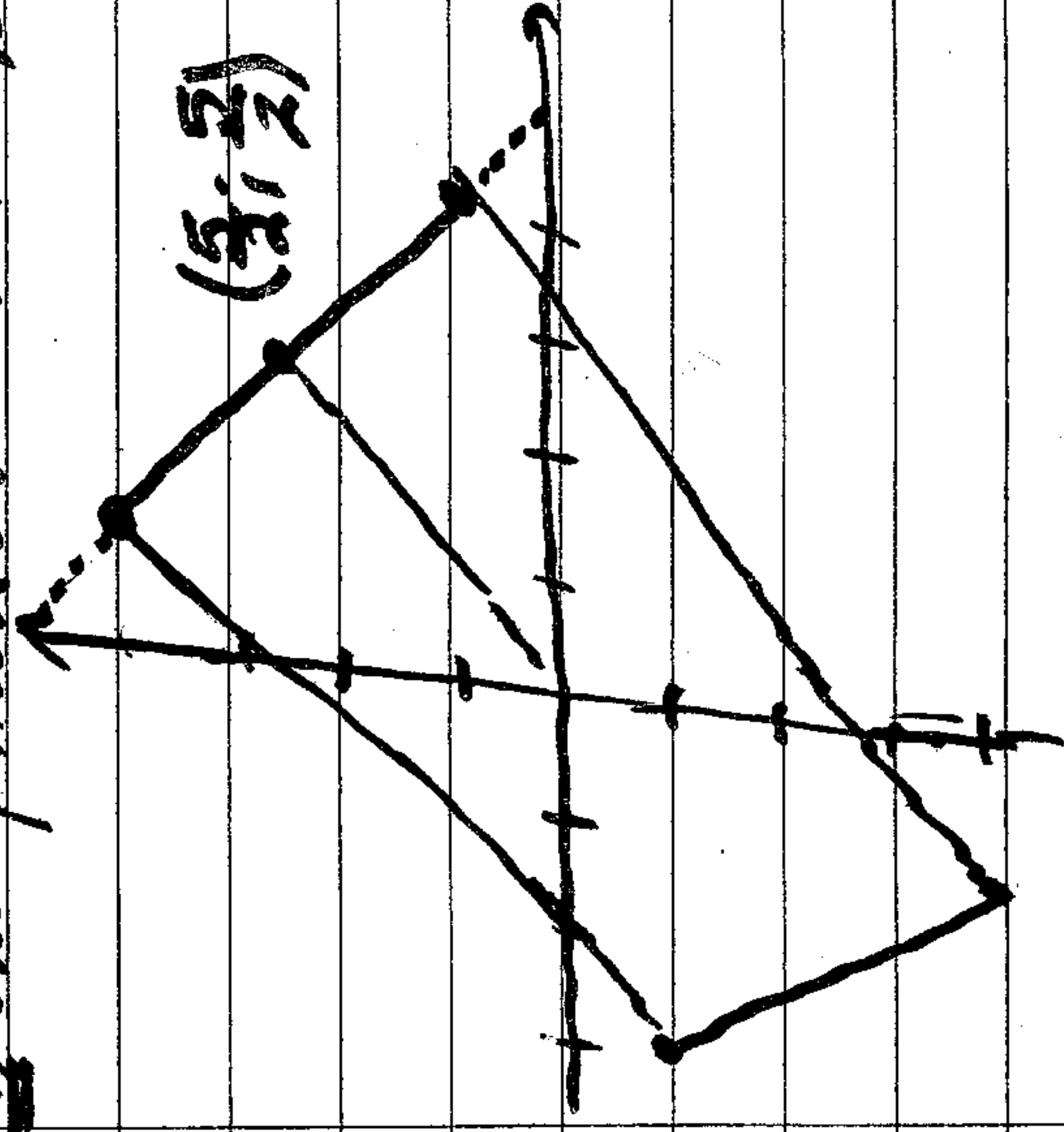
$$u_i^* - u_i^*$$

пример:

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-\frac{4}{3}, -4) \\ (-3, -1) & (4,1) \end{pmatrix}$$

за тази игра
да се намери
равновесието
по Нел.

1) Наскъртаваме множеството:



u^* се определя от матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

u^* се определя от матрицата

$$B^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{изма равновесие}$$

$\Rightarrow$ търсим равновесие в шесни
стратегии:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2):$$

$$\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = v$$

$$-\frac{4}{3}\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2 = v$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 1$$

$$\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 > 0$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = -\frac{4}{3}\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2$$

$$\frac{7}{3}\bar{x}_1 = 7\bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 = 3\bar{x}_2$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{3}{4}, \bar{x}_2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow v = \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{u^* = 0}$$

$$3) B^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{няма равновесие в чисти стратегии}$$

$\Rightarrow$ търсим равновесие в смесени

$$\text{стратегии: } \bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$$

$$\text{платяване } (u^*, v^*) = (0, 0).$$

$\Rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$ е в Γ квадрат.

Намиране на $(\bar{u}, \bar{v})$:

Тнакин: използваме симетричността (на чертеска на предната странаща)

Тнакин: отсечка с краища $(1, 4)$ и $(4, 1)$:

$$\alpha \in [0, 1]:$$

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot (1, 4) + (1 - \alpha) \cdot (4, 1) = \\ & = (\alpha, 4\alpha) + (4 - 4\alpha, 1 - \alpha) = \\ & = \underbrace{(4 - 3\alpha, 1 + 3\alpha)}_{v(\alpha)} \quad u(\alpha) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} v(\alpha) - u^* \\ \alpha \in [0, 1] \end{array} \right| \cdot (v(\alpha) - v^*) \rightarrow \max$$

$$\text{В случая: } u(\alpha) \cdot v(\alpha) \rightarrow \max \\ (4 - 3\alpha) \cdot (1 + 3\alpha) \rightarrow \max \\ \alpha \in [0, 1]$$

$$4 + 12\alpha - 3\alpha - 9\alpha^2 \rightarrow \max \\ -9\alpha^2 + 9\alpha + 4 \rightarrow \max$$

$\Rightarrow$ първата производна е:

$$-18\alpha + 9$$

$$\Rightarrow -18\alpha + 9 = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

Втората производна е $-18 < 0$
 $\Rightarrow$ в $\alpha = \frac{1}{2}$ има $\max$.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}; \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}; \quad v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

III накин: с множител на Лагранж

функция на

Лагранж:

$$F(u, v, \lambda)$$

правата

* издво е да

платим $\bar{u}$ и

$\bar{v}$ да са от

отсечката

$$k(u, v, \lambda) = uv + \lambda(u + v - 5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial u} = 0 \Rightarrow \bar{v} + \lambda = 0 \Rightarrow \bar{v} = -\lambda$$

$$\frac{\partial k}{\partial v}$$

$$= 0 \Rightarrow \bar{u} + \lambda = 0 \Rightarrow \bar{u} = -\lambda$$

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}$$

$$= 0 \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} - 5 = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}$$

$$-\lambda - \lambda - 5 = 0$$

$$2\lambda = -5$$

$$\lambda = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{5}{2}, \bar{v} = \frac{5}{2}$$

$$\bar{u} \geq u^* \quad u^* = x^T A y$$

$$\bar{v} \geq v^* \quad v^* = x^T B y$$

$$\text{Задача е: } (u - u^*)(v - v^*) \rightarrow \max \quad | \quad uv = 5.$$

u^*, v^* — не ни знаем предварително.
Те зависят от неизвестните спра-
вления x и y .

решаваш задача:

$$(u - u^*)(v - v^*) \rightarrow \max \quad | \quad uv = 5$$

$$k(u, v, \lambda) = (u - u^*)(v - v^*) + \lambda(u + v - 5)$$

$$\frac{\partial k}{\partial u} = v - v^* + \lambda = 0 \Rightarrow v = v^* - \lambda$$

$$\frac{\partial k}{\partial v}$$

$$= u - u^* + \lambda = 0 \Rightarrow u = u^* - \lambda$$

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}$$

$$= u + v - 5 \Rightarrow u^* - \lambda + v^* - \lambda - 5 = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial \lambda}$$

$$\Rightarrow 2\lambda = u^* + v^* - 5$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{u^* + v^* - 5}{2}$$

$$\Rightarrow u = u^* - \lambda = u^* - \frac{u^* + v^* - 5}{2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{u^*}{2} - \frac{v^*}{2} + \frac{5}{2}$$

$$\text{Аналогично: } v = \frac{v^*}{2} - \frac{u^*}{2} + \frac{5}{2}$$

$$u = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} x^T (A - B) y$$

$$v = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} x^T (A - B) y.$$

Тиска да максимизира $u \Rightarrow$
иска да максимизира
 $x^T (A - B) y$.

Писка да максимизира $\bar{v} \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ иска да минимизира $x^T(A-B)y$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-4 & -\frac{4}{3}-(-4) \\ -3-(-1) & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{8}{3} \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & \frac{8}{3} \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ има равно-
 вие в $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ в $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
 отразени.

$$\Rightarrow \bar{u} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-2) = \frac{3}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-2) = \frac{7}{2}$$

В този случай u^* и v^* се опре-
 делят от това, че двойката
 е "плаваш" един друг със стра-
 тежи.

Преди определяхме u^* и v^* от
 това, че се плаваша с некакви

[08.01]

Кооперативни игри с
 повече от двама играчи

$$N = \{1, 2, \dots, n\} \quad n\text{-игри}$$

Има коалиции.

def: коалиция $\rightarrow$ произволно под-
 множество S на N .

Има 2^n на брой възможни коа-
 лиции (брой и празната коа-
 лиция, както и коалицията,
 образувана от всички играчи)

$v(S) \rightarrow$ гарантираната печалба на
 членовете на коалицията, ако
 другите ни прекратят; това е пе-
 чалбата на цялата коалиция.

$$\max_{x \in S} \min_{y \in M_S} P(x, y)$$

Свойства на $v(S)$:

1) $v(\emptyset) = 0$

2) $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \rightarrow$ показва, че при $S \cap T = \emptyset$ има състояние от

коалициите

(заедно ще спечелят повече, отколкото поотделно).

Пример: трима души, сравняват по сила.

Никой не може да надвие друг, но двамата могат да надвием третия.

$v(1,1) = v(1,2) = v(1,3) = -2$

$v(1,2,3) = v(1,3,4) = v(2,3,4) = 2$

$v(1,2,3,4) = 0$

def: Даден: $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ вектор, който показва на кои играч колко ще даде:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$ 1) $x_i \geq v(i)$

2) $\sum_{i=1}^n x_i = v(N)$

Пример: (от по-горе)

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$x_i \geq -2$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$\rightarrow$ триъгълник

$v \rightarrow$ характеристична функция

Симетрична игра: v не зависи от елементите на коалицията, а само от броя им.

Пример:

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$v(1) = 0$

$v(2) = v(3) = 1/2$

$v(4) = v(5) = 1$

$\Rightarrow$ всяка игра се задава от 2^{n-1} на брой числа.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \Delta(v)$

$y \in \Delta(v)$

$\Delta(v) \rightarrow$ множеството на дабите.

Корбали, че дабата x е по-лоша от дабата y за членовете на коалицията S и т.н. имаме: $x < y$, ако $x_i < y_i, i \in S$ и $\sum_{i \in S} y_i \in N(S)$.

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i, i \in S \\ \sum_{i \in S} y_i \leq v(S).$$

Вид: x е доминира от y , y е по-добра даба.

Нали-добри са тези дади, които измат даба, която да ги доминира.

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i$$

$$x_i y_i \leq v(i), \text{ но } x_i \geq v(i), \text{ т.к.}$$

x_i е даба

$\Rightarrow$ не може една даба да даминира друга даба по отношение на 1-елементна коалиция.

$$x < y \Leftrightarrow x_i < y_i \text{ за } \forall i \in N$$

$$\Rightarrow v(N) = \sum_{i=1}^n x_i < \sum_{i=1}^n y_i = v(N)$$

$\Rightarrow$ не може една даба да даминира друга даба по отношение на n -елементна коалиция (всички играчи са в коалиция заедно).

$$\Delta(u) \Leftrightarrow \Delta(v)$$

Допускаме, че $\exists$ биекция между дадите, която запазва реда на:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2.$$

Трансформация на функцията във функции:

$$v(S) = v: u(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i.$$

$$v(S, T) = v: u(S, T) + \sum_{i \in S, T} \alpha_i \geq$$

$$S \cap T = \emptyset$$

$$\geq v: (u(S) + u(T)) + \sum_{i \in S} \alpha_i + \sum_{i \in T} \alpha_i =$$

$$= r \cdot u(S) + \sum_{i \in S} r_i \cdot u(T) + \sum_{i \in T} \alpha_i =$$

$$= v(S) + v(T).$$

$\Rightarrow$ ако u е характеристична функция, v също е характеристична функция

Резултат на еквивалентност:

① $u \sim v$

② $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

③ $u \sim v$ и $v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

1) очевидно е: $r=1; \alpha_i=0 \Rightarrow u \sim u$.

2) $u \sim v \Rightarrow u(S) = r \cdot v(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$

$$\Rightarrow v(S) = \frac{1}{r} u(S) - \sum_{i \in S} \frac{\alpha_i}{r}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{r}; A_i = -\frac{\alpha_i}{r} \Rightarrow v(S) = R \cdot u(S) + \sum_{i \in S} A_i$$

$\Rightarrow v \sim u$.

3) $u \sim v, v \sim w$.

$$\text{От } u \sim v \Rightarrow u(S) = r_1 \cdot v(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$$

$$\text{От } v \sim w \Rightarrow v(S) = r_2 \cdot w(S) + \sum_{i \in S} \beta_i$$

$$\Rightarrow u(S) = r_1 \cdot (r_2 \cdot w(S) + \sum_{i \in S} \beta_i) + \sum_{i \in S} \alpha_i =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot w(S) + \sum_{i \in S} (r_1 \cdot \beta_i + \alpha_i)$$

$$\Rightarrow R = r_1 \cdot r_2; A_i = r_1 \cdot \beta_i + \alpha_i$$

$$\Rightarrow u \sim w.$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta(u)$$

$$y_i = ?$$

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \Delta(v)$$

$$r > 0$$

$$\Rightarrow y_i = r \cdot x_i + \alpha_i, \quad i=1, 2, \dots, n$$

това изразение е директно:
- гласа $\leftrightarrow$ гласа
- гласа се нареждат.

Да проверим, че y е гласа, ако знаем, че x е гласа. y е на мястото
където $y_i = r \cdot x_i + \alpha_i, r > 0$.

$$1) y_i = r \cdot x_i + \alpha_i \geq r \cdot u(x_i) + \alpha_i = v(y_i).$$

$$2) \sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n (r \cdot x_i + a_i) = r \cdot \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n a_i = r \cdot u(N) + A$$

$\Rightarrow$ дедба отива в дедба.

Относно запафването на наредбата:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2, i \in S$$

$$\sum_{i \in S} x_i \in u(S)$$

$$y_1 < y_2 \Leftrightarrow y_1 < y_2, i \in S$$

$$\sum_{i \in S} y_i \in v(S)$$

$\Rightarrow$ очевидно е заради бръзката между x и y : $y_i = r \cdot x_i + a_i$

$\Delta(u)$

Възможно ли е да съществуват дедби x_1 и x_2 , такива че $x_1 < x_2$ и $x_2 < x_1$?

$$x_1 \in \Delta(u), x_2 \in \Delta(u) \\ x_1 < x_2, \quad x_2 < x_1 \\ S \quad \quad \quad \Gamma$$

Функцията от преди малко:

$$v(1) = 0 \\ v(2) = v(3) = \frac{1}{2} \\ v(4) = v(5) = 1$$

Дедба за тази функция:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ | \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, 5 \\ | \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{2} \right),$$

$$x_2 = \left(0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

$$x_1 > x_2 \quad x_1 < x_2 \\ 1, 1, 2, 4 \quad 1, 3, 4, 4$$

$\downarrow$ $\searrow$

x_1 никога няма да бъде избрана x_2 никога няма да бъде избрана $\rightarrow$ намерихме пример, че е възможно.

def: Доро на играта - всаки
недоимручим, делби.
означаваме го с Φ :

$$x \in \Phi(u), \text{ ако } \nexists y > x$$

антводни
 $\rightarrow \exists \in \Phi$, Φ валантна на u със
следните свойства:
 $v(iy) = 0, yi = 1, \dots, n$
 $v(N) = 1$

$$* u(N) \geq u(iy) + u(N \setminus iy) \geq \dots \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^n u(iy)$$

$$\text{Нека } u(N) = \sum_{i=1}^n u(iy)$$

$\Rightarrow xi = u(iy)$
 $\Rightarrow$ няма да размениме токма
игри, не са интересни
 $\Rightarrow$ винаги ще опитаме, че
 $u(N) > \sum_{i=1}^n u(iy)$ *

$$v(iy) = 0, i = 1, \dots, n$$

$$v(N) = 1$$

$$v(S) = r \cdot u(S) + \sum_{i \in S} \alpha_i$$

$$r = ?; \alpha_i = ?$$

$$0 = r \cdot u(iy) + \alpha_i \Rightarrow \alpha_i = -r \cdot u(iy)$$

$$v(N) = r \cdot u(N) - r \cdot \sum_{i=1}^n u(iy)$$

$$1 = r \cdot u(N) - r \cdot \sum_{i=1}^n u(iy)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r &= \frac{1}{u(N) - \sum_{i=1}^n u(iy)} \\ \alpha_i &= \frac{-u(iy)}{u(N) - \sum_{i=1}^n u(iy)} = -u(iy) \cdot r \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow u(S) \geq 0$$

$\Rightarrow$ редуцирана 0-1 формула

проста игра $\rightarrow$ само 0 и 1 като
стойности.

$$\begin{aligned} u(i^4) &= -2 = u(i^4) = u(12) = u(134) \\ u(11, j^4) &= 2 \\ u(11, 2, 34) &= 0 \end{aligned}$$

$$r = \frac{1}{u(N) - \sum u(i^4)} = \frac{1}{0 - 3 \cdot (-2)} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow \boxed{r=1}$

$$\alpha_1 = -u(11^4), 1 = -(-2) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}; \quad r = \frac{1}{6}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(11^4) &= 0 \\ v'(11, j^4) &= 1 \\ v(11, 2, 34) &= 1 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} v(x^i, j^4) &= r \cdot u(11, j^4) + 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \end{aligned}$$

Не е проверио дали една дълга е от 'ядрото, или не' е. Не има теорема, която характеризира ядрото:

$$x \in \Phi(u) \Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq u(S), \quad S \subset N$$

$\left(\sum_{i=1}^n x_i = u(N) \right)$ произволна коалиция

$\hookrightarrow$ това равенство идва от дедукте.

Доказателство:

$\Leftrightarrow$ Допускаме противното:

$$y > x \Leftrightarrow y_i > x_i, \quad i \in \bar{S}$$

$$\sum_{i \in \bar{S}} y_i \leq u(\bar{S})$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in \bar{S}} y_i > \sum_{i \in \bar{S}} x_i$$

1) $u(\bar{S})$

$\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow$ Нека $x \in \Phi(u) \Rightarrow \nexists y > x$.

Допускаме противното:
 $\exists$ координата, за която

$$\sum_{i \in S} x_i < u(S) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i = u(S) - \varepsilon, \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ търсѝва да попълним гѝда
 $y:$ $y > x$

$$y_i = x_i + \frac{\varepsilon}{s}, \quad s = |S|, \quad i \in S.$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \left(x_i + \frac{\varepsilon}{s} \right) = \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon =$$

$$= u(S) - \varepsilon + \varepsilon = u(S).$$

Остава да попълним за $i \in M \setminus S$:

(5.01.)

$$u(N) \geq u(S) + \sum_{i \in M \setminus S} u(i)$$

$$\text{Диаграма: } \delta = u(N) - u(S) = \sum_{i \in M \setminus S} u(i)$$

$$y_i = u(i) + \delta, \quad i \in M \setminus S$$

$\Rightarrow y$ е гѝда:

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in M \setminus S} y_i =$$

$$= u(S) + \sum_{i \in M \setminus S} u(i) + \delta =$$

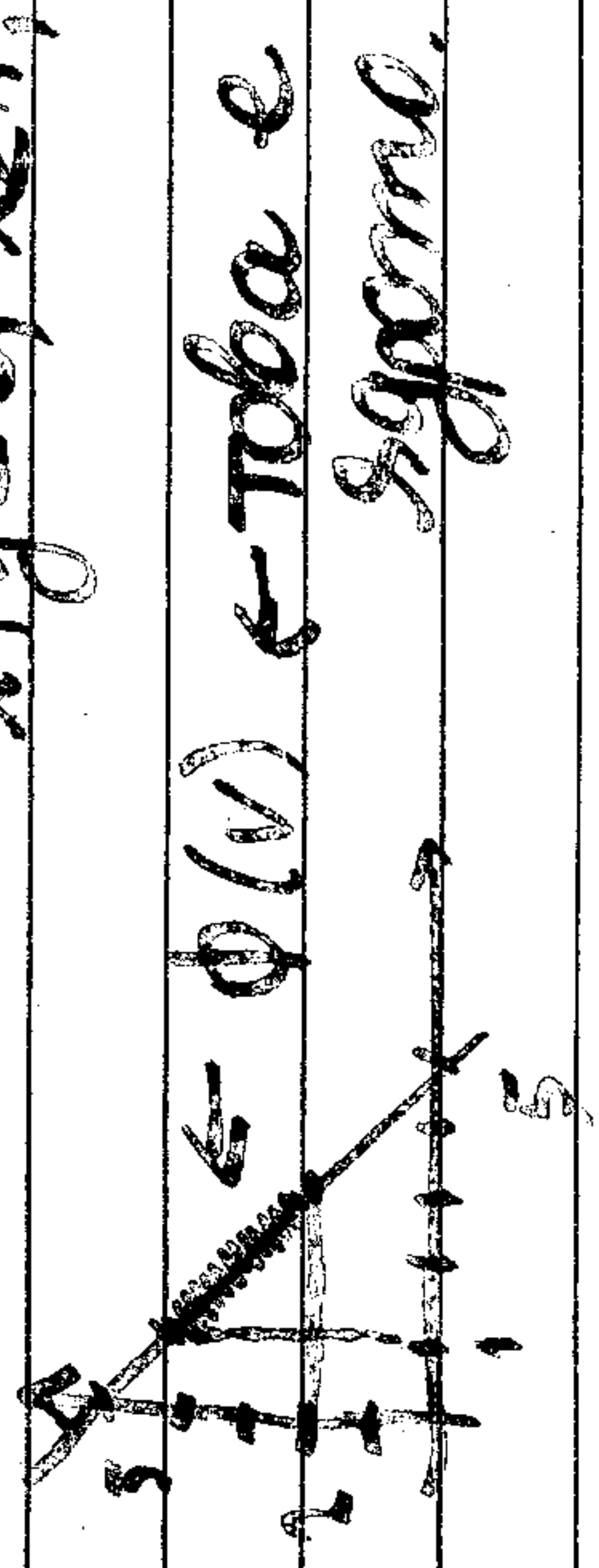
$$= u(S) + \sum_{i \in M \setminus S} u(i) + u(N) - u(S) =$$

$$= \sum_{i \in M \setminus S} u(i) + u(N) = u(N).$$

Пример: $N = \{1, 2, 3\}$

$$v(\{1, 2\}) = 1, \quad v(\{1, 3\}) = 2, \quad v(\{1, 2, 3\}) = 5.$$

За да намираме: $\Phi(v) = \{x, y\} \in \mathbb{R}^3$:
 $x + y = 5, \quad x \geq 1, \quad y \geq 2.$



пример: $N = 41; 2; 34$
 $V(114) = V(124) = V(134) = 0$
 $V(11, 24) = V(11, 34) = V(12, 34) = \alpha$
 $V(11, 2, 34) = 1$

от соответствия на дедукции $\Rightarrow$
 $\alpha = V(11, 24) \geq V(114) + V(124) = 0 + 0$
 $\Rightarrow \boxed{\alpha \geq 0}$

$1 = V(11, 2, 34) \geq V(114) + V(12, 34) = 0 + \alpha$
 $\Rightarrow \boxed{\alpha \leq 1}$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \in [0; 1]}$

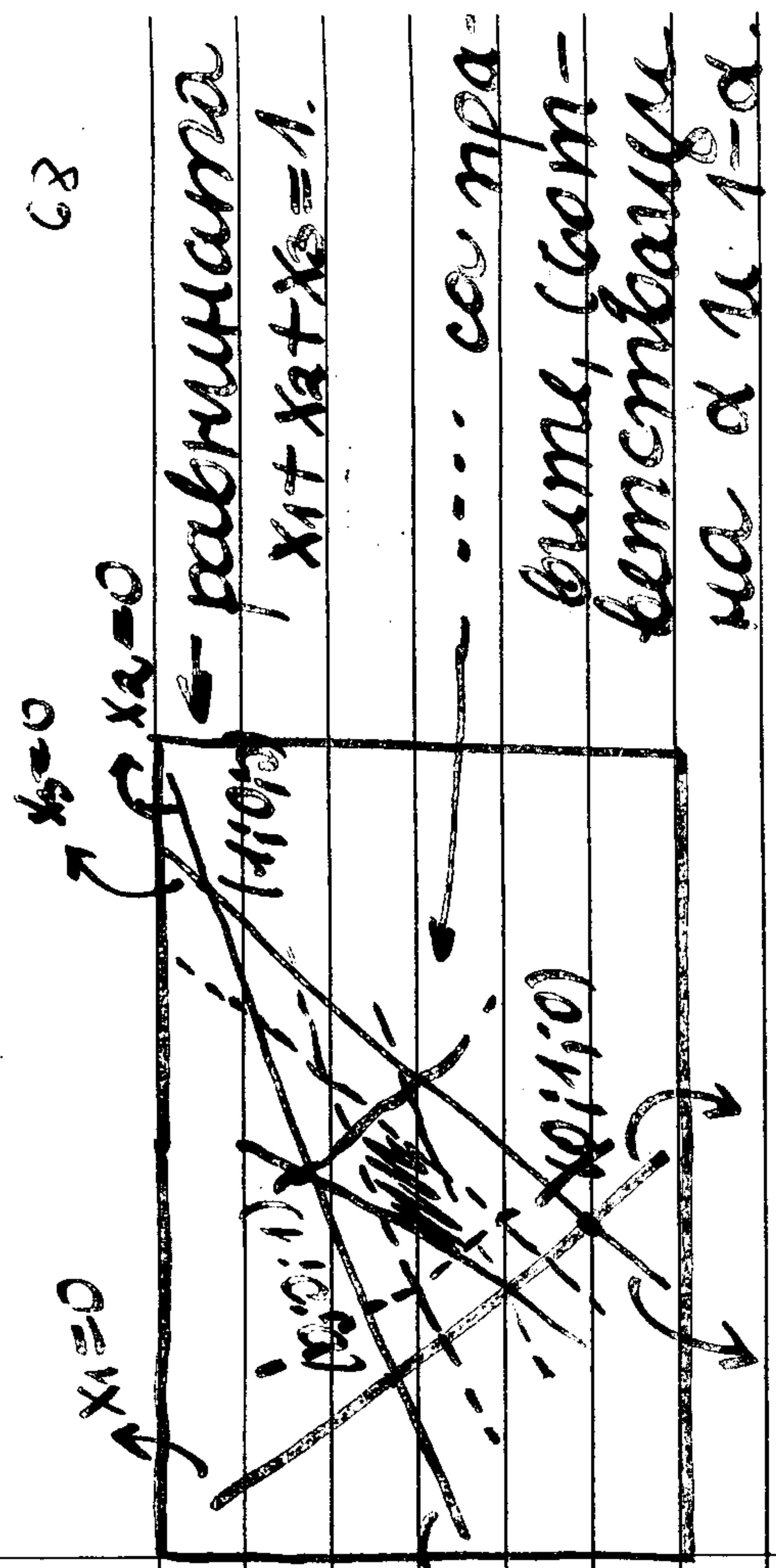
где $\Phi(V) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

$x_3 \leq 1 - \alpha \quad \leftarrow x_1 + x_2 \geq \alpha,$
 $x_2 \leq 1 - \alpha \quad \leftarrow x_1 + x_3 \geq \alpha,$
 $x_1 \leq 1 - \alpha \quad \leftarrow x_2 + x_3 \geq \alpha;$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$\Rightarrow \Delta$ с вершине $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ и принадлежностью от каждой дедукции.

$\alpha \leq 1 - \alpha \Rightarrow 2\alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}$



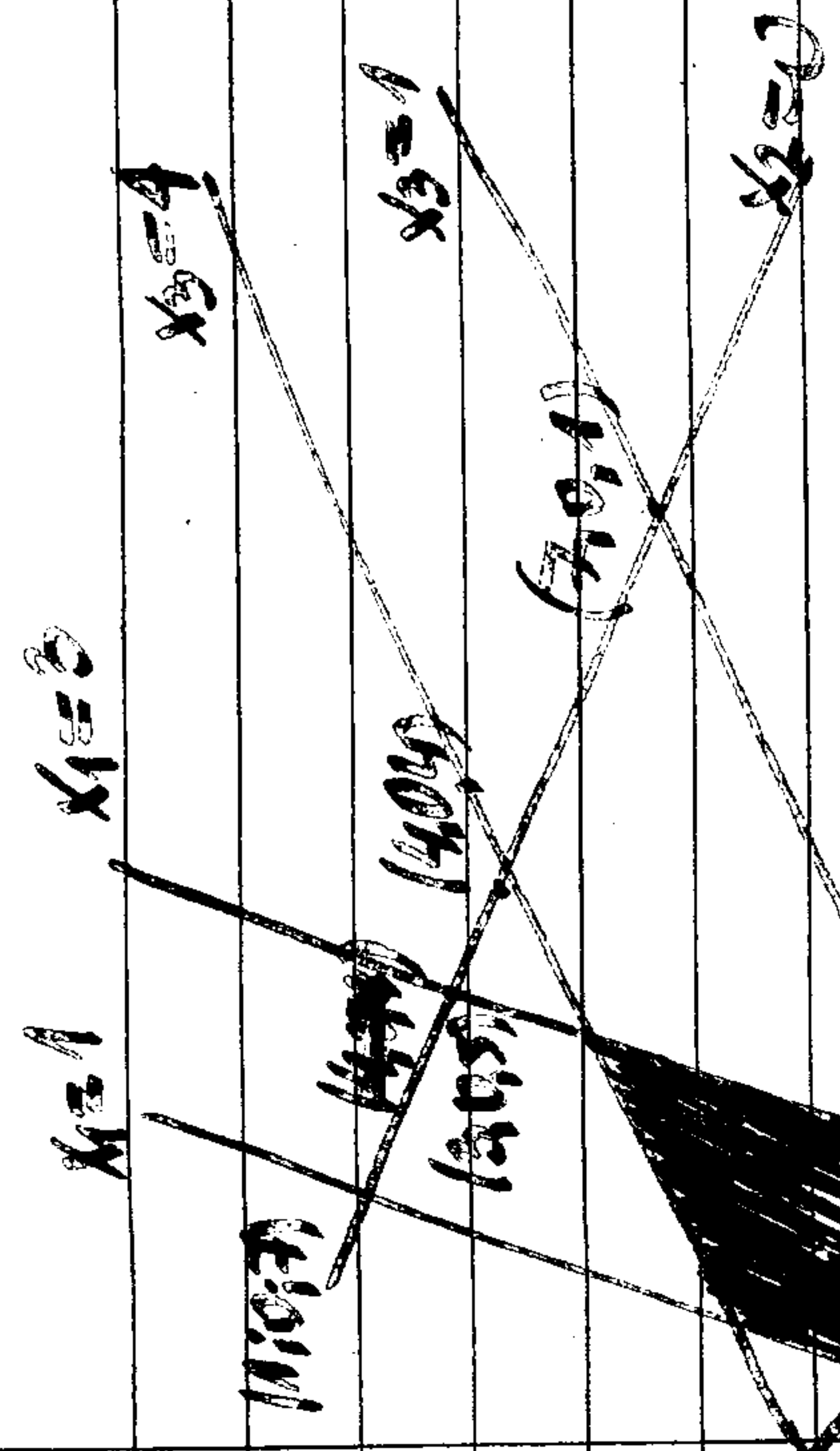
$x_3 = 0 \quad x_1 = 0$

пример: $N = 41; 2; 34$
 $V(114) = 1, V(124) = 0, V(134) = 1$
 $V(11, 24) = 1, V(11, 34) = 0, V(12, 34) = 1$
 $V(11, 2, 34) = 1$

где $\Phi(V) = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,$

$x_3 = 1 \quad \leftarrow x_1 + x_2 = 0,$
 $x_2 = 1 \quad \leftarrow x_1 + x_3 = 0,$
 $x_1 = 1 \quad \leftarrow x_2 + x_3 = 0;$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$



6.6. равны ли
 $x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$x_2 = 0$

$V(N) = \sum_{i=1}^n V(i;4) \leftarrow$ существование

игра с постоянной суммой
 (нечестно)

$$V(N) = V(S) + V(N \setminus S)$$

$$P(V) \leq \Delta(V):$$

$P(V)$ с n, m -разменами ако има
 идентичные две! свойства:
 • втретична устойчивост:
 никакви две групи от множеств
 всто не са сравнимы по мощи

сш: • втретична устойчивост:
 $y \notin P(V), x \in P(V)$

$$x \geq y$$

$$V(i;4) = 0 \quad V(N) = V(S) + V(N \setminus S)$$

$$V(i;4) = 1$$

$$V(1,2,3,4) = 1$$

$$1 \times x = (x_1, \dots, x_n) \in \Phi$$

$$x_i = V(i;4) - \sum_{j=1}^i x_j$$

$$x_i = 1$$

$$\in V(N) - V(N \setminus S)$$

существование

$$x_i = V(i;4) - \sum_{j=1}^i x_j$$

$$x_i = 1$$

$\sum x_i = v(n)$ $\Rightarrow$ $\sum v(x_i)$
Значит на базе
симметрично и
е. равно.

$$p(v) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

исправленным со
 $\Rightarrow$ временно установлено

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = x$$

$$y_i > x_i, i \in S$$

$$x_i = (x_1, x_2, x_3) \quad x_i \geq 0, i=1,2,3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$(A.C.) \quad x_3 > 1 \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} > x$$

$$(B.C.) \quad x_3 = 1 \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} > x$$

201

Тази игра има 3 равновесия по Ней:

71

x_1	x_2	u_1	u_2
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{16}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{16}$	0

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{16}$ $-\frac{1}{16}$ + алтн са и
реализират загуби

При повече от едно равновесие по Ней не е ясно какво да се прави.

$$u_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot (1 - x_1 - x_2) - \left(\frac{1}{2} x_1 - \frac{3}{4} x_1^2 \right)$$

$$u_2(x_1, x_2) = x_2 \cdot (1 - x_1 - x_2) - \left(\frac{1}{2} x_2 - \frac{3}{4} x_2^2 \right)$$

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2^*) &= x_1 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2^* - \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{4} x_1^2 = \\ &= -\frac{1}{4} x_1^2 + \frac{1}{2} x_1 - x_1 \cdot x_2^* \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} - x_2^*$$

$$\text{Аналогично } \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} - x_1^*$$

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = 1 \\ 2x_1^* + x_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3}}$$

$$x_1^* = 0$$

$$\Rightarrow u_2(0, x_2) = x_2 \cdot (1 - x_2) - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 =$$

$$= x_2 - x_2^2 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_2^2 = -\frac{1}{4} x_2^2 + \frac{1}{2} x_2$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$

$$x_2 \in [0; \frac{1}{2}]$$

$$\Rightarrow \underline{x_2^* = \frac{1}{2}}$$

$$u_1(x_1, \frac{1}{2}) = x_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - x_1 \right) - \frac{1}{2} x_1 + \frac{3}{4} x_1^2 = -\frac{1}{4} x_1^2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{2} x_1 = 0 \Rightarrow \underline{x_1^* = 0}$$

$$\text{Аналогично за } \underline{x_1^* = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2^* = 0}$$

$\Rightarrow$ Равновесие по Неш:

$$1) x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3} \quad 2) x_1^* = 0, x_2^* = \frac{1}{2} \quad 3) x_1^* = \frac{1}{2}, x_2^* = 0$$

15.01.2015г.

Теория на
игрите ⁸³ ①

$$S \subset \{1, \dots, n\} =: N$$

$$1. v(\emptyset) = 0$$

$$2. v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

$$S \cap T = \emptyset$$

$$\Delta(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} x_i \geq v(\{i\}) \\ i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_i = v(N) \end{array} \right\}$$

Нека $x, y \in \Delta(v)$
(са дадени)

$$y \succ x \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_i < y_i, \forall i \in S \\ \sum_{i \in S} y_i \leq v(S) \end{array}$$

y доминира над x ,
 x се доминира от y .

$$x \in \phi(u) \subset \Delta(u) \Leftrightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

⇒ доказано от минимален път.

⇐ (продължение от минимален път).

$$\parallel y_i = x_i + \frac{\varepsilon}{S}, \varepsilon > 0 \text{ за } i \in S$$

$$v(N) \geq v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\})$$

$$\delta = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) \geq 0.$$

$$y_i = v(\{i\}) + \frac{\delta}{n-S}, i \in N \setminus S$$

$$\Rightarrow y \in \Delta(v);$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i \in S} y_i + \sum_{i \in N \setminus S} y_i = v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + \delta =$$

$$= v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) + v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) =$$

$$= v(N)$$

Пример:

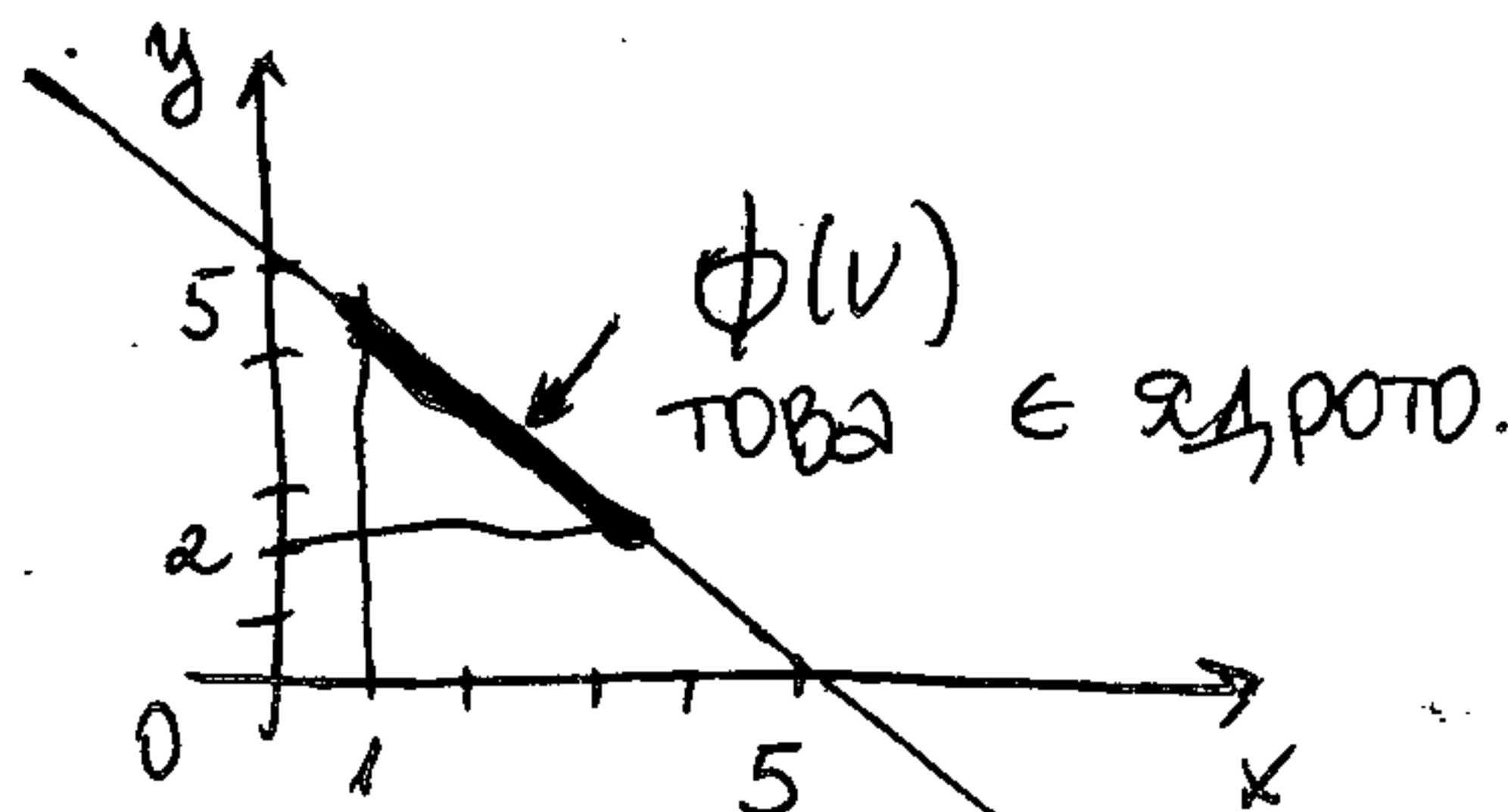
$$N = \{1, 2\}$$

$$v(\{1\}) = 1$$

$$v(\{2\}) = 2$$

$$v(\{1, 2\}) = 5$$

Дро на играта: $\phi(v) = h(x; y) \in \mathbb{R}^2$: $x + y = 5$; $x \geq 1$; $y \geq 2$



Пример:

$$N = \{1, 2, 3\}$$

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = \alpha$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = 1$$

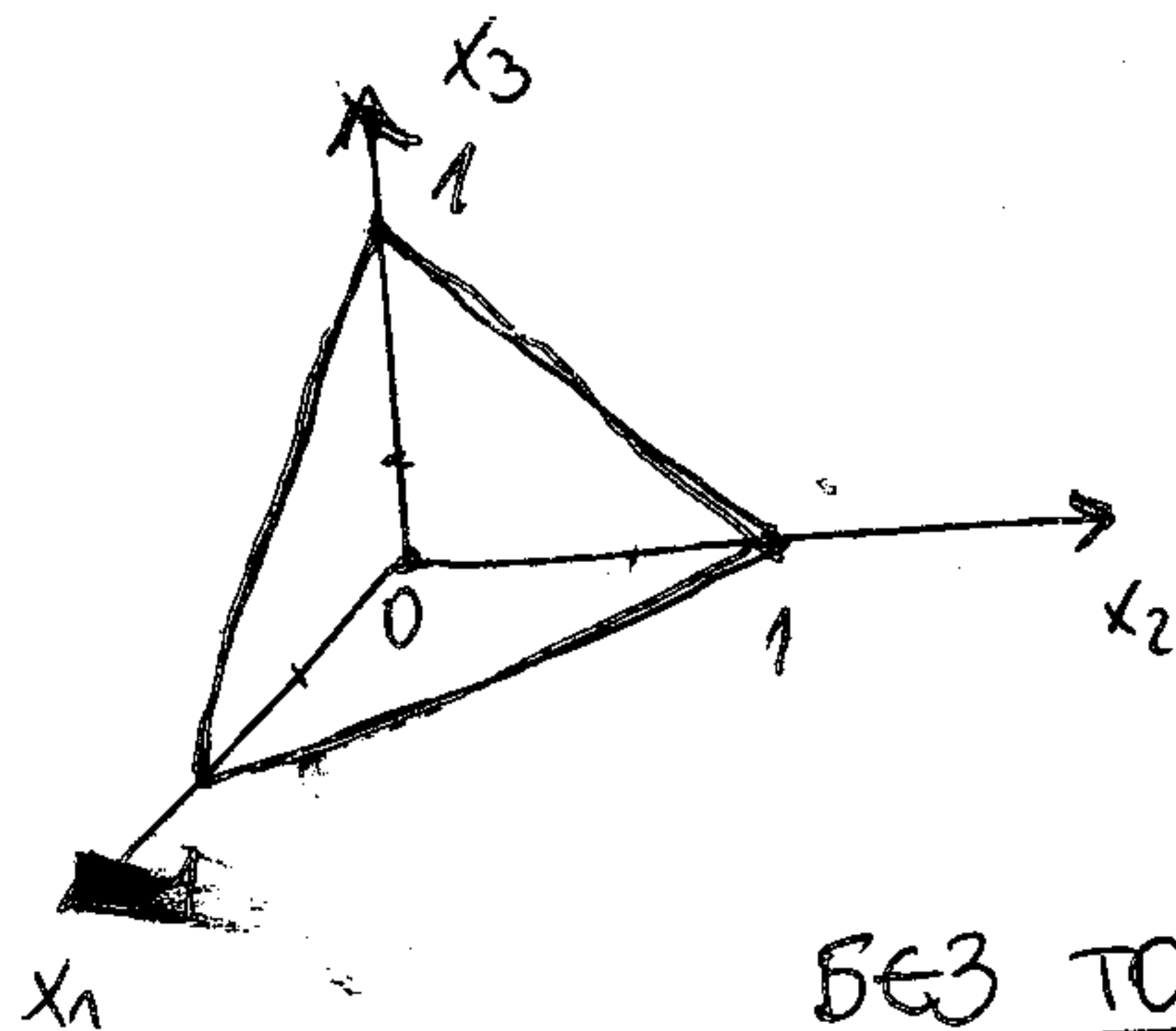
От свойствата на дроба $\Rightarrow \alpha = v(\{1, 2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\}) = 0 + 0$
 $\Rightarrow \alpha \geq 0$.

$$1 = v(\{1, 2, 3\}) \geq v(\{1, 2\}) + v(\{3\}) = \alpha + 0$$

$$\Rightarrow \alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \alpha \in [0, 1]$$

Дроото $\phi(v) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \geq \alpha, x_1 + x_3 \geq \alpha, x_2 + x_3 \geq \alpha \}$



$\alpha = 1 \Rightarrow \Delta : (0, 0, 1) - (0, 1, 0) - (1, 0, 0) \rightarrow$ само контур

БЕЗ ТОВА.

Дроото $\phi(v) = h(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$: $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$;

$$x_1 + x_2 \geq \alpha; x_1 + x_3 \geq \alpha; x_2 + x_3 \geq \alpha$$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$$x_3 \leq 1 - \alpha$$

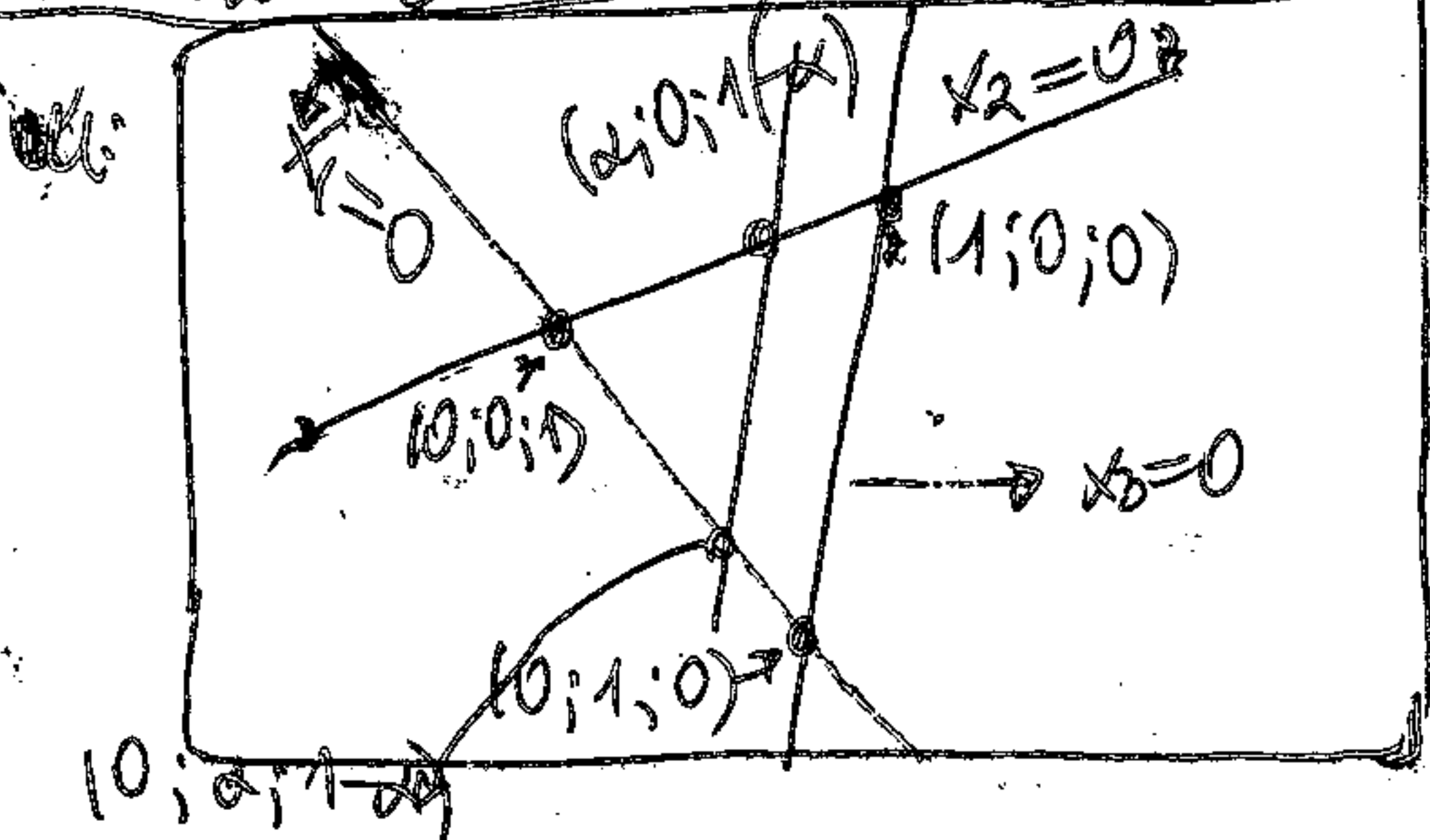
$$x_2 \leq 1 - \alpha$$

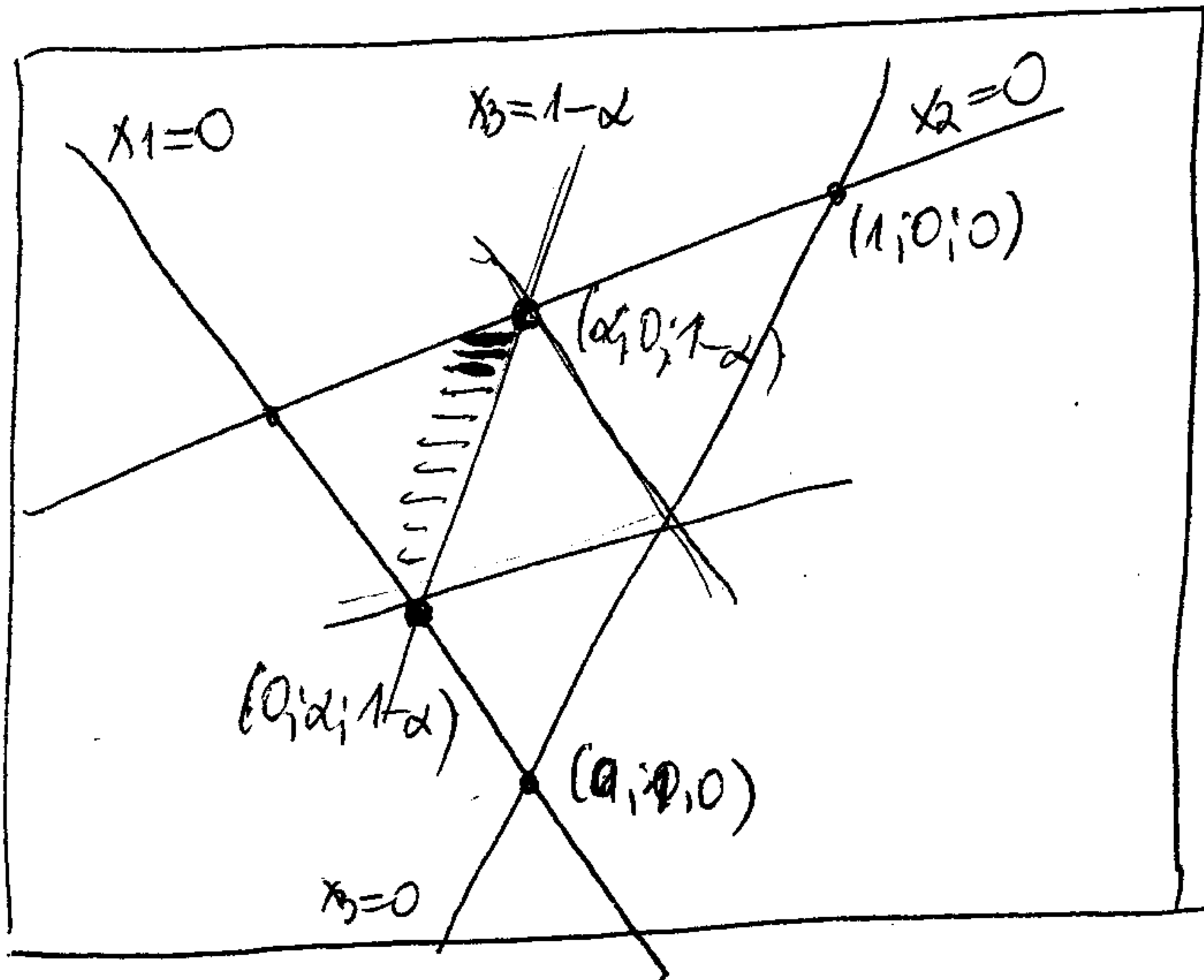
$$x_1 \leq 1 - \alpha$$

Δ с върхове $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ е множиството от всички дроба

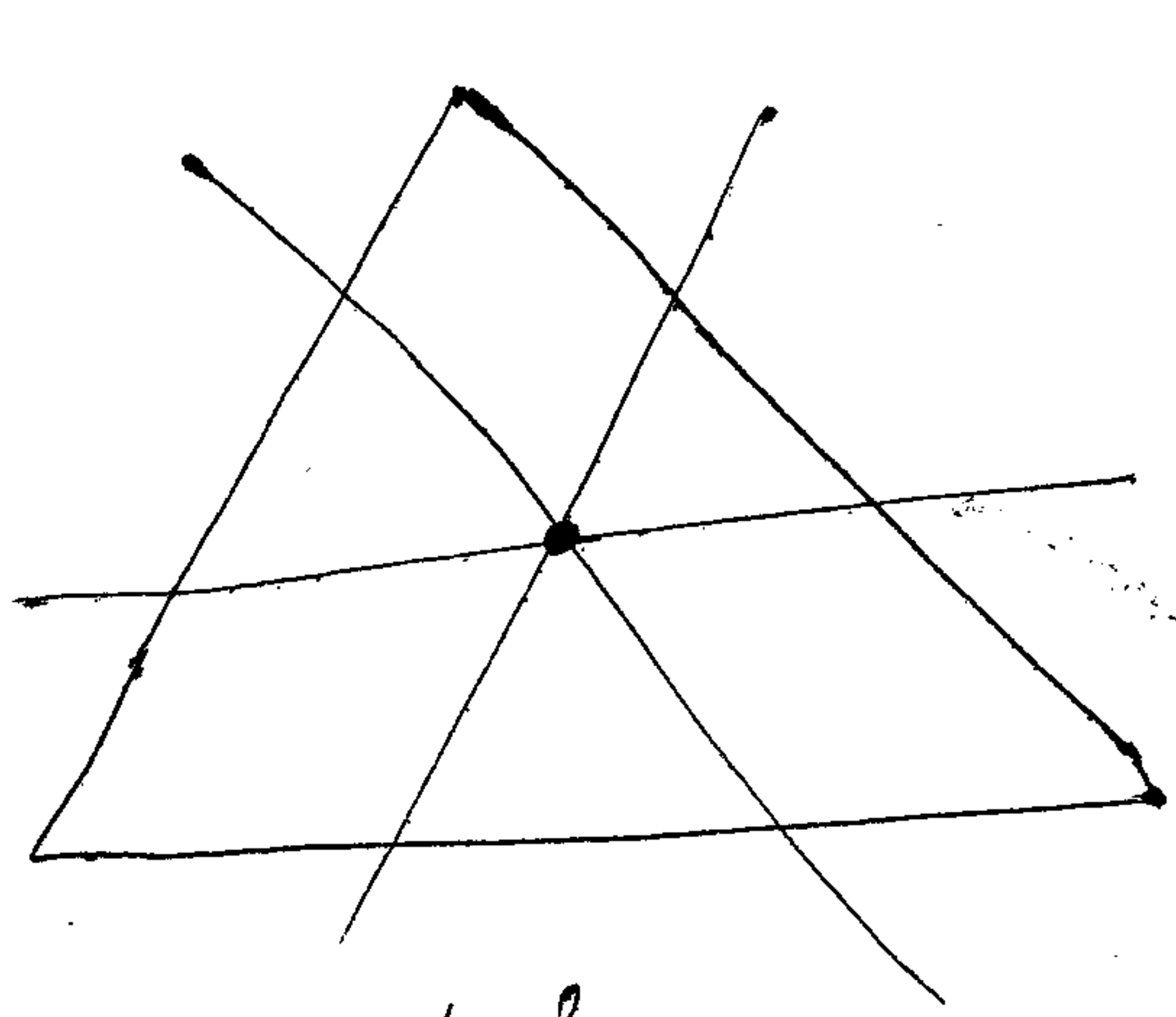
$$x_1 + x_2 \geq \alpha \Rightarrow x_3 \leq 1 - \alpha$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$



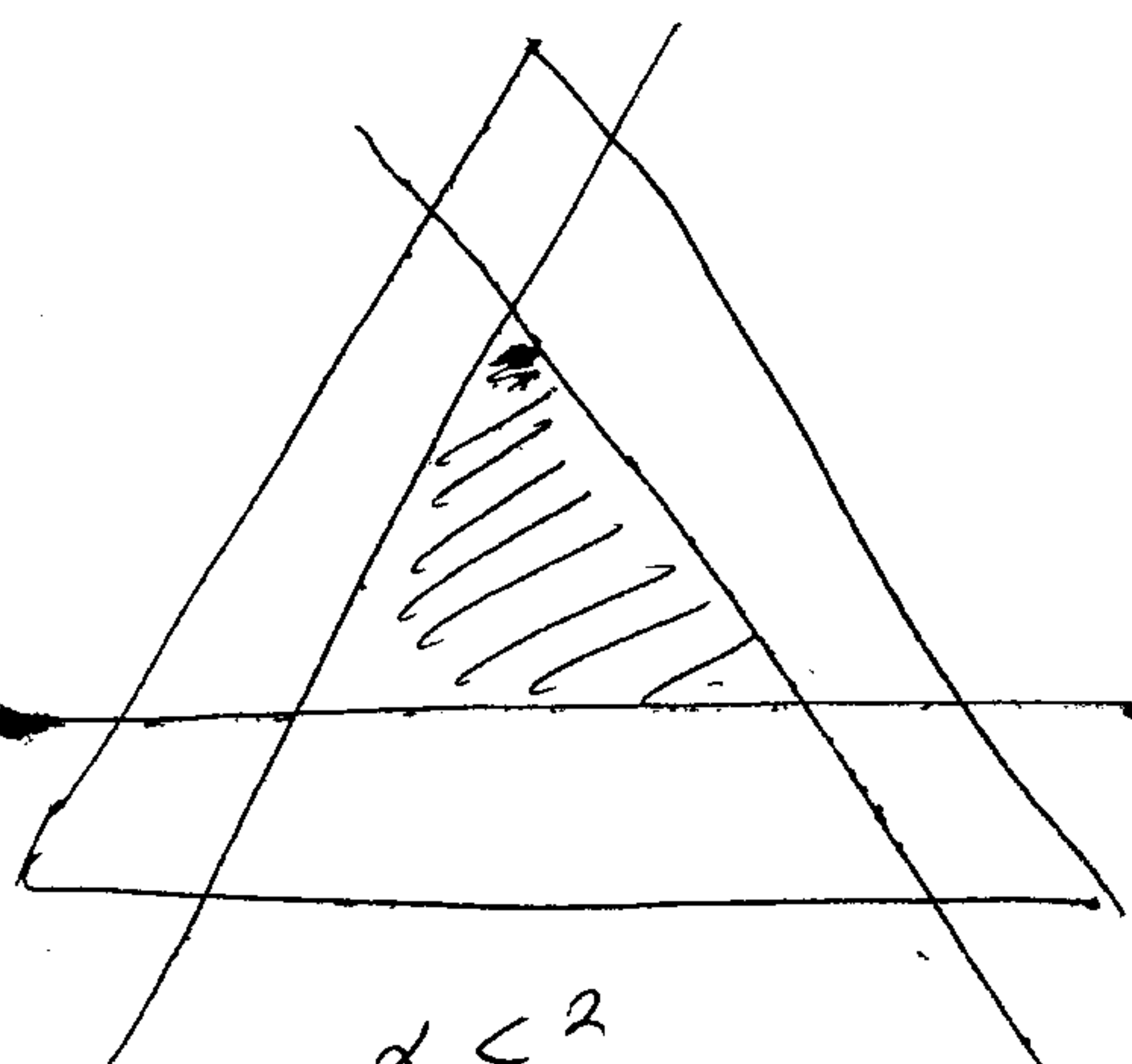


$$\alpha \leq \frac{2}{3}$$



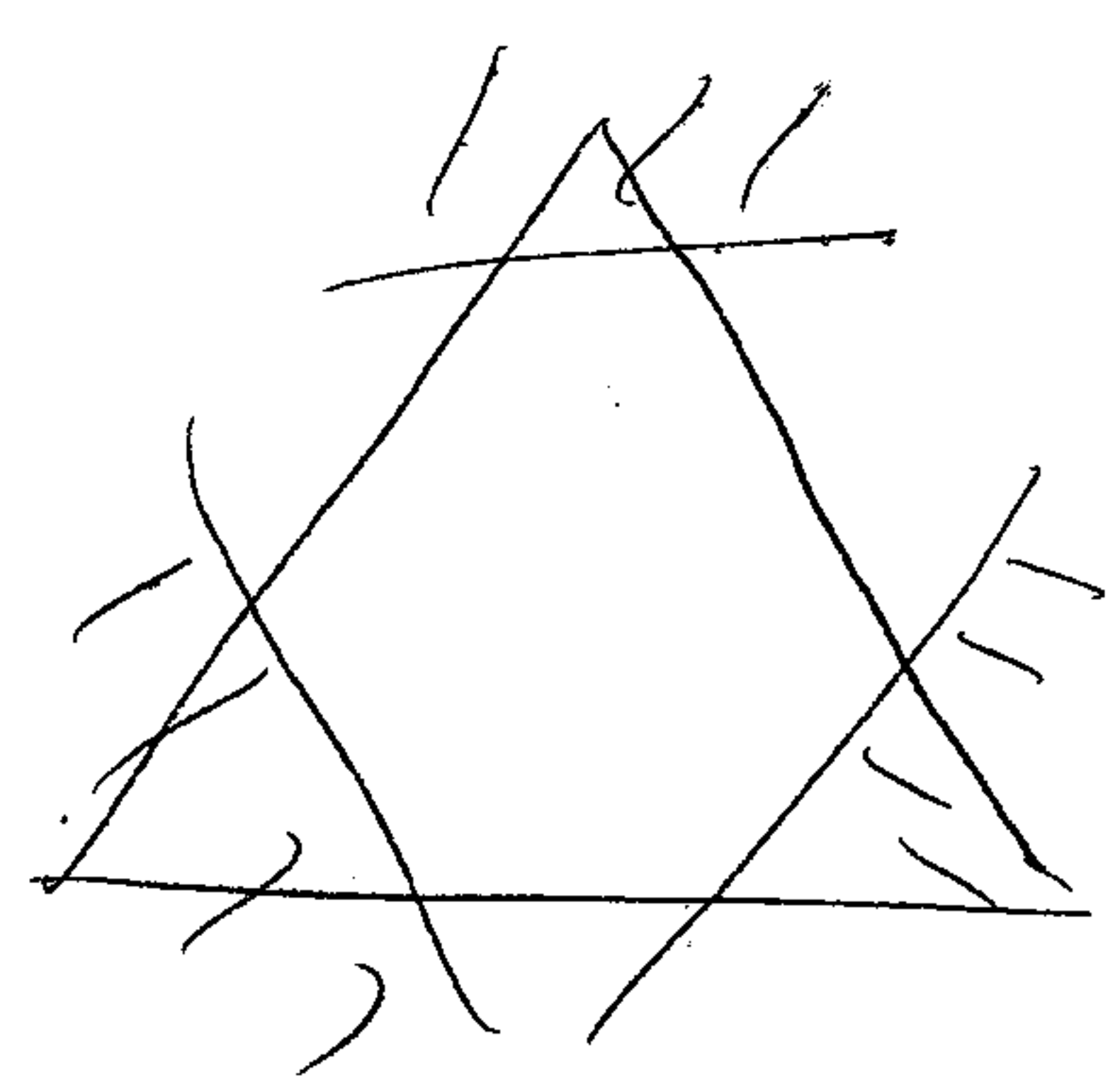
$$\alpha = \frac{2}{3}$$

точка



$$\alpha < \frac{2}{3}$$

Δ .



$$\alpha > \frac{2}{3}$$

$\emptyset$.

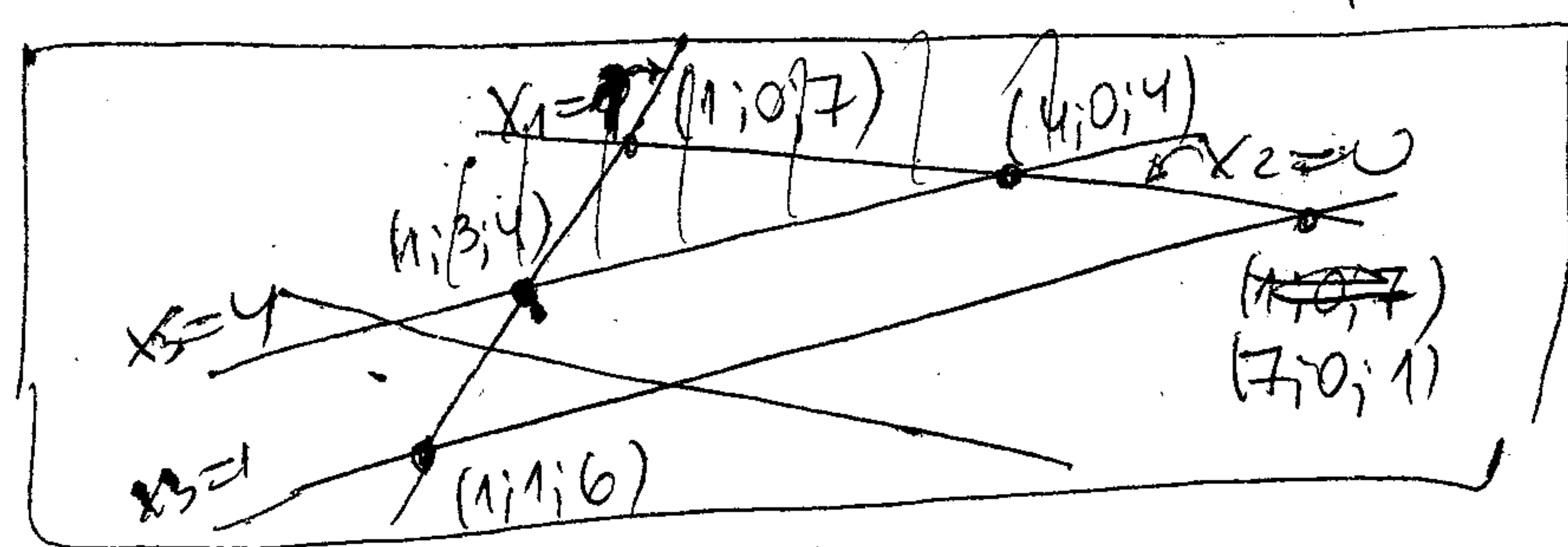
$$N = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$v(\{1, 4\}) = 1, v(\{2, 4\}) = 0, v(\{1, 3\}) = 1$$

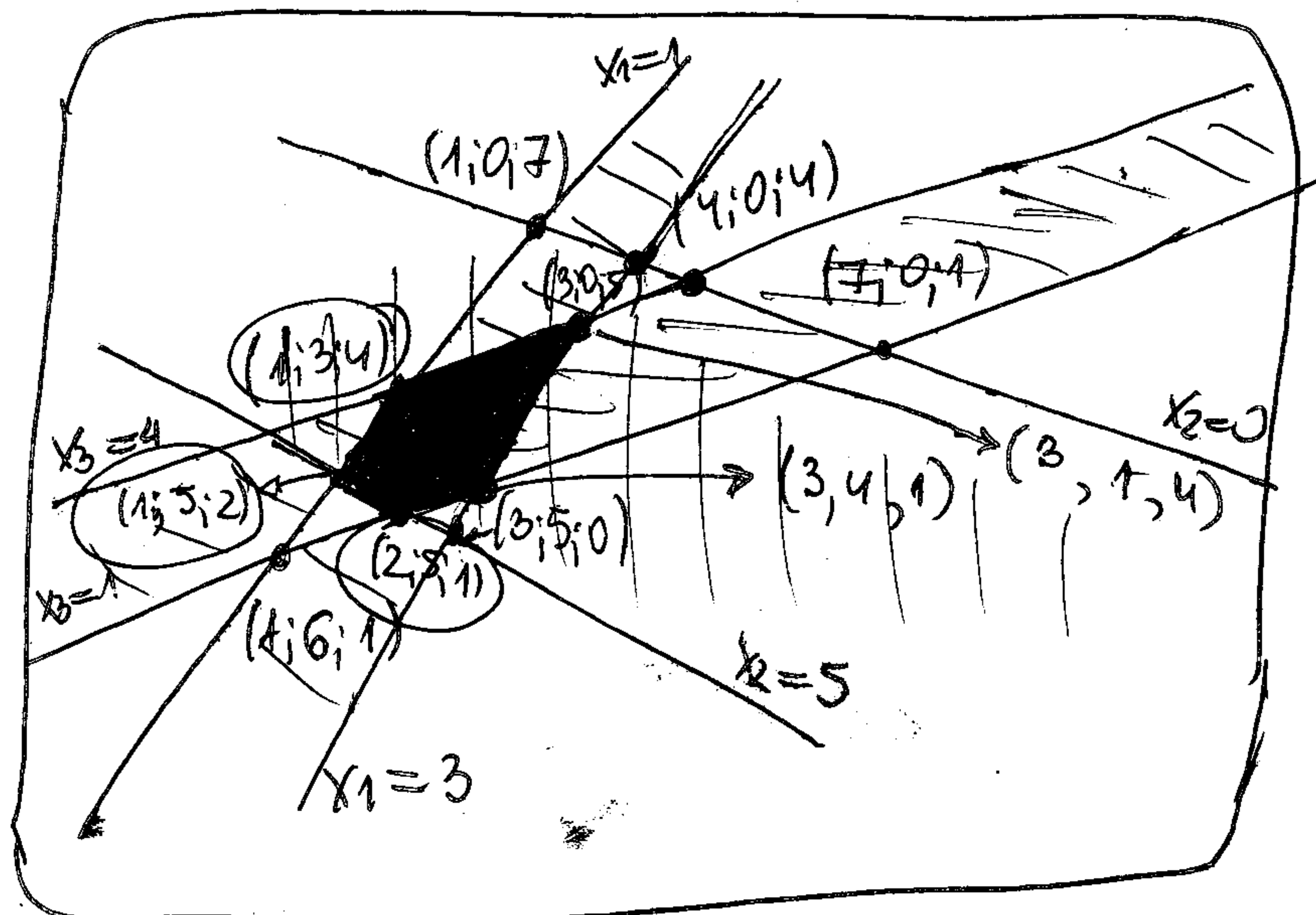
$$v(\{1, 2, 4\}) = 4, v(\{1, 3, 4\}) = 3, v(\{2, 3, 4\}) = 3$$

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 8$$

Задача: $\phi(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 8; x_1 \geq 1; x_2 \geq 0; x_3 \geq 1;$
 $x_1 + x_2 \geq 4; x_1 + x_3 \geq 3; x_2 + x_3 \geq 5\}$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$



$$v(N) > \sum_{i=1}^n v(\{i\})$$

общественна игра

Игра с постоянна сума: $v(N) = v(S) + v(N \setminus S)$
(нулева)

Пример за игра с постоянна сума
• ето множество от деляци не е празно.

$P(v) \subseteq \Delta(v)$ → н.м. решение ако има следните две свойства

• вътрешна устойчивост → никои две деляци от множеството не са сравними помежду си.

• външна устойчивост → $y \notin P(v), x \in P(v)$
 $\forall x > y$

$$v(\{i\}) = 0$$

$$v(\{i, j\}) = 1$$

$$v(\{i, j, k\}) = 1$$

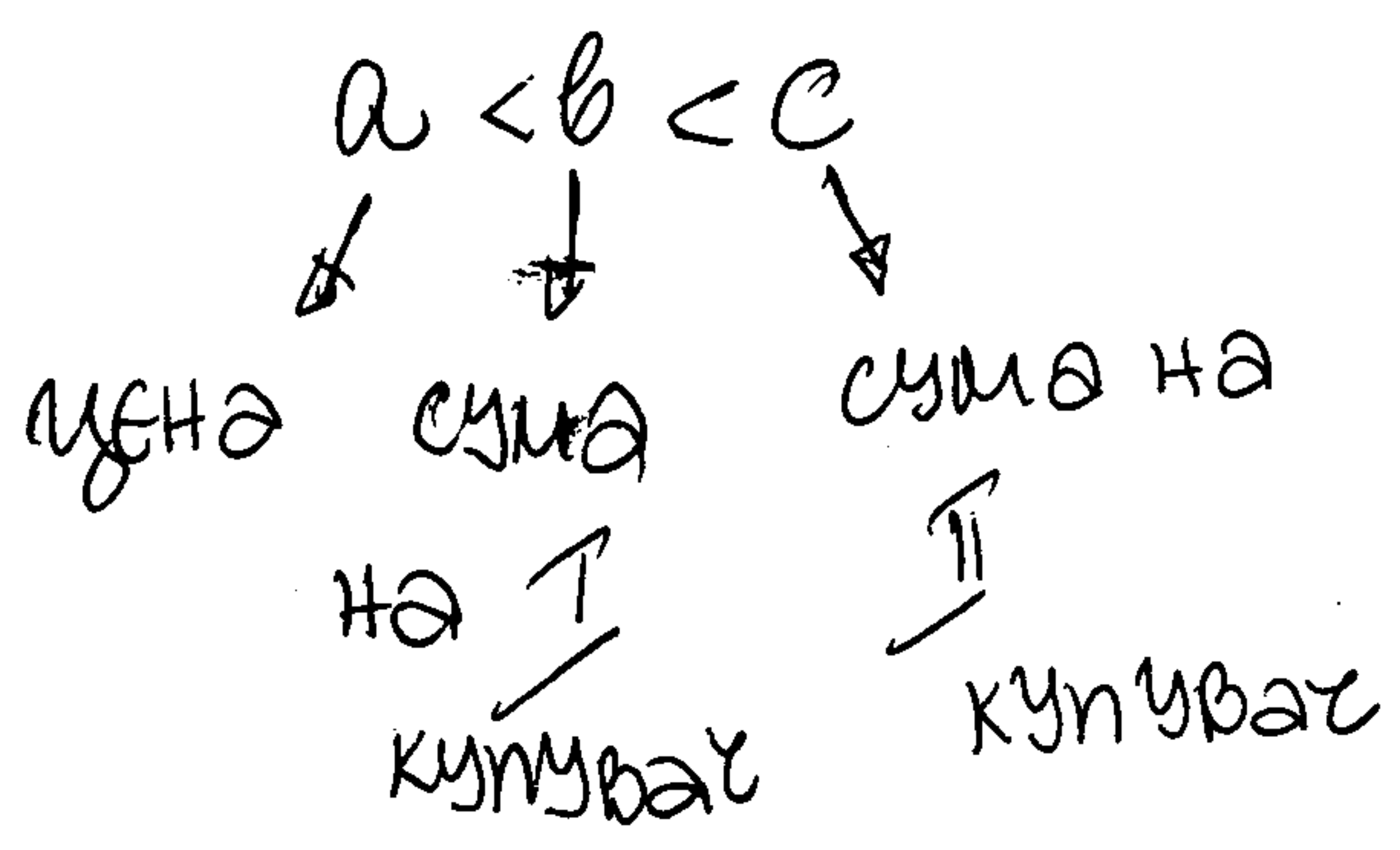
$$v(N) = v(S) + v(N \setminus S).$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Phi$$

$$x_i = v(N) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \leq$$

$$\leq v(N) - v(N \setminus \{i\}),$$

защото $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \geq v(N \setminus \{i\})$



$$\begin{aligned}
 v(\{1\}) &= a \\
 v(\{2\}) &= 0 \\
 v(\{3\}) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(\{2,3\}) &= 0 \\
 v(\{1,3\}) &= c \\
 v(\{1,2\}) &= b
 \end{aligned}$$

$$v(\{1,2,3\}) = c$$

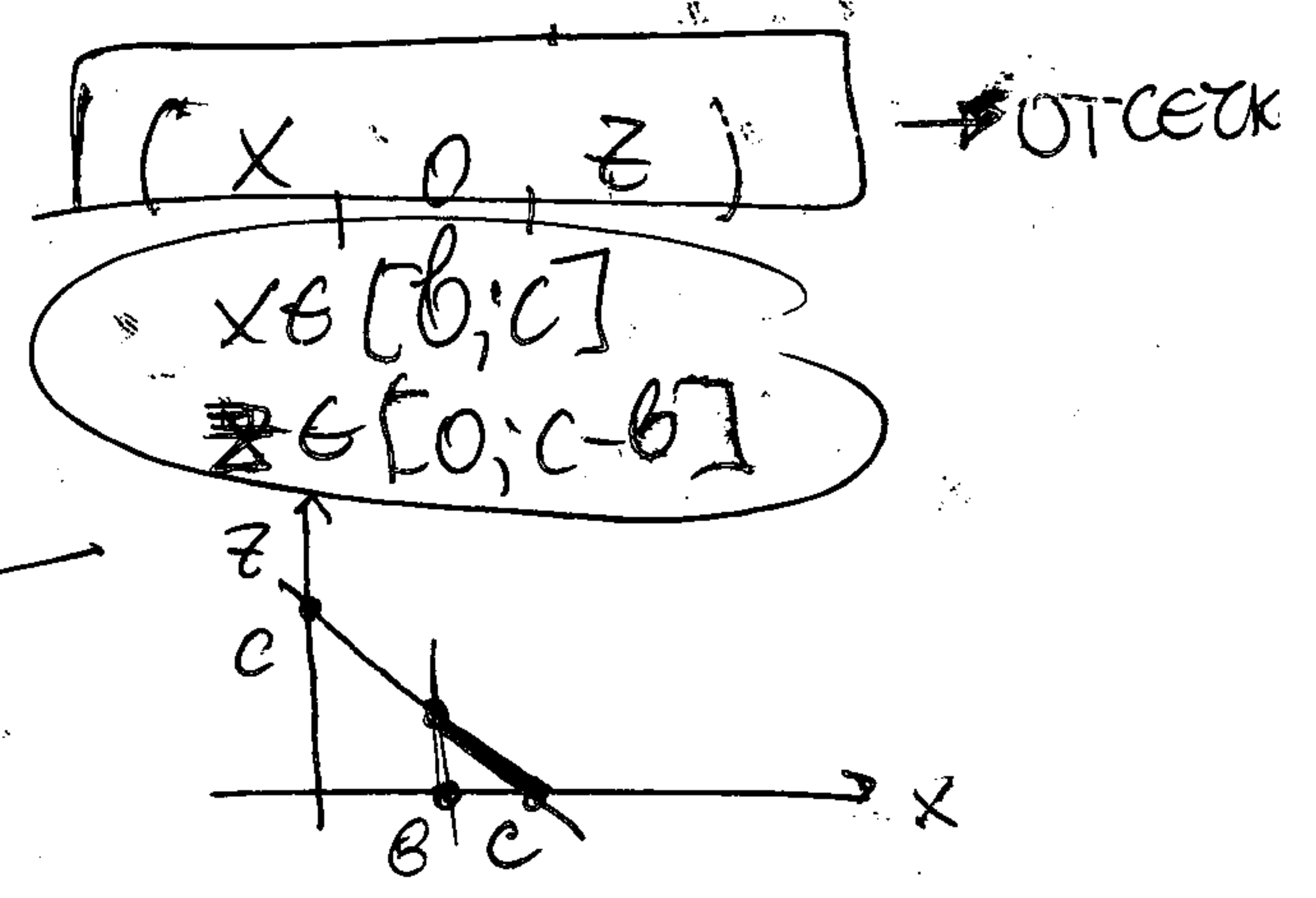
Тогда $\phi(v) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = c, \\ &x_1 \geq a, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ &x_1 + x_2 \geq b, x_1 + x_3 \geq c, x_2 + x_3 \geq 0 \end{aligned}\}$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$
 $x_3 \leq c - b \quad x_2 \leq 0 \quad x_1 \leq c$

$\Downarrow$
 $x_2 = 0$
 $x_1 + x_3 = c$

$$\begin{aligned}
 b &= v(\{1,2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\}) = a + 0 \checkmark \\
 c &= v(\{1,3\}) \geq v(\{1\}) + v(\{3\}) = a + 0 \checkmark \\
 0 &= v(\{2,3\}) \geq v(\{2\}) + v(\{3\}) = 0 + 0 \checkmark \\
 c &= v(\{1,2,3\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2,3\}) = a + 0 \checkmark \\
 &\geq v(\{2\}) + v(\{1,3\}) = 0 + c \checkmark \\
 &\geq v(\{3\}) + v(\{1,2\}) = 0 + b \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 0 \\
 x_1 &\leq c \\
 x_3 &\leq c - b \\
 x_1 + x_3 &= c \\
 x_3 &\geq 0 \\
 x_1 &\geq b
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 x + y + z &= c \\
 y &= 0 \Rightarrow x + z = c
 \end{aligned}$$

$$\sum x_i = v(N)$$

||

$$\sum v(i|y)$$

удрото на всяка симетрична игра (5)
е правдог.

78

* Н-м-решение?
*/

$$P(v) = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

→ Несравним с
⇒ Втрешно устойчиво.

$$1. y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \succ_S \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = x$$

$$y_i > x_i, i \in S$$

$$x \notin P(v)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$\text{БОО } x_1 \leq x_2 \leq x_3$$

$$1ca) x_3 > \frac{1}{2} \rightarrow S = \{1, 2\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) > x.$$

(доминира)

$$2ca) x_3 = \frac{1}{2} \rightarrow \text{---} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) > x$$

$$3ca) x_3 < \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) > x$$

$$0 < c < \frac{1}{2} : P(v) = \{ (c, x, y) : x \geq 0, y \geq 0; x + y + c = 1 \}$$

Может ли $P(v)$ да е н-м решение?

Втр устойчивост:

$$(c, x_1, y_1) \succ (c, x_2, y_2)$$

$$\text{или } x_1 > x_2,$$

$$\text{или } y_1 > y_2 \text{ но не и двете}$$

⇒ има втрешна устойчивост.

$$x = (x_1, x_2, x_3), x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

$$x_1 \neq c$$

$$x_1 > c, \text{ т.е.}$$

$$1.) x_1 = c + \varepsilon \Rightarrow y = \left(c, x_2 + \frac{\varepsilon}{2}, x_3 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \Rightarrow y \succ x \Rightarrow \frac{c + \varepsilon}{2} + x_2 + x_3 = 1$$

$$\varepsilon > 0$$

$$\text{БОО: } 2x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$2.)$$

$$x_1 < c, \text{ т.е.}$$

$$x_1 = c - \varepsilon \Rightarrow y = (c, c, 0) \quad // \quad x_2 > \frac{1}{2} \rightarrow \text{противоречие}$$

$$x_3 > \frac{1}{2} \text{ т.к. сумма } = 1$$

$$\Phi(V) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y=0, x+z=C, x \geq 0, z \geq 0 \}$$

zg

(2)

! има ? ? ?
• дръжката от ляво.

$$I(k) = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k-1} dx = \int_0^1 (1-x)^{n-k-1} d \frac{x^{k+1}}{k+1} =$$

$$= \underbrace{(1-x)^{n-k-1} \frac{x^{k+1}}{k+1}}_{\substack{1-x=0 \text{ при } x=1 \\ x=0 \text{ при } k=0}} \bigg|_0^1 + \frac{(n-k+1)}{k+1} \int_0^1 (1-x)^{n-k-2} x^{k+1} dx =$$

$1-x=0$ при $x=1$

$x=0$ при $k=0$

$\Rightarrow$

$=0$

$$= \frac{(n-k+1)! k!}{n}$$

22.01.2015г.Теория на играе

$$\textcircled{1^*} V(S \cup T) \geq V(S) + V(T) \\ S \cap T = \emptyset$$

$$\textcircled{2^*} V(\emptyset) = 0$$

$T \subset N = \{1, 2, \dots, n\} \leftarrow \begin{matrix} T \text{ е} \\ \text{носител} \end{matrix}$

Очевидно N е носител на всяка игра.
 $S \rightarrow$ произволна коалиция
 $\Rightarrow V(S) = V(S \cap T)$

На игра съпоставяме $\varphi(v) \neq$ глба. (ще построим $\varphi(v)$ и ще
 Свойства: } покажем, че е
 глба)

$$\textcircled{1} \sum_{i \in T} \varphi_i(v) = V(T), \text{ ако } T \text{ е носител}$$

$$\pi V(S) = V(\pi^{-1}(S))$$

$\pi \leftarrow$ функции (пермутации)
 $\Rightarrow \pi(T)$ е характеристична функция

$$\textcircled{2} \varphi_{\pi(i)}(\pi v) = \varphi_i(v)$$

$$\textcircled{3} \varphi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \varphi_i(v) + \beta \varphi_i(w)$$

Формално α и β са неотрицателни, за да
 могат да удовлетворяват свойства на

$$\textcircled{1^*} \text{ и } \textcircled{2^*}$$

$$S \neq \emptyset$$

Взимаме множество $S \rightarrow$ произволна коалиция.

$$\Rightarrow w_S(T) = \begin{cases} 1, & T \supseteq S \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\Rightarrow w_S(T)$ е характеристична функция:

(2*) е очевидно

за (1*): $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

$$w_S(T_1 \cup T_2) = \begin{cases} 1, & T_1 \cup T_2 \supseteq S \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Въпрос: S носител ли е на тази характеристична функция?

$$\left. \begin{array}{l} S \cap T \supseteq S // (T \supseteq S) \\ 1 = v(S \cap T) = v(T) \end{array} \right\} \begin{array}{l} S \cap T \not\supseteq S // (T \not\supseteq S) \\ v(S \cap T) = 0 = v(T) \end{array}$$

$\Rightarrow S$ е носител на тази характеристична функция

Всяко множество, което съдържа S , е носител по същата причина.

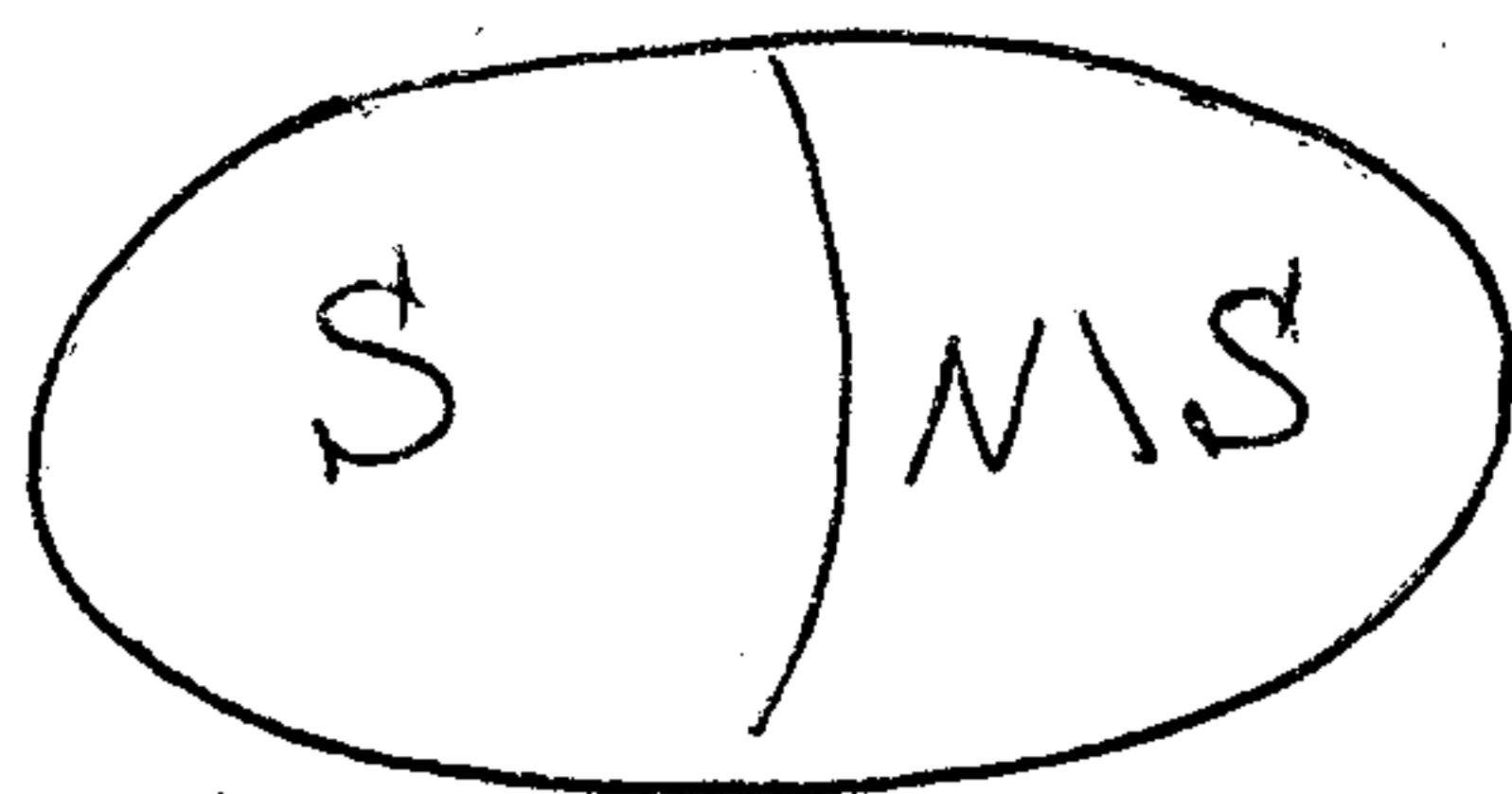
$$\Rightarrow \sum_{i \in S} \psi_i(w_S) = v(S) = 1.$$

Взимаме индекс j , $j \notin S$:

$$\sum_{i \in S \cup \{j\}} \psi_i(w_S) = 1 = v(S \cup \{j\})$$

$$\psi_i(w_S) = \frac{1}{s}, \quad i \in S, \quad s = |S|, \text{ защото}$$

не правим разлика между елементите на S



$$\pi w_S(\tau) = w_S(\pi^{-1}(\tau)) = \begin{cases} 1 & , \tau \supseteq S \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi w_S = w_S$, ако π не "пипа" елементи извън S .

$\pi: \begin{matrix} i \rightarrow j \\ \bar{j} \rightarrow i \end{matrix} \rightarrow$ и от свойствата.

$\Rightarrow \ell(w)$ е максимална е глба, защото:

$$x_i \geq w_S(\{i\})$$

Ако $|S| \geq 2 \Rightarrow \underline{\text{OK}}$

Ако $S = \{i\} \Rightarrow x_i = 1$ и $w_S(\{i\}) = 1 \Rightarrow$
имаме р-во $\Rightarrow \underline{\text{OK}}$

$$(\alpha v + \beta w)(S) = \alpha v(S) + \beta w(S)$$

Нека $w(S)$ е характеристична функция;

$$* \quad w(S) = \alpha w_1(S) + \beta w_2(S), \quad S \subseteq N$$

w е характеристична функция

Ако $\alpha < 0, \beta > 0$

$$\Rightarrow w_2(S) = \frac{1}{\beta} w(S) - \frac{\alpha}{\beta} w_1(S)$$

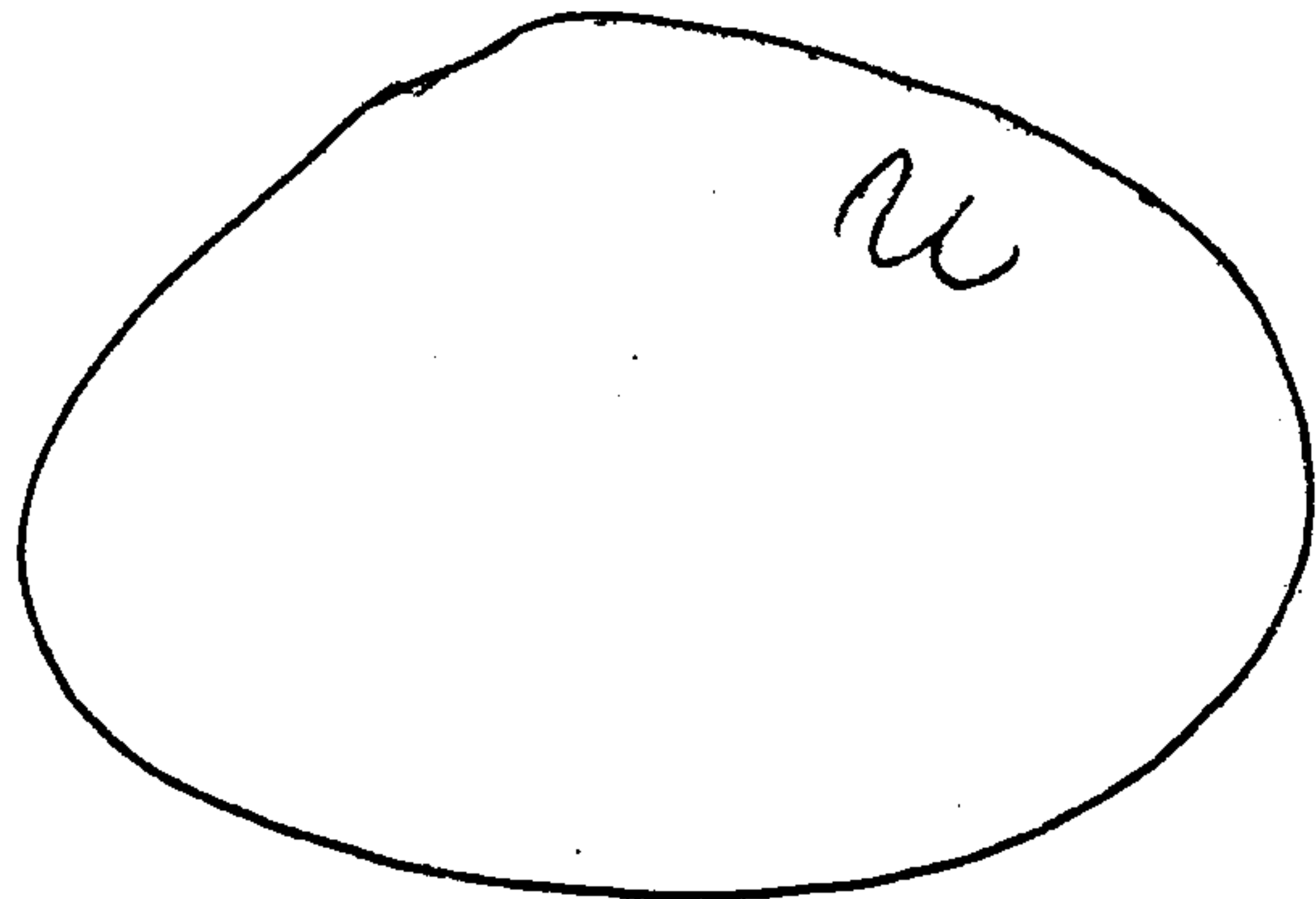
$$\Rightarrow \ell_i(w_2) = \frac{1}{\beta} \ell_i(w) - \frac{\alpha}{\beta} \ell_i(w_1)$$

$$\Rightarrow \ell_i(w) = \alpha \ell_i(w_1) + \beta \ell_i(w_2)$$

$$(a-b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-b)^j a^{k-j}$$

В частност: $0 = (1-1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j 1^{k-j}$

множество u и
елемента u между
тех искане да из-
берем S , $S \subseteq u$:
Правилно това по
$$\binom{u}{s} = \frac{u!}{s!(u-s)!}$$



Взимаме произволна характеристична
функция v :

$$v = \sum_{S \subseteq N} c_S w_S; \text{ коефициентите } c_S \text{ за да}$$

от от стойностите на v :

$$c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)$$

$t = |T|$

$$u \subseteq N, |u| = u$$

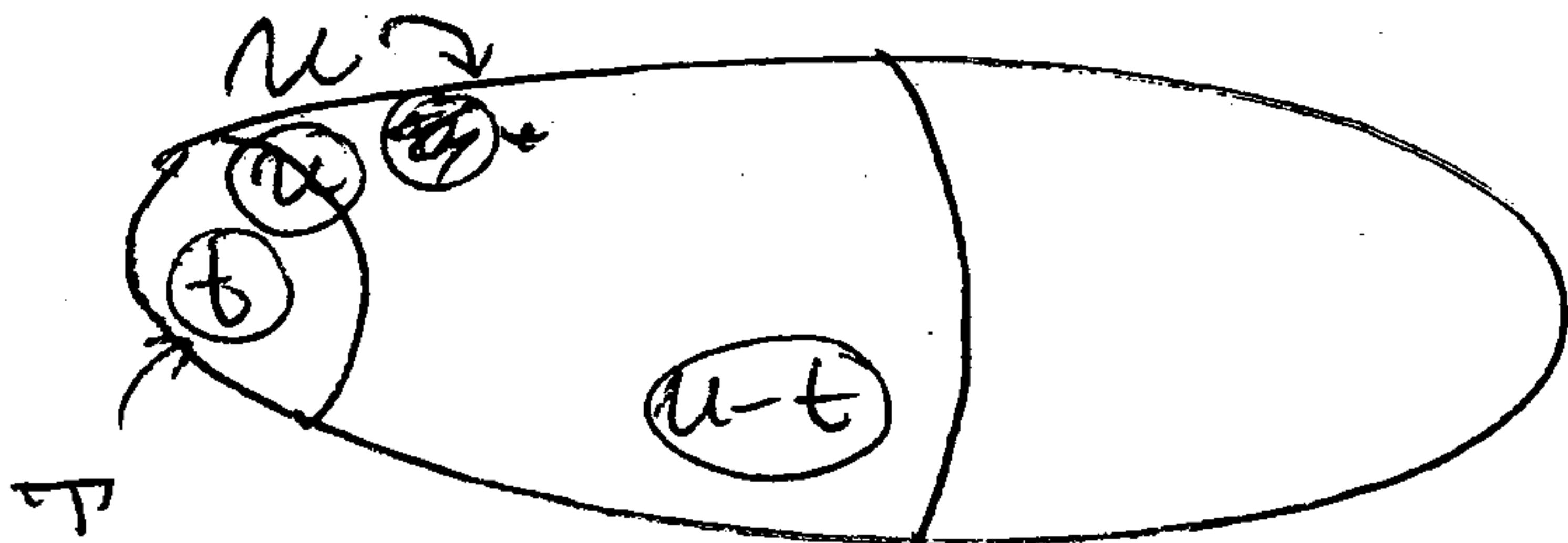
$$\sum_{S \subseteq N} c_S w_S(u) = \sum_{S \subseteq u} c_S \overset{1}{w_S(u)} =$$

$$= \sum_{S \subseteq u} \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)$$

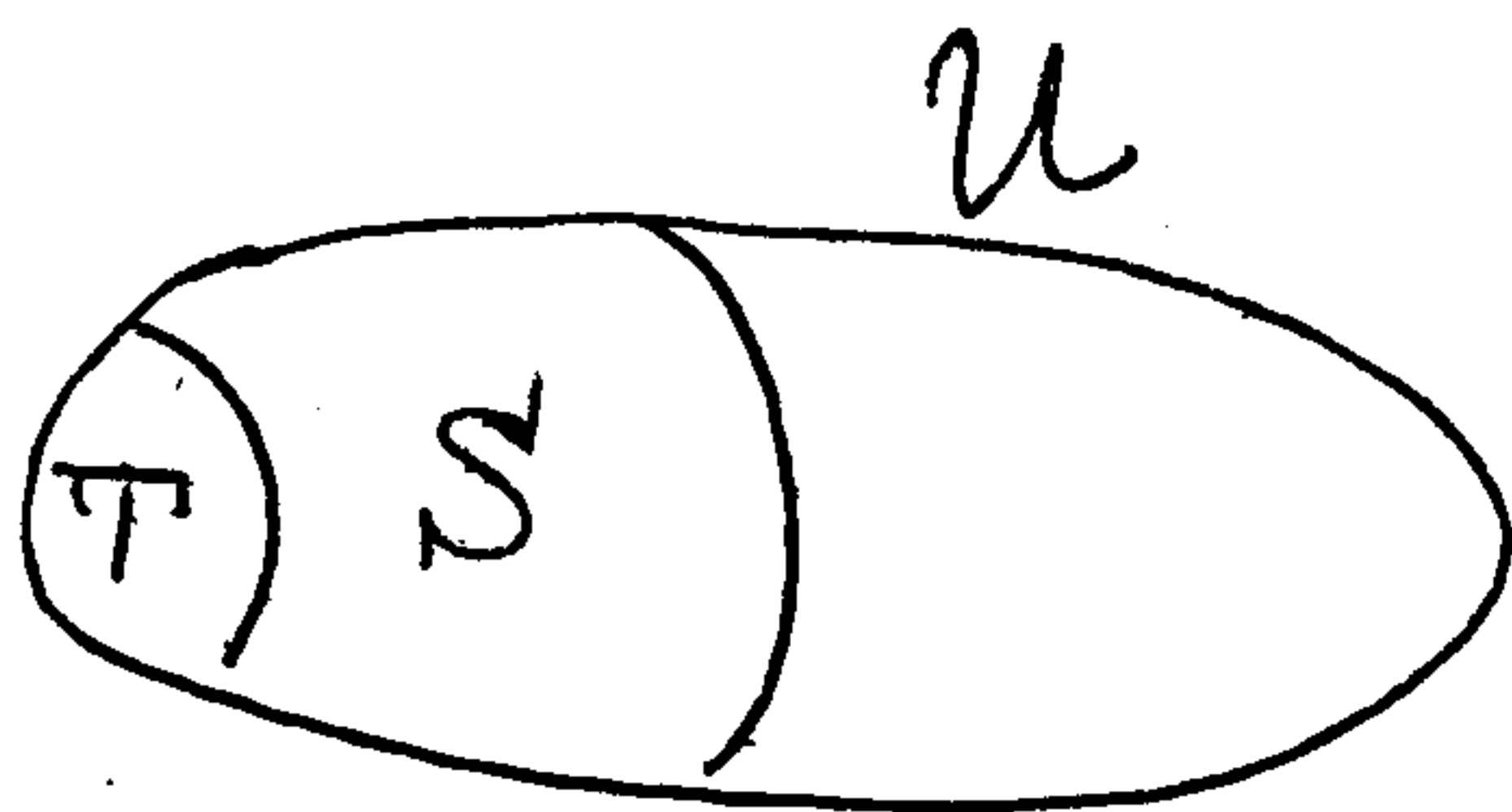
$$= \sum_{T \subseteq u} \left[\sum_{\substack{S \subseteq u \\ T \subseteq S}} (-1)^{s-t} \right] v(T) =$$

стр. 4 от 9

$$= v(u) + \sum_{T \subseteq u} \underbrace{\left[\sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq u \\ i \in S'}} (-1)^{s-t} \right]}_A v(T)$$



$$\binom{u-t}{s-t}$$



$$A = \sum_{s=t}^u (-1)^{s-t} \binom{u-t}{s-t} = \sum_{\substack{j=0 \\ \text{non. } j=s-t}}^{u-t} (-1)^j \binom{u-t}{j} = (1-1)^{u-t} = 0.$$

$$\psi(V) = \psi\left(\sum_{S \subseteq N} c_S w_S\right) = \sum_{S \subseteq N} c_S \psi(w_S) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S'}} \sum_{T \subseteq S} (-1) v(T) \frac{1}{S}$$

$$= \sum_{T \subseteq N} \left[\sum_{\substack{T \subseteq S \subseteq N \\ i \in S'}} \frac{(-1)^{s-t}}{S} \right] v(T) =$$

$$= \sum_{\substack{T \subseteq N \\ i \in T}} \mu(T) (v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

comp. 5 on 9

Da auzemul $\mu(T)$:

$$\mu(T) = \sum_{T \subseteq S \subseteq N} (-1)^{s-t} \cdot \frac{1}{s} = \sum_{s=t}^n \frac{(-1)^{s-t}}{s} \cdot \binom{n-t}{s-t} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-t} (-1)^j \binom{n-t}{j} \underbrace{\int_0^1 x^{s-1} dx}_{=\frac{1}{s}} \quad \text{not. } j=s-t$$

$$= \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-t} (-1)^j x^j \binom{n-t}{j} dx = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{n-t} dx =$$

$$\underbrace{x^{t-1}}_{x^{t-1+s-t}} \cdot \underbrace{x^s}_{x^s} = x^{s-1}$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{n-t} d \frac{x^t}{t} = \underbrace{\frac{x^t}{t} (1-x)^{n-t}}_{=0} \bigg|_0^1 + \frac{n-t}{t} \int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1} dx =$$

$$= \frac{n-t}{t} \int_0^1 x^t (1-x)^{n-t-1} dx = \frac{(n-t)(n-t-1)}{t(t+1)} \int_0^1 x^{t+1} (1-x)^{n-t-2} dx =$$

$$= \frac{(n-t)! (t-1)!}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} dx =$$

$$= \frac{(n-t)! (t-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{x^n}{n} \bigg|_0^1 = \frac{(n-t)! (t-1)!}{n!}$$

amr. 6 am 9

⇒ найдем, что

$$\ell_i(v) = \sum_{\substack{\pi \in N \\ i \in \pi}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(\pi) - v(\pi \setminus \{i\})).$$

Пример:

10% 20% 30% 40%

Характеристическая функция:

$$v(\{1\}) = 0, v(\{2\}) = 0, v(\{3\}) = 0, v(\{4\}) = 0.$$

$$v(\{1, 2\}) = 0, v(\{1, 3\}) = 0, v(\{1, 4\}) = 1$$

$$v(\{2, 3\}) = 1, v(\{2, 4\}) = 1, v(\{3, 4\}) = 1$$

$$v(\{1, 2, 3\}) = v(\{1, 2, 4\}) = v(\{1, 3, 4\}) = v(\{2, 3, 4\}) = 1$$

$$v(\{1, 2, 3, 4\}) = 1$$

Да считаем $\ell_1(v)$:

~~$$\ell_1(v) = \sum_{\pi \in N} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(\pi) - v(\pi \setminus \{1\}))$$~~

~~$$= \sum_{\substack{\pi \in N \\ 1 \in \pi}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(\pi) - v(\pi \setminus \{1\}))$$~~

$$\ell_1(v) = \sum_{\substack{\pi \in N \\ 1 \in \pi}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(\pi) - v(\pi \setminus \{1\})) = \begin{matrix} \text{только } \{1, 4\} \\ 6 \text{ случаев} \\ \Rightarrow \pi = \{1, 4\} \end{matrix}$$

$$= \frac{1! \cdot 2!}{4!} \cdot 1 = \frac{2}{24} = \left(\frac{1}{12} \right)$$

$$\ell_4(v) = \sum_{\substack{\pi \in N \\ 4 \in \pi}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} (v(\pi) - v(\pi \setminus \{4\})) =$$

$$= 3 \cdot \frac{1! \cdot 2!}{4!} + \frac{2 \cdot 2! \cdot 1!}{4!} = 3 \cdot \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

итог 7 от 8

$$v_2(v) = 3 \cdot \frac{2!1!}{4!} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow v = \left(\frac{1}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{5}{12}\right)$$

$$v_3(v) = 3 \cdot \frac{2!1!}{4!} = \left(\frac{1}{4}\right)$$

От миналия път - 1 продават и
двама купувачи:

$$0 < a < b < c$$

$$v(14) = a$$

$$v(1,24) = b$$

$$v(1,2,34) = c$$

$$v(124) = 0$$

$$v(1,34) = c$$

$$v(134) = 0$$

$$v(12,34) = 0$$

Игрото на тази игра е:

$$A = \{ \phi(v) = h(x, 0, c-x) \in \mathbb{R}^3, b \leq x \leq c \} \leftarrow \text{отсечка}$$

множество B:

$$B = \{ h(y, b-y, c-b) : a \leq y \leq b \}$$

(ако двамата купувачи се споразу-
мелт. Вторият дава на първия b и
взема стоката, и има печалба
 $c-b$, а оставя първия да се направи
с продавача).

Ще покажем че двете не са срав-
ними:

1) Взимаме произволна дедба от A и про-
изволна дедба от B: -----
дедба

$$(z_1, z_2, z_3) \notin A \cup B \Rightarrow$$

$$z_1 \geq a$$

$$z_2 \geq 0 \text{ и } z_1 + z_2 + z_3 = c$$

$$z_3 \geq 0$$

имр. 8 от 9

$$\text{1 случай: } z_3 > c-b \Rightarrow \left(z_1 + \frac{\varepsilon}{2}, z_2 + \frac{\varepsilon}{2}, c-b \right) > z \quad \text{1;24}$$

$$\text{2 случай: } z_3 < c-b \Rightarrow z_2 = \varepsilon \Rightarrow \left(z_1 + \frac{\varepsilon}{2}, 0, z_3 + \frac{\varepsilon}{2} \right) > z \quad \text{1;34}$$

За изпита: 10-15 въпроса и задачи

- твърдени
 → def, формулировки — правила за бинарн
 → 1, 2, 3, 4 примера: б-те д-ва игра
 → равн. по Неш
 → здро на игра