CLASS SCHEDULE

DATE ____________

NAME ____________ SCHOOL ____________

ADDRESS ____________

PERIOD	MONDAY	RM.	TUESDAY	RM.	WEDNESDAY	RM.	THURSDAY	RM.	FRIDAY	RM.
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Теория на игрите

02.10

$x_1 \in X_1$ x_1 – играч

$x_2 \in X_2$ X_1 – множеството от стратегиите на x_1

— - —

$x_n \in X_n$

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Има игри с безбройно много играчи, но ние ще разглеждаме такива с 2 (или краен бр. n) играчи.

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(x) = u_1(x_1, \ldots, x_n) \to \max \\ u_2(x) = u_2(x_1, \ldots, x_n) \to \max \\ \ldots \\ u_n(x) = u_n(x_1, \ldots, x_n) \to \max \end{array}\right\}$$

u_i е печалбата на играча x_i

Всеки иска да максимизира печалбата си.
"Проблем": u_i зависи не само от x_i, а и от останалите x-ове

→ Антагонистична игра на n играчи.
(те са противници и не си комуникират помежду си).

Как да изберат стратегиите си?

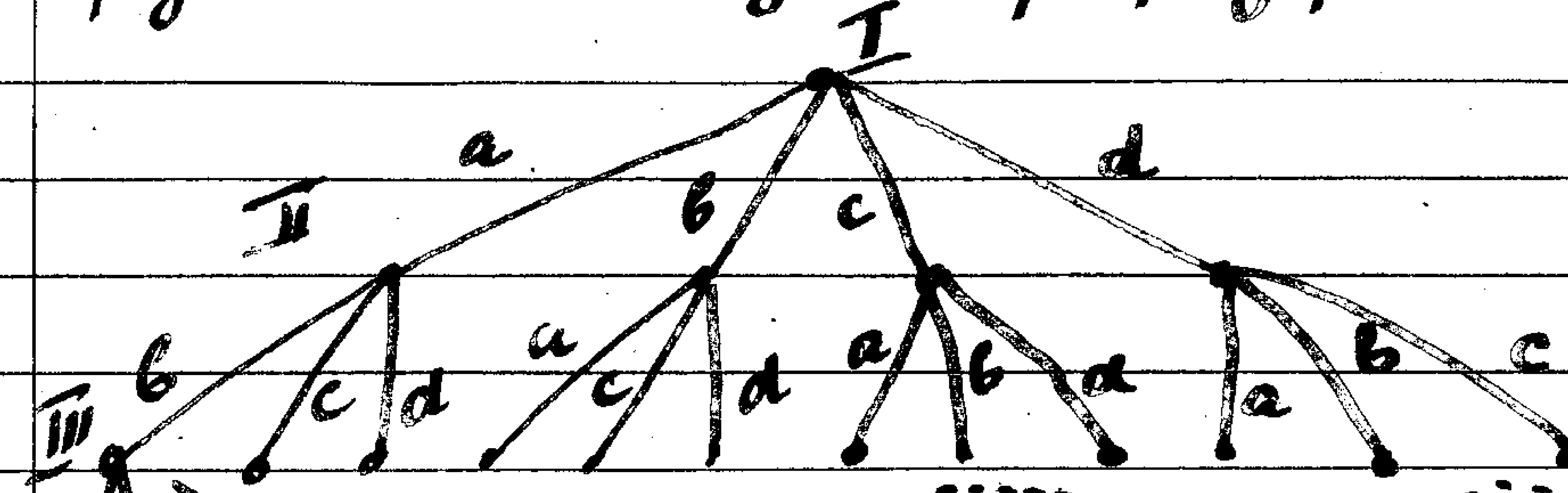
Ще разглеждаме игри с 2 играчи и сума 0 (каквото е спечелил единият, го печели от другия).

Кооперативни игри:
- с 2 играчи – не са интересни;
- с ≥3 играчи – може да има различни коалиции, които съществуват докато са изгодни, а след това възникват нови коалиции.

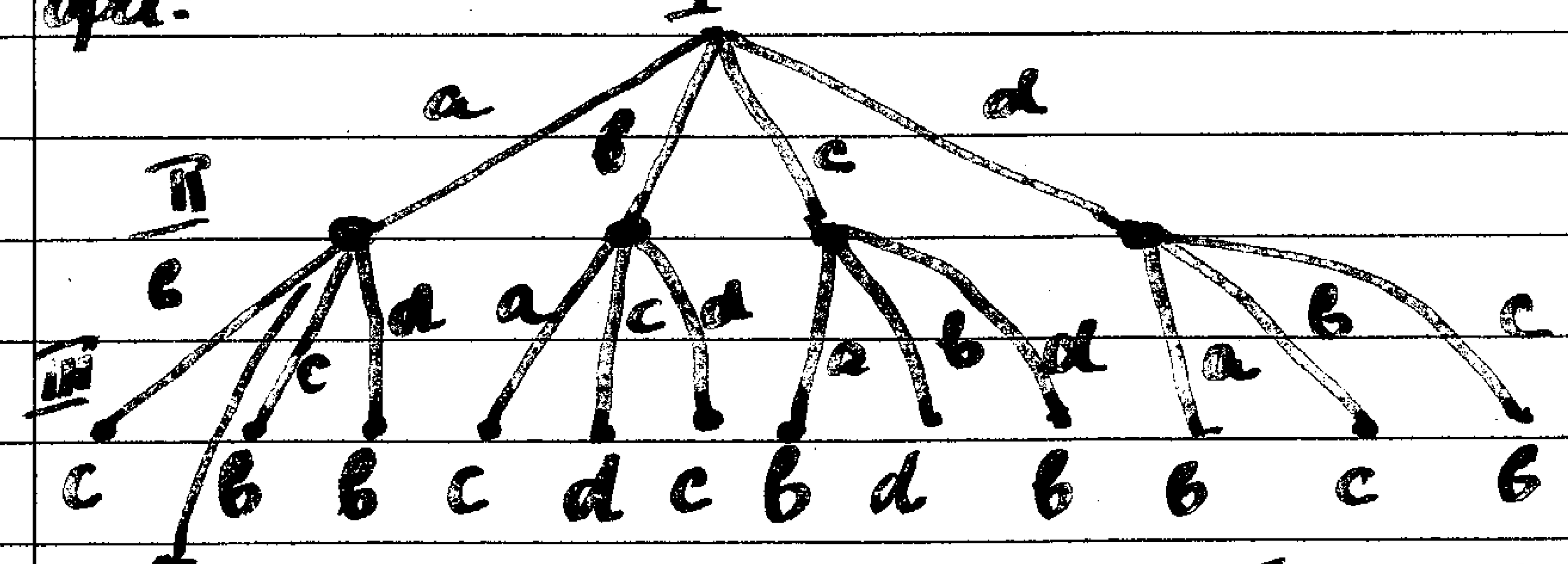
Пример: 1 свободно място
4 кандидати a, b, c, d
Комисия от 3 души I, II и III избира.
Всеки знае предпочитанията на останалите. I избира и "задрасква" един от кандидатите, после II задрасква един и след това III. Който остане, е назначен.

I: $u_1(a)<u_1(b)<u_1(c)<u_1(d)$ (d – "любимец")
II: $u_2(a)<u_2(c)<u_2(d)<u_2(b)$
III: $u_3(a)<u_3(d)<u_3(c)<u_3(b)$

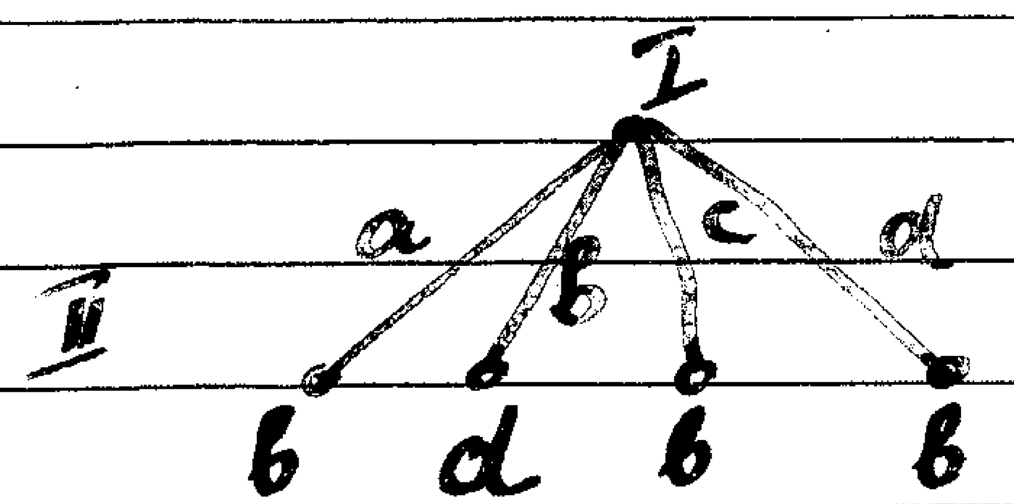
Представяне във вид на граф-дърво:



Ако сме стигнали до тук, III трябва да избере между c и d. Понеже $u_3(d)<u_3(c)$, III задрасква d и ще бъде назначен c.
По този начин можем да съкратим графа:



Ако сме стигнали до тук, II трябва да избере между назначаване на b и назначаване на c. Понеже $u_2(c)<u_2(b)$, то ще бъде назначен b.
И отново можем да съкратим дървото.



Т.е $\underline{I}$ избира между назначаването на в и назначаването на d. Понеже $u_1(b) < u_1(d)$, то I ще избере да назначи d, т.е. изг задраска в.
Връщаме се по обратния път към листата:
I задрасква в;
II задрасква c
III задрасква a;
назначен е d

Друг начин за представяне на игрите → когато има 2 играчи → таблично:
Война–Мир:

2 играчи и ∀ има по 2 стратегии – война и мир

I \ II	М	В
М	2 / 2	0 / 3
В	3 / 0	1 / 1

Каквото и да избере I, за II е по-изгодна войната. И обратно,
но Мир–Мир е най-изгодно и за двамата
⇒ по-добре кооперативни игри, отколкото война.

Дилема на затворника – същото, но с други числа

Игра с нулева сума → игра с монета в едната ръка. Ако другият познае в коя ръка е, даваме му я, ако не – той дава 1 монета.

I \ II казал	Л	Д
Л	-1	1
Д	1	-1

} къде всъщност е била монетата

В таблицата пишем само печалбата на I (на II е със знак –).

Равновесие по Неш:

n-торка от стратегии $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ на n-те играчи

Тази n-торка определя равновесие по Неш, ако е изпълнено:

$$u_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \le$$
$$\le u_i(x_1^*, \dots, x_n^*)$$

за $\forall i = 1, \dots, n$; $x_i \in X_i$.

Т.е никой от играчите не е заинтересован да си смени стратегията, защото няма да спечели повече

За примера с Война-Мир:

ако I се отклони, печели по-малко;

ако II се отклони, печели по-малко

$\Rightarrow \exists!$ равновесие по Неш: Война-Война

Пример: 2 фирми, една и съща стока.

$X_1 = X_2 = [0; 1/2]$

$x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$

$P = 1 - x_1 - x_2 = P(x_1, x_2)$

цената

Разходи: $r(y) = \frac{3}{4}y^2 - \frac{y}{2}$

произведена стока

Печалби:

$u_1(x_1, x_2) = x_1 \cdot (1 - x_1 - x_2) - \left(\frac{3}{4} x_1^2 - \frac{1}{2} x_1\right)$

$u_2(x_1, x_2) = x_2 \cdot (1 - x_1 - x_2) - \left(\frac{3}{4} x_2^2 - \frac{1}{2} x_2\right)$

Разглеждаме $u_1(x_1, x_2)$.

Фиксираме x_2 (x_2^* → за равновесие по Неш) и искаме да максимизираме по x_1:

$u_1(x_1, x_2^*) = x_1 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2^* - \frac{3}{4} x_1^2 + \frac{1}{2} x_1$

$u_1(x_1, x_2^*) = -\frac{7}{4} x_1^2 + \left(\frac{3}{2} - x_2^*\right) x_1$

$u_1'(x_1, x_2^*) = -\frac{7}{4} \cdot 2x_1 + \frac{3}{2} - x_2^* = -\frac{7}{2} x_1 + \frac{3}{2} - x_2^*$

$u_1' = 0$ (за да има екстремум → max)

При max → x_1^*

$\Rightarrow -\frac{7}{2} x_1^* - x_2^* = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} x_1^* + x_2^* = \frac{3}{2}$.

Аналогично за u_2: $\frac{7}{2} x_2^* + x_1^* = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ Трябва да решим линейна система 2x2:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x_1^* + x_2^* = \frac{3}{2} \\ x_1^* + \frac{7}{2}x_2^* = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} 7/2 & 1 \\ 1 & 7/2 \end{pmatrix} = \frac{49}{4} - 1 = \frac{45}{4}$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 3/2 & 7/2 \end{pmatrix} = \frac{21}{4} - \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 7/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix} = \frac{15}{4}$$

$$x_1^* = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{45}{4}} = \frac{1}{3}; \quad x_2^* = \frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ равновесие по Неш при $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3}$.

Но така не са включени всички случаи.
Например:
Нека $x_1^* = 0 \Rightarrow$ max ст-ст на u_2:

$$\max_{x_2 \in [0;\frac{1}{2}]} u_2(0, x_2) = x_2 \cdot (1 - x_2) - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 =$$

$$= x_2 - x_2^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{7}{4}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2.$$

$$u_2' = -\frac{7}{2}x_2 + \frac{3}{2}$$

$$u_2' = 0: \quad \frac{7}{2}x_2^* = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2^* = \frac{3}{7}.$$

Сега:

$$u_1\left(x_1, \frac{3}{7}\right) \to \max_{x_1 \in [0;\frac{1}{2}]} \to \text{трябва да получим } x_1^* = 0:$$

$$u_1\left(x_1, \frac{3}{7}\right) = x_1 \cdot \left(1 - x_1 - \frac{3}{7}\right) - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 =$$

$$= \frac{4}{7}x_1 - x_1^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 = -\frac{7}{4}x_1^2 + \frac{15}{14}x_1$$

$$u_1' = -\frac{7}{2}x_1 + \frac{15}{14}$$

$u_1' = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{15}{49} \Rightarrow$ при $x_1 = 0$ няма равновесие по Неш.

Аналогично при $x_2^* = 0$ няма равновесие по Неш (задачата е симетрична спрямо x_1 и x_2).

Нека сега $x_1^* = \frac{1}{2} \Rightarrow$ max ст-ст на u_2

$$\max_{x_2 \in [0,\frac{1}{2}]} u_2\left(\frac{1}{2}, x_2\right) = x_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - x_2\right) - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 =$$

$$= \frac{1}{2}x_2 - x_2^2 - \frac{3}{4}x_2^2 + \frac{1}{2}x_2 =$$

$$= -\frac{7}{4}x_2^2 + x_2$$

$$\Rightarrow u_2' = -\frac{7}{2}x_2 + 1$$

$u_2' = 0 \Rightarrow x_2^* = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow u_1\left(x_1, \frac{2}{7}\right) \to \max\limits_{x_1 \in [0, \frac{1}{2}]}$ → трябва да получаем $x_1^* = \frac{1}{2}$.

$u_1\left(x_1, \frac{2}{7}\right) = x_1 \cdot \left(1 - x_1 - \frac{2}{7}\right) - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 =$

$= \frac{5}{7}x_1 - x_1^2 - \frac{3}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1 =$

$= -\frac{7}{4}x_1^2 + \frac{17}{14}x_1$

$u_1' = -\frac{7}{2}x_1 + \frac{17}{14}$

$u_1' = 0 \Rightarrow x_1^* = \frac{17}{49} \Rightarrow$ при $x_1 = \frac{1}{2}$ отново няма равновесие по Неш.

Аналогично при $x_2 = \frac{1}{2}$ няма равновесие по Неш.

$\Rightarrow$ Единствено равновесие по Неш се достига при $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{3}$.

Задача: 13 пътишка; откраднали са 13.10⁶ и искат да си ги разделят.
Има строга йерархия:
най-важен: $1 > 2 > \ldots > 13$ най-маловажен.
Дава се думата на най-стария. Той предлага как да се разделят парите и всички гласуват. Ако събере ≥50% от гласовете, парите се разделят както той каже. Ако не – застрелват го и дават думата на следващия и т.н.
Приоритет 1: 1 да оцелее.
Приоритет 2: 1 да вземе най-много

Започваме отзад-напред: (озн. $A = 13.10^6$)

13	12	11	10	9	8	7	6	5
0	A							
1	0	A-1						
0	1	0	A-1					
1	0	1	0	A-2				
		....						

$\Rightarrow 1 \to A-6$
четните → 0
нечетните (без 1) → ×1

09.10.

<u>Антагонистична игра между двама играчи с нулева сума</u>

$x \in X$, печалба: $P(x,y)$
$y \in Y$, печалба: $Q(x,y) = -P(x,y)$
(каквото вземе вторият, го е взел от първия).

Равновесие по Неш за тази игра:
$(\bar{x},\bar{y})$:

$$P(\bar{x},\bar{y}) \geq P(x,\bar{y})$$
$$Q(\bar{x},\bar{y}) \geq Q(\bar{x},y)$$

$\Rightarrow -P(\bar{x},\bar{y}) \geq -P(\bar{x},y)$, т.е.

$$P(\bar{x},\bar{y}) \leq P(\bar{x},y)$$

$\Rightarrow P(x,\bar{y}) \leq P(\bar{x},\bar{y}) \leq P(\bar{x},y)$, $x \in X, y \in Y$
$\Rightarrow$ равновесието по Неш е всъщност условие за седлова точка (max по x, min по y).

Най-често ще играем матрични игри:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \quad & 3 \end{array} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{стратегиите на II}} \end{array}
\left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{стратегиите на I}$$

a_{ij} представлява стойността на $P(x,y)$ в т. (x_i, y_j), т.е.
$a_{ij} = P(x_i, y_j)$.

Ако най-вероятната стратегия на II е y, то I иска $\max\limits_{x \in X} P(x,y)$.

$\Rightarrow$ по естествен начин се получава:

$$V_{II} \stackrel{def}{=} \min_{y \in Y} \left(\max_{x \in X} P(x,y) \right).$$

Аналогично (обратно):

$$V_{I} \stackrel{def}{=} \max_{x \in X} \left(\min_{y \in Y} P(x,y) \right).$$

<u>Задача</u>: Двама играят игра с монета. I я скрива в едната ръка, II се опитва да познае в коя ръка е монетата.
Познава: I $\to -1$; иначе: I $\to +1$.

$$\begin{array}{ccc} & ① & ② \\ \mathrm{I} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} ① \\ ② \end{array} \\ & \mathrm{II} & \end{array}$$

$$v_{I} = \max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right) = \max_{x\in X}\{-1,-1\} = -1$$

$$v_{II} = \min_{y\in Y}\{1,1\} = 1$$

$\Rightarrow v_I \le v_{II}$ (в този случай)

Ако $\forall$ елементи на матрицата са равни, $v_I = v_{II}$.

Ще докажем, че $v_I \le v_{II}$ при $\forall x\in X, y\in Y$.

Фиксираме произволна т. $x_0 \in X$ и произволна точка $y_0\in Y$.

$$\Rightarrow \min_{y\in Y} P(x_0,y) \le P(x_0,y_0) \le \max_{x\in X} P(x,y_0)$$

$$\Rightarrow \min_{y\in Y} P(x_0,y) \le \max_{x\in X} P(x,y_0)$$

Сл.:

$$v_I = \max_{x_0\in X}\Big(\underbrace{\min_{y\in Y} P(x_0,y)}_{\text{фикс. ч-ло (не зависи от } y_0)}\Big) \le$$

$\Rightarrow$ пускаме y_0 да се "върти"

$$\le \min_{y_0\in Y}\Big(\underbrace{\max_{x\in X} P(x,y_0)}_{\text{аналогично:}}\Big) = v_{II}$$

не зависи от $x_0 \to$ варираме x_0.

$\Rightarrow \boxed{v_I \le v_{II}}$.

Ако $v_I = v_{II}$, бележим $v_I = v_{II} = v$ и казваме, че играта има цена (гарантирана печалба на I).

v (цена): $v_I = v_{II}$.

I. Допускаме, че има цена ($v_I = v_{II}$)
$\Rightarrow$ в сила е:

$$\max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right) = v = \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P(x,y)\right)$$

$\Rightarrow$ Трябва да докажем, че $\exists$ т. $(\bar{x},\bar{y})$: седлова точка.

Нека $v = \min_{y\in Y} P(\bar{x},y)$ (достига се за $\bar{x}$);

$v = \max_{x\in X} P(x,\bar{y})$ (достига се за $\bar{y}$)

$\Rightarrow \max_{x\in X} P(x,\bar{y}) = v = \min_{y\in Y} P(\bar{x},y)$.

$\Rightarrow$ Взимаме $(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow P(\bar{x},\bar{y}) = v$.

(II) Обратно:

Искаме да докажем, че max(min)=min(max);

имаме условието за седлова точка.

Озн. $P(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow P(x,\bar{y}) \le v$

$\Rightarrow \max_{x\in X} P(x,\bar{y}) \le v$

$\Rightarrow \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P(x,y)\right) \le v$.

От другата страна (другото неравенство):

$v \le \min_{y\in Y} P(\bar{x},y)$

$\Rightarrow v \le \max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right)$.

Сега:

$v_{II} = \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P(x,y)\right) \le v \le$

$\le \max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right) = v_I$.

$\Rightarrow v_{II} \le v \le v_I$, т.е. $v_{II} \le v_I$.

Но $v_I \le v_{II}$.

$\Rightarrow v_I = v_{II} \Rightarrow v_I = v_{II} = v$.

$\Rightarrow$ Доказахме:

има цена $\Leftrightarrow$ има седлова точка

По задачата:

Няма цена при чисти стратегии (т.е. когато е избрана фиксирана стратегия).

Смесени стратегии:

$$\begin{array}{c|c} & \\ x_1 & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$} \\ x_2 & \\ & y_1 \quad y_2 \end{array}$$

Стратегиите се избират с вероятности.

$$\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\quad y_1 \;\cdots\; y_n$$

$X = \{x = (x_1,\dots,x_m) :$
$x_1 + \dots + x_m = 1,$
$x_i \ge 0, i = 1,\dots,m\}$.

Аналогично за Y.

$X = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_1 + \dots + x_m = 1,$
$\quad x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, m\}$

$Y = \{y = (y_1, \dots, y_n) : y_1 + \dots + y_n = 1,$
$\quad y_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n\}.$

$P(x,y)$ има смисъл на очаквана печалба на $\underline{I}$.

Интерпретации на смесените стратегии:

1) играем много пъти и избираме различни стратегии;

2) чисто човешки смисъл, да не залагаме всичко на едно нещо, а да комбинираме.

Пресмятаме математическото очакване:

$$P(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_1 + \dots =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$$

Сега: $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j.$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P(x,j) = \sum_{i=1}^{m} x_i\, P(i,y)$$

означава чиста j-та стратегия; чиста i-та стратегия

$(\bar{x},\bar{y}) \to$ равновесие по Неш.

$P(x,\bar{y}) \leq P(\bar{x},\bar{y}) \leq P(\bar{x},y)$, $\underbrace{x \in X,\ y \in Y}$ произволни.

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m).$

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n).$

Нека $\bar{x}_{i_0} > 0 \Rightarrow P(i_0, \bar{y}) = P(\bar{x},\bar{y}) = v.$
$\qquad \bar{y}_{j_0} > 0 \Rightarrow P(\bar{x}, j_0) = P(\bar{x},\bar{y}) = v.$

Имаме, че $P(\bar{x},\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i\, P(i,\bar{y}).$

Допускаме, че $P(i_0,\bar{y}) \neq P(\bar{x},\bar{y}).$

Т.к $P(x,\overline{y}) \le P(\overline{x},\overline{y}) \Rightarrow$

$P(i_0,\overline{y}) < P(\overline{x},\overline{y})$ → н-вото е строго

$| \cdot \overline{x_{i_0}}$ → н-вото запазва посоката си

$\Rightarrow \overline{x_{i_0}}\, P(i_0,y) < \overline{x_{i_0}} \cdot P(\overline{x},\overline{y})$

$\Rightarrow \overline{x_i}\, P(i,y) < \overline{x_{i_0}} \cdot P(\overline{x},\overline{y}) \;\Big|\; \sum_{i=1}^{m}$

$\Rightarrow P(\overline{x},\overline{y}) < P(\overline{x},\overline{y}) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \overline{x_i}}_{=1} = P(\overline{x},\overline{y})$

$\Rightarrow P(\overline{x},\overline{y}) < P(\overline{x},\overline{y})$ → противоречие.

За $P(\overline{x},j_0)$ → аналогично → за другото неравенство.

16.10.

Нека има 2 седлови точки:

$(\overline{x_1},\overline{y_1})$ и $(\overline{x_2},\overline{y_2})$:

$P(x,\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},y)$ за $\forall x \in X, y \in Y$

$P(x,\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},y)$ за $\forall x \in X, y \in Y$

ОСД, че:

$P(\overline{x_1},\overline{y_2}) = P(\overline{x_1},\overline{y_1}) = P(\overline{x_2},\overline{y_1}) = P(\overline{x_2},\overline{y_2})$:

$P(x,\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},y)$ за $\forall x \in X$ и за $\forall y \in Y$

$\Rightarrow$ е в сила за $x = \overline{x_2}$ и $y = \overline{y_2}$:

• $P(\overline{x_2},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_2})$.

От $P(x,\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},y)$ за $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$

$\Rightarrow$ е в сила за $x = \overline{x_1}$ и $y = \overline{y_1}$:

• $P(\overline{x_1},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_1})$

Сега:

От • и • имаме:

$P(\overline{x_2},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_1}) \le P(\overline{x_1},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_2}) \le P(\overline{x_2},\overline{y_1})$

$\Rightarrow \forall$ са равни.

$\Rightarrow P(\overline{x_1},\overline{y_2}) = P(\overline{x_1},\overline{y_1}) = P(\overline{x_2},\overline{y_1}) = P(\overline{x_2},\overline{y_2})$

Пример: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ → няма равновесие в чисти стратегии

Възможно ли е да има равновесие от вида $(1,\overline{y})$, т.е. $\overline{x} = (1,0)$, $\overline{y} = (\overline{y_1},\overline{y_2})$, $\overline{y_1} > 0$, $\overline{y_2} > 0$?

Условие за седлова точка (цена):

$P(x,\overline{y}) \le P(\overline{x},\overline{y}) \le P(\overline{x},y)$.

$\Rightarrow v = a\bar{y}_1 + b.\bar{y}_2 \leq a.y_1 + b.y_2.$

БОО $a \leq b$

b $\Rightarrow v$ е между a и b

v $\Rightarrow a \leq v \leq b.$

a Но, ако изберем $y_1 = 1, y_2 = 0$

$\Rightarrow$ условието за цена дава:

$v \leq a.1 + b.0 = a$

$\Rightarrow a \leq v \leq a$

$\Rightarrow v = a$

И аналогично $v = b$

$\Rightarrow a = b = v.$

/* По друг начин: $\left| \begin{array}{l} v \leq a \\ v \leq b \end{array} \right\}$ от условието за цена и при чисти стратегии

и $\left| v = \bar{y}_1.a + \bar{y}_2.b \right.$

$\Rightarrow v \leq a \;|\,.\,\bar{y}_1 > 0$, посоката се запазва |

$v \leq b \;|\,.\,\bar{y}_2 > 0$, посоката се запазва |+

$\Rightarrow \underbrace{\bar{y}_1.v + \bar{y}_2.v}_{(\bar{y}_1+\bar{y}_2).v} \leq \bar{y}_1.a + \bar{y}_2.b = v$, където $\bar{y}_1+\bar{y}_2 = 1$

$\Rightarrow v \leq v$, р-во $\Leftrightarrow v = a$ и $v = b$ */

$\Rightarrow v = a = b$

$\Rightarrow$ Матрицата на тази игра е $\begin{pmatrix} v & v \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & v & v \\ 0 & c & d \\ \hline & \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \end{array}$$

x играе чиста първа стратегия,

y → смесена стратегия

$\begin{pmatrix} v & v \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \min\{c,d\} \end{pmatrix} \rightarrow \max\{v, \min\{c,d\}\}$

$\max\{c,v\}$ $\max\{d,v\}$ v

v v → v или c, v или v, d равновесие в чисти страт

$\Rightarrow$ играта има цена при чисти стратегии

$\Rightarrow$ противоречие, т.к. по условие играта няма цена в чисти стратегии.

$\Rightarrow$ Извод: Ако една игра няма цена в чисти стратегии, но има в смесени то: $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 > 0$ и

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_2 > 0$.

Условието за цена:

$P(x,\bar{y}) \le P(\bar{x},\bar{y}) \le P(\bar{x},y),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y,$

може да се сведе до само $(m+n)$ на $\bar{p}$. неравенства:

$\exists$ вектор w:

$P(i,\bar{y}) \le w \le P(\bar{x},j),\ \forall i=1,\dots,m$ и $\forall j=1,\dots,n$

m н-ва   n н-ва

Да видим:

$P(i,\bar{y}) \le w \mid \cdot x_i \ge 0$, посоката се запазва

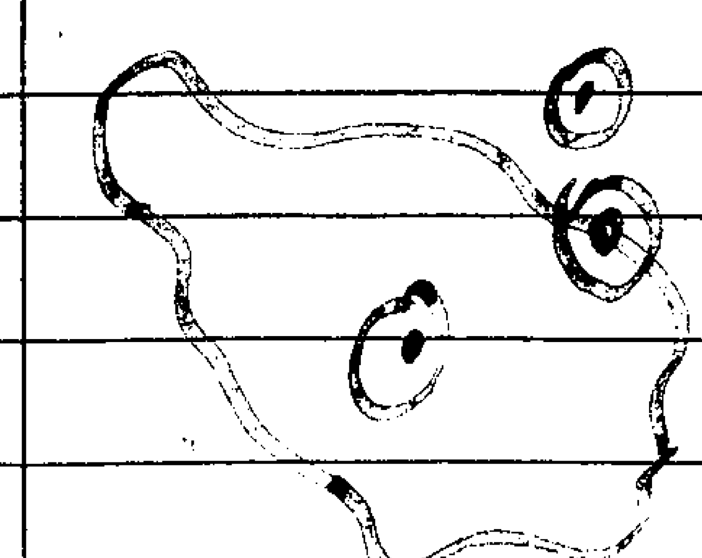
$x_i \cdot P(i,\bar{y}) \le x_i \cdot w \mid \sum_{1}^{m}$

$\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot P(i,\bar{y}) \le w \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i}_{1}$

$\Rightarrow P(x,\bar{y}) \le w.$

Аналогично за десните неравенства.

Топология:



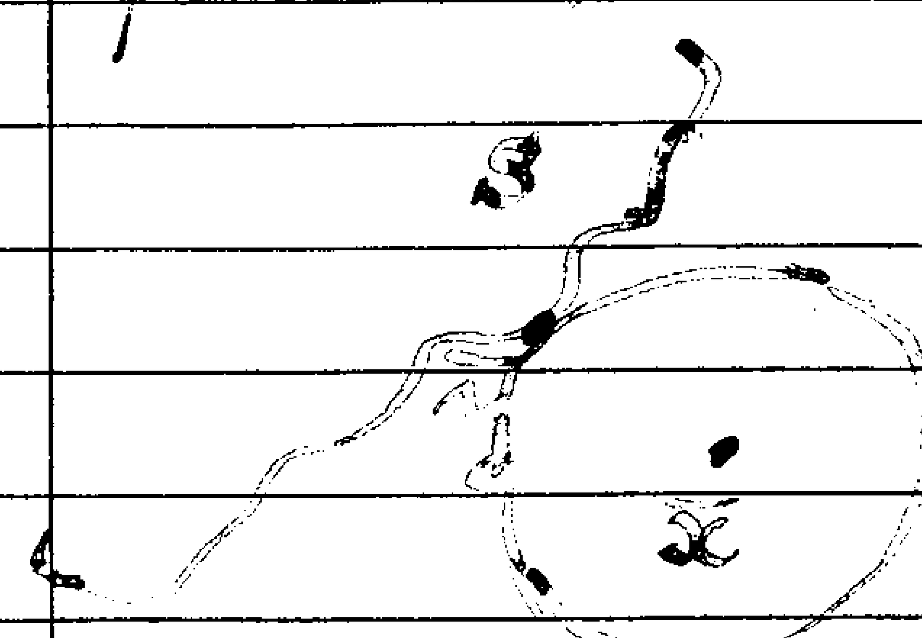
Вътрешна точка за множество: принадлежи на множеството заедно с цяла своя околност.

Външна точка за множество: извън (не принадлежи на) множеството заедно с цяла своя околност.

Контурна точка: във всяка нейна околност има както точки, които са вътрешни за множеството, така и точки, които са външни.

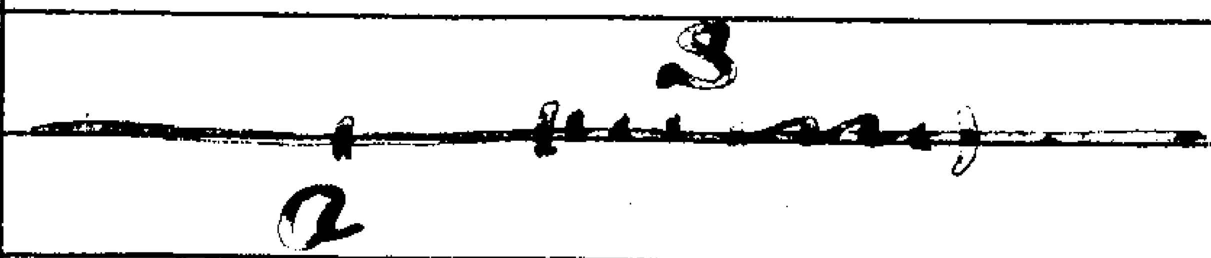
Отворено множество: състои се от вътрешни точки.

Затворено множество:
- отворено + контур
- допълнението му е отворено
- границата на всяка сходяща редица от вътрешни точки е точка от множ.



S - затворено мн. (може да не е огр.)
$\bar{x}$ - точка, $\notin S$.

$d = \inf\{\|\bar{x} - s\| : s\in S\}$



$a \le x \ \forall x \in S \to$ долна граница.

Точна долна граница: за $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in A$: $x < a + \varepsilon$.

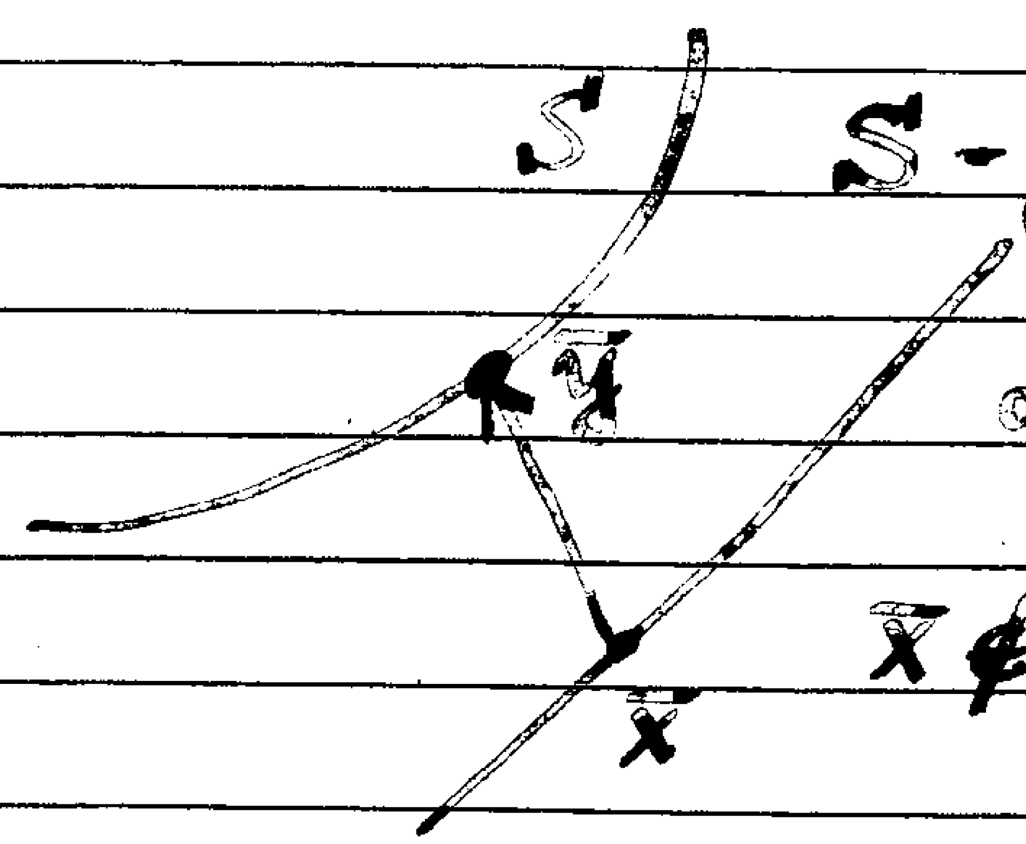
$\Rightarrow d \le \|\bar{x} - z_n\| \le d + \frac{1}{n}$

$\exists \bar{y}$: $\|\bar{y} - \bar{x}\| = d$

(нсне 1)

Прилагаме н-вото на Δ за нормата:

$\|z_n\| \le \|\bar{x} - z_n\| + \|\bar{x}\| \le d + \frac{1}{n} + \|\bar{x}\| < d + 1 + \|\bar{x}\|$



S - изпъкнало знач.

$\left.\begin{matrix} x, y \in S \\ \alpha \in [0;1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha) y \in S$

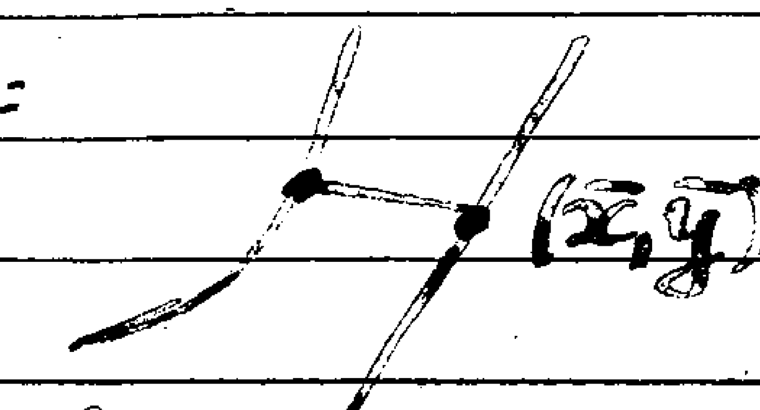
$\bar{x} \notin S$.

Твърдение: $\exists$ вектор $p \in \mathbb{R}^n, p \ne 0$ и $\exists$ число $q \in \mathbb{R}$:

$\langle p, \bar{x} \rangle = q$

и $\langle p, s \rangle > q, \ \forall s \in S$.

$/*$ в $\mathbb{R}^2$:



$p = (a, b) \ne (0,0)$

$\Rightarrow a\bar{x} + b\bar{y} = c$.

$H: \{(x, y) \in \mathbb{R}^n, ax + by = c, (a, b) \ne \vec{0}\}$

$ax + by > c, \ \forall (x, y) \in S$ $*/$

Полагаме: $p := \bar{y} - \bar{x}$.

Нека $q := \langle p, \bar{x} \rangle$.

$\langle p, \bar{y} \rangle = \langle p, \bar{x} + p \rangle = \langle p, \bar{x} \rangle + \langle p, p \rangle =$ (Т н-н; $\|\bar{x}\|$ н-н) $= q + \langle p, p \rangle > q$.

$\langle \bar{y} - \bar{x}, \bar{y} \rangle \overset{?}{>} \langle \bar{y} - \bar{x}, \bar{x} \rangle$

$\underbrace{\langle \bar{y} - \bar{x}, \bar{y} - \bar{x} \rangle}_{\|\bar{y} - \bar{x}\|^2} > 0$

Допускаме противното:

Изпълнено е обратното неравенство.

$\langle p, \bar{s} \rangle \le q$.

Разгл. т. $\bar{y} + \varepsilon . (\bar{s} - \bar{y}) = \varepsilon \bar{s} + (1 - \varepsilon) \bar{y} \in S$.

$\|\bar{x} - (\bar{y} + \varepsilon (\bar{s} - \bar{y}))\|^2 =$

$= \langle \bar{x} - (\bar{y} + \varepsilon (\bar{s} - \bar{y})), \bar{x} - (\bar{y} + \varepsilon (\bar{s} - \bar{y})) \rangle =$

$=\langle \bar{x}-\bar{y}-\varepsilon(\xi-\bar{y}), \bar{x}-\bar{y}-\varepsilon(\xi-\bar{y})\rangle =$

$=\|\bar{x}-\bar{y}\|^2-2\varepsilon\underbrace{\langle \bar{x}-\bar{y}, \xi-\bar{y}\rangle}+\varepsilon^2\|\xi-\bar{y}\|^2=$

$-\langle p, \xi-\bar{y}\rangle =$

$=\langle p, \bar{y}-\xi\rangle =$

$=\underbrace{\langle p, \bar{y}\rangle-\langle p, \xi\rangle}_{A}>0$

$=\|\bar{x}-\bar{y}\|^2-\varepsilon(2A-\varepsilon\|\xi-\bar{y}\|^2)<\|\bar{x}-\bar{y}\|^2$

за дост. малко $\varepsilon>0$.

$\Rightarrow \bar{y}+\varepsilon(\xi-\bar{y})$ е по-близо до $\bar{x}$, отколкото до $\bar{y}$

$\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow \langle p, \xi\rangle > a$.

23.10.

По играта с монетата:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix}$$

Няма равновесие в чисти стратегии.

Равновесие в смесени стратегии:

$(\bar{x}, \bar{y})$;

$\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{x}_1>0, \bar{x}_2>0, \bar{x}_1+\bar{x}_2=1$

$\bar{y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2), \bar{y}_1>0, \bar{y}_2>0, \bar{y}_1+\bar{y}_2=1$

В общия случай:

$$\begin{cases} P(1,\bar{y})=v \\ P(2,\bar{y})=v \\ \bar{y}_1+\bar{y}_2=1 \\ \bar{y}_1>0, \bar{y}_2>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} P(\bar{x},1)=v \\ P(\bar{x},2)=v \\ \bar{x}_1+\bar{x}_2=1 \\ \bar{x}_1>0, \bar{x}_2>0 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} a_{11}\bar{y}_1+a_{12}\bar{y}_2=v \\ a_{21}\bar{y}_1+a_{22}\bar{y}_2=v \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}\bar{x}_1+a_{21}\bar{x}_2=v \\ a_{12}\bar{x}_1+a_{22}\bar{x}_2=v \end{cases}$$

За нашата задача:

$$\begin{cases} -\bar{y}_1+\bar{y}_2=v \\ \bar{y}_1-\bar{y}_2=v \\ \bar{y}_1+\bar{y}_2=1 \\ \bar{y}_1>0, \bar{y}_2>0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\bar{x}_1+\bar{x}_2=v \\ \bar{x}_1-\bar{x}_2=v \\ \bar{x}_1+\bar{x}_2=1 \\ \bar{x}_1>0, \bar{x}_2>0 \end{cases}$$

$\Rightarrow v=0; \bar{x}_1=\bar{x}_2=\bar{y}_1=\bar{y}_2=\frac{1}{2}$.

Задача.

Пр.1: $\begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 9 & 23 \end{pmatrix} \begin{matrix} 10 \\ 9 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 10 & 23 \end{matrix}$

Пр.2: $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 11 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 12 & 11 \end{matrix}$

Пр.3: $\begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix}$

$\begin{matrix} 7 & 14 \end{matrix}$

Пр. 4: $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix}$

$\quad 7 \quad 5$

Няма равновесие в чисти стратегии $\Rightarrow$ решаваме двете системи:

$$\begin{cases} -3\bar{y}_1 + 5\bar{y}_2 = v \\ 7\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = v \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1 \\ \bar{y}_1 \geq 0, \bar{y}_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -3-35 = -38$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} v & 5 \\ v & 1 \end{vmatrix} = -4v$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & v \\ 7 & v \end{vmatrix} = -10v$$

$$\Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4v}{-38} = \frac{2v}{19}$$

$$\bar{y}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10v}{-38} = \frac{5v}{19}$$

$$\Rightarrow \text{от } \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1 \Rightarrow \frac{2v}{19} + \frac{5v}{19} = 1$$

$$\frac{7v}{19} = 1 \Rightarrow \boxed{v = \frac{19}{7}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y}_1 = \frac{2}{7}, \bar{y}_2 = \frac{5}{7}}$$

$$\begin{cases} -3\bar{x}_1 + 7\bar{x}_2 = v \\ 5\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = v \end{cases} \quad \Delta = -38, \Delta_1 = -6v, \Delta_2 = -8v$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{3v}{19}, \bar{x}_2 = \frac{4v}{19} \Rightarrow \boxed{\bar{x}_1 = \frac{3}{7}, \bar{x}_2 = \frac{4}{7}}$$

матрица $A_{m\times n}$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$a_{ij}, i=1,\dots,m, j=1,\dots,n$

$P_A(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$, $x\in X, y\in Y$

матрица $B_{m\times n}$: $b_{ij} = c.a_{ij}+d$, $c>0$, $d\in R$

$$P_B(x,y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c.a_{ij}+d)x_iy_j = c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j + d\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j = c.P_A(x,y)+d.$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = c.P_A + d}$$

Още: посоката се зап.

$P_A(x,\bar{y}) \leq P_A(\bar{x},\bar{y}) \leq P_A(\bar{x},y) \;|.c>0$

$c.P_A(x,\bar{y}) \leq c.P_A(\bar{x},\bar{y}) \leq c.P_A(\bar{x},y) \;|+d$

$c.P_A(x,\bar{y})+d \leq c.P_A(\bar{x},\bar{y})+d \leq c.P_A(\bar{x},y)+d$

$\Rightarrow P_B(x,\bar{y}) \leq P_B(\bar{x},\bar{y}) \leq P_B(\bar{x},y).$

$$v_I^A = \max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P_A(x,y)\right)$$

$$v_{II}^A = \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P_A(x,y)\right)$$

$P_B(x,y) = c.P_A(x,y) + d.$

$v_I^B = c\,v_I^A + d\,;\quad v_{II}^B = c\,v_{II}^A + d$

Разглеждаме:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\downarrow\quad \downarrow\quad\quad \downarrow\quad\quad \downarrow\quad \downarrow\quad\quad \downarrow$

$a_1\quad a_2\quad\quad a_n\quad e_1\quad e_2\quad\quad e_m,$

вектор-стълбове единичните в-ри

$\Rightarrow m\times(m+n).$

За тази матрица дефинираме множеството:

$$S = \left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j a_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i e_i : \begin{matrix}\alpha_j\geq 0,\ j=1,\dots,n\\ \beta_i\geq 0,\ i=1,\dots,m\end{matrix},\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i = 1\right\}$$

Изпъкнала обвивка (комбинация)

Очевидно $S\subseteq\mathbb{R}^m$

Изпъкналост:

$$x_1 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^1 a_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i^1 e_i \qquad x_1, x_2\in S$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2 a_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2 e_i \qquad \varepsilon\in(0;1)$$

$$\varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2 \overset{?}{\in} S$$

Наистина:

$$\varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\varepsilon\alpha_j^1 + (1-\varepsilon)\alpha_j^2\right)a_j + \sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon\beta_i^1 + (1-\varepsilon)\beta_i^2\right)e_i$$

$\varepsilon\alpha_j^1 + (1-\varepsilon)\alpha_j^2 \geq 0$, т.к. $\varepsilon>0,\ \alpha_j^1\geq 0,\ 1-\varepsilon>0,\ \alpha_j^2\geq 0$

аналог. за β_i

и

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\varepsilon\alpha_j^1 + (1-\varepsilon)\alpha_j^2\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(\varepsilon\beta_i^1 + (1-\varepsilon)\beta_i^2\right) =$$

$$= \varepsilon\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^1 + \sum_{i=1}^{m}\beta_i^1\right) + (1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2 + \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2\right) =$$

$$= \varepsilon + 1 - \varepsilon = 1$$

Затвореност:

$$\left.\begin{matrix}\{x_k\}\to x\\ x_k\in S\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in S.$$

Взимаме:

$$x_k = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^k a_j + \sum_{i=1}^{m}\beta_i^k e_i,$$

където $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k = 1,\ \alpha_j^k \geq 0,\ \beta_i^k \geq 0.$

Взимаме редицата α_1^k:

$0 \leq \alpha_1^k \leq 1$

ограничена е $\Rightarrow$ има сходяща подредица: $\{\alpha_1^{k_1}\} \to \alpha_1$.

Разглеждаме редицата $\alpha_2^{k_1}$:

$0 \leq \alpha_2^{k_1} \leq 1$

$\Rightarrow \{\alpha_2^{k_2}\} \to \alpha_2$

и т.н.

k-крайно число $\Rightarrow$ краен брой α и β

$\Rightarrow x_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k a_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i^k e^i$ граничен. преходи

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i e \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$

$\alpha_j \geq 0,\ \beta_i \geq 0.$

$\Rightarrow S$ - изпъкнало и затворено.

За множеството S има следните 2 възможности:

- $0 \in S$
- $0 \notin S$

(30.10.) Когато $0 \in S$:

$$\begin{cases} 0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i e_i \to \text{векторно равенство} \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j + \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1 \\ \alpha_j \geq 0,\ \beta_i \geq 0 \end{cases}$$

Покомпонентно:

$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} + \beta_i = 0,\ i = 1, \dots, m.$

От тези равенства следва, че не може $\forall \alpha_j = 0$, т.к тогава и $\forall \beta_i = 0$, т.е. $\sum \alpha_j + \sum \beta_i = 0$, а не 1.

$\Rightarrow \exists j : \alpha_j \neq 0 \Rightarrow \sum \alpha_j > 0.$

$$\sum_{j}^{n} \frac{\alpha_j}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} a_{ij} = \underbrace{\frac{-\beta_i}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}}_{\leq 0,\ \text{т.к. } \sum \alpha_k > 0 \text{ и } \beta_i \leq 0.},\quad i = 1, \dots, m$$

бележим го с $\overline{y_j}$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{y_j} \leq 0,\ i = 1, \dots, m$

$\overline{y_j} \geq 0$

$\sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} = 1$

$\Rightarrow$ това е смесена стратегия

$\Rightarrow P(i, \overline{y}) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$

чиста i-та стратегия

Фиксираме $x = (x_1, \dots, x_m) \to$ смесена стратегия

$P(i, \overline{y}) \leq 0 \mid . x_i$

$x_i . P(i, \overline{y}) \leq 0 \mid \sum_{i=1}^{m}$

$\Rightarrow P(x, \overline{y}) \leq 0$ за $\forall x \in X$.

$\Rightarrow \max_{x \in X} P(x, \overline{y}) \leq 0$

$\Rightarrow \min_{y \in Y} \left(\max_{x \in X} P(x, y) \right) \leq 0$

$\Rightarrow v_{II} \leq 0$.

$\Rightarrow$ в случая $0 \in S$ имаме, че $v_{II} \leq 0$.

Когато $0 \notin S$:

Прилагаме твърдението за хиперравнината:

В нашия случай: $0 \neq p \in \mathbb{R}^m, p = (p_1, \dots, p_m)$

$x = \theta \Rightarrow \langle p, \theta \rangle = q \Rightarrow$

$q = 0$

Освен това $\langle p, s \rangle > 0$ за $\forall s \in S$.

Взимаме $s = e_i \in S'$ ($p_i = 1$, $\forall \alpha_j$ и $\forall$ос p_i са $= 0$)

$\Rightarrow p_i = \langle p, e_i \rangle > 0$.

$\langle p, a_j \rangle > 0, j = 1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij} > 0$ за $\forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot \frac{p_i}{\sum_{k=1}^{m} p_k} > 0, \forall j = 1, \dots, n$

$\hookrightarrow$ бележим $\overline{x_i}$

$\overline{x_i} > 0, \sum_{i=1}^{m} \overline{x_i} = 1$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{x_i} > 0, j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow P(\bar{x}, j) > 0, j = 1, \dots, n.$

Взимаме произволна смесена стратегия: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in Y$

$P(\bar{x}, j) > 0 \mid \cdot y_j$

$y_j \cdot P(\bar{x}, j) > 0 \mid \sum_{j=1}^{m}$

$P(\bar{x}, y) > 0$

$\Rightarrow \min_{y \in Y} P(\bar{x}, y) > 0$

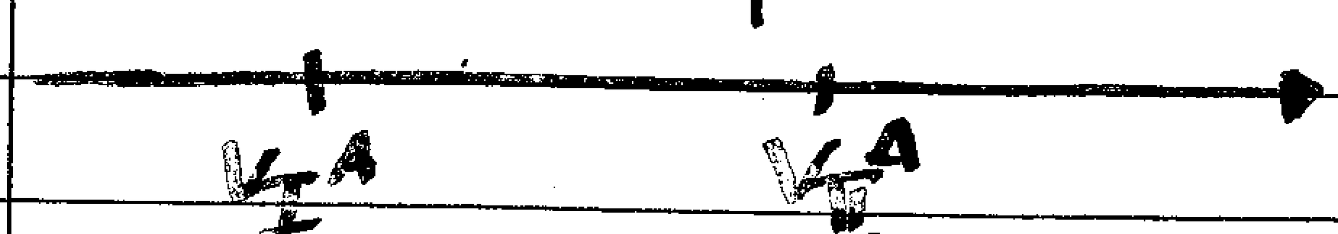
$\Rightarrow \max_{x \in X} \left(\min_{y \in Y} P(x, y) \right) > 0$

$\Rightarrow$ в случая $0 \notin S$ имаме, че $v_I > 0$.

$\Rightarrow$ или $0 \in S$ и $v_{II}^A \leq 0$,

или $0 \notin S$ и $v_I^A > 0$.

Допускаме, че за произволна матрица $A_{m \times n}$ е изпълнено $v_I^A < v_{II}^A$ (т.е. не са равни → няма цена).



$B = A + \alpha$ (към всеки от елементите на A прибавяме числото α)

$\Rightarrow v_{II}^B = v_{II}^A + \alpha$

$v_I^B = v_I^A + \alpha$

$\Rightarrow v_{II}^A + \alpha = -v_I^A - \alpha$

$\Rightarrow 2\alpha = -v_I^A - v_{II}^A$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -\dfrac{v_I^A + v_{II}^A}{2}}$

Тогава $v_I^B = \dfrac{v_I^A - v_{II}^A}{2}$ и $v_{II}^B = -\dfrac{v_I^A - v_{II}^A}{2}$

$\Rightarrow v_I^B < 0 < v_{II}^B$

$\Rightarrow$ за матрицата B нито $v_{II}^B \leq 0$, нито $v_I^B > 0$.

$\Rightarrow$ противоречие с допускането.

$\Rightarrow$ При смесени стратегии винаги $v_I^A = v_{II}^A$, т.е. винаги има цена, т.е. всяка игра с нулева сума има цена в смесени стратегии.

Пример:

$$\begin{array}{c|cc|c} & \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \\ \hline \bar{x}_1 & 13 & 12 & 12 \\ \bar{x}_2 & -1 & 100 & 1 \\ \hline & 13 & 100 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ няма равновесие в чисти стратегии

$\Rightarrow$ има в смесени.

$\overline{x} = (\overline{x_1}, \overline{x_2})$, $\overline{x_1} > 0$, $\overline{x_2} > 0$, $\overline{x_1} + \overline{x_2} = 1$

$\overline{y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2})$, $\overline{y_1} > 0$, $\overline{y_2} > 0$, $\overline{y_1} + \overline{y_2} = 1$

$\Rightarrow$ Намираме $\overline{x}, \overline{y}$ и v като решим следните 2 системи:

$$\begin{cases} 13x_1 - x_2 = v \\ 12x_1 + 100x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 13y_1 + 12y_2 = v \\ -y_1 + 100y_2 = v \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 > 0, y_2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 13x_1 - x_2 = 12x_1 + 100x_2$

$x_1 = 101x_2$

и $x_1 + x_2 = 1$

$101x_2 + x_2 = 1$

$102x_2 = 1$

$x_2 = \frac{1}{102} \Rightarrow x_1 = \frac{101}{102}$

$v = 13 \cdot x_1 + (-1) \cdot x_2$

$v = 13 \cdot \frac{101}{102} - \frac{1}{102}$

$v = \frac{1312}{102} = \frac{656}{51}$

От втората система имаме:

$13y_1 + 12y_2 = -y_1 + 100y_2$

$14y_1 = 88y_2$

$7y_1 = 44y_2$

и $y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow 7y_1 + 7y_2 = 7$

$\Rightarrow 44y_2 + 7y_2 = 7$

$51y_2 = 7$

$y_2 = \frac{7}{51} \Rightarrow y_1 = \frac{44}{51}$.

$\Rightarrow$ Получаваме:

$x_1 = \frac{101}{102}$, $x_2 = \frac{1}{102}$, $y_1 = \frac{44}{51}$, $y_2 = \frac{7}{51}$, $v = \frac{656}{51}$

Разгл. матр. $A_{2\times n}$ и матр. $A_{m\times 2}$:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$

В частните случаи $2\times n$ и $m\times 2$ сега лесно можем да намерим равновесието по Неш:

$$v = \max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right) = \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P(x,y)\right).$$

Да разгледаме първо случая $A_{2\times n}$:

$v = \max_{x\in X} v(x)$,

$v(x) = \min_{y\in Y} P(x,y)$

$P(x,y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot P(x,j) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot \min_{1\leq k\leq n} P(x,k) =$

$= \min_{1\leq k\leq n} P(x,k) \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} y_j}_{=1} = \min_{1\leq k\leq n} P(x,k)$

$\Rightarrow \min_{1\leq k\leq n} P(x,k) \leq P(x,y),\ \forall y\in Y$

$\Rightarrow \min_{1\leq k\leq n} P(x,k) \leq \min_{y\in Y} P(x,y)$

$\Rightarrow \underbrace{\max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right)}_{=v} \geq \max_{x\in X}\left(\min_{1\leq k\leq n} P(x,k)\right)$

$\min_{y\in Y} P(x,y) \leq \min_{1\leq k\leq n} P(x,k)$

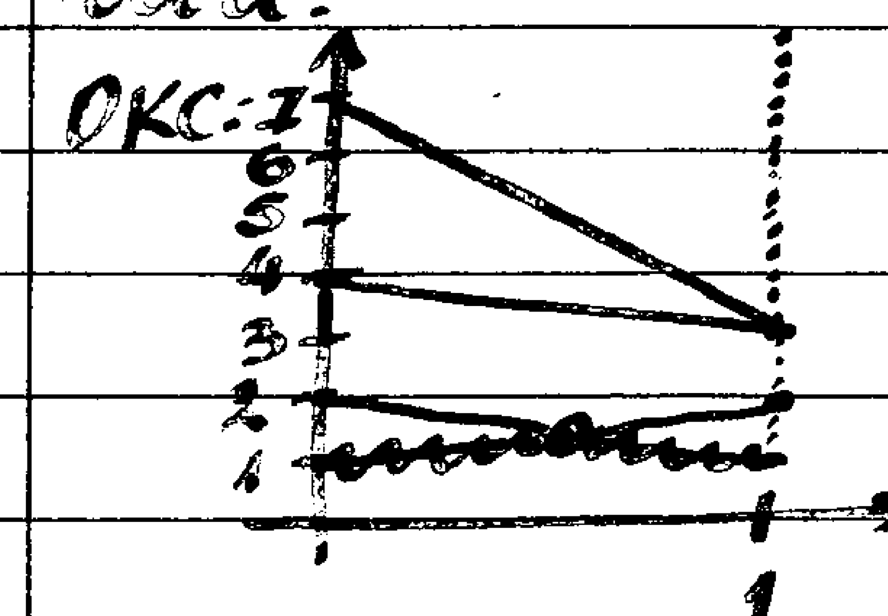
$\Rightarrow \underbrace{\max_{x\in X}\left(\min_{y\in Y} P(x,y)\right)}_{=v} \leq \max_{x\in X}\left(\min_{1\leq k\leq n} P(x,k)\right)$

$\Rightarrow v = \max_{x\in X}\left(\min_{1\leq k\leq n} P(x,k)\right)$.

<u>Пример:</u>

$$\begin{array}{c|cccc|c} x_1 & 1 & 4 & 7 & 2 & 1 \\ x_2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 4 & 7 & 2 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ няма равновесие в чисти стратегии.



$x = (x_1, x_2),\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$
$x_1 + x_2 = 1$

$\Rightarrow v = \max_{x\in X}\left(\min_{k\in\{1,\dots,n\}} P(x,k)\right)$

$= \max_{x_1\in[0,1]}\left(\min_{j\in\{1,\dots,4\}} P(x,j)\right)$

$v = \frac{3}{2},\ \overline{x_1} = \overline{x_2} = \frac{1}{2},\ \overline{y_1} = \overline{y_4} = \frac{1}{2},\ \overline{y_2} = \overline{y_3} = 0.$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

$w:\ \underset{i=1,\dots,m}{P(i,\overline{y})} \leq w \leq \underset{j=1,\dots,n}{P(\overline{x},j)}$

$\Rightarrow$ за всички смесени стратегии x и y:

$P(x,\overline{y}) \leq P(\overline{x},\overline{y}) \leq P(\overline{x},y),\ \forall x\in X,\ \forall y\in Y.$

$\underset{i=1,\dots,m}{P(i,\overline{y}) \leq w} \qquad w \qquad \underset{j=1,\dots,n}{P(\overline{x},j) \geq w}$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 1 \qquad \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 1$$
$$\bar{y}_j \ge 0 \qquad \bar{x}_i \ge 0$$
$$\omega \to \min \qquad \omega \to \max$$

$\Rightarrow$ решаваме една от тези 2 задачи на лин. опт. (която е по-лесна).

Тези две задачи са всъщност права и двойнствена:

$$\begin{cases} \omega \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{y}_j \le \omega, \ i = 1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 1 \\ \bar{y}_j \ge 0, \ \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \omega \to \max \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{x}_i \ge \omega, \ j = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ \bar{x}_i \ge 0, \ \forall i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

От първата система имаме, че:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{y}_j \le 1, \quad \text{където } \hat{y} = \frac{\bar{y}}{\omega}$$
$$\hat{y}_j \ge 0$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \to \max$$

$\Rightarrow$ Трябва да решим следната опростен задача:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \hat{y}_j \to \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{y}_j \le 1 \\ \hat{y}_j \ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \hat{x}_i \ge 1 \\ \hat{x}_i \ge 0. \end{cases}$$

тези две задачи на ЛО са двойнствен

Симетрични игри

$A = (a_{ij})_{n \times n} \Rightarrow$ квадратна матрица.
Симетрична игра: $\boxed{a_{ij} = -a_{ji}}$.
$\boxed{\Rightarrow a_{ii} = 0}$

Пр.:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 5 \\ -3 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ -5 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 0 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ цената на тази симетрична игра е 0.

Ще покажем, че цената на всяка симетрична игра е 0:
$\boxed{v=0}$

06.11. Симетрична игра $\Rightarrow A^T = -A$
$A = (a_{ij})_{n \times n}$

За $\forall$ n-мерен вектор x:
x^TAx е 1x1 матрица, т.е. число
$\Rightarrow (x^TAx)^T = x^TAx$
$x^TA^Tx^{TT} = x^TAx$
$-x^TAx = x^TAx$
$\Rightarrow x^TAx = 0$

Сега:
$$v = \min_{y \in Y}\left(\max_{x \in X} P(x,y)\right) =$$
$$= \min_{y \in Y}\left(\max_{x \in X} x^TAy\right) = \max_{x \in X}\left(\min_{y \in Y} x^TAy\right),$$

$$\max_{x \in X} x^TAy \geq 0 = y^TAy$$

$$\Rightarrow v = \min_{y \in Y}\left(\max_{x \in X} x^TAy\right) \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$$

Обратно:
$$\min_{y \in Y} x^TAy \leq 0 = x^TAx$$
$$\Rightarrow v = \max_{x \in X}\left(\min_{y \in Y} x^TAy\right) \leq 0 \Rightarrow v \leq 0$$

$\boxed{v=0}$

Сега ще покажем, че равновесието по Неш на една симетрична игра е от вида $(\bar{x}, \bar{x})$:

Дефиниция на равновесието по Неш чрез седлова точка: $(\bar{x}, \bar{y})$

$$P(x,y) = x^T A y$$

$$\underset{\forall x \in X}{P(x,\bar{y})} \le \underset{\substack{\| \\ V}}{P(\bar{x},\bar{y})} \le \underset{\forall y \in Y}{P(\bar{x},y)}$$

$\Rightarrow P(i,\bar{y}) \le v \le P(\bar{x},j)$ $\quad \rightarrow 2n$ на брой
$\forall i=1,\dots,n \quad \forall j=1,\dots,n$ неравенства

Знаем, че $v=0$.
Да разгледаме левите неравенства:
$P(i,\bar{y}) \le 0$, $i=1,\dots,n$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \le 0$

$\Rightarrow -\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\bar{y}_j \le 0$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\bar{y}_j \ge 0.$

Преименуваме i и j: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_i \ge 0$

$\Rightarrow P(\bar{y},j) \ge 0.$
$\Rightarrow$ получихме десните неравенства.
$\Rightarrow$ точката $(\bar{y},\bar{y})$ е равновесие по Неш
$\Rightarrow$ достатъчно е да търсим равновесията по Неш от вида $(\bar{x},\bar{x})$.

Пример:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ няма равновесие по Неш в чисти стратегии
$\Rightarrow$ ще търсим равновесие от вида $(\bar{x},\bar{x})$
$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, $\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3=1$, $\bar{x}_1 \ge 0$, $\bar{x}_2 \ge 0$, $\bar{x}_3 \ge 0$.

Въпрос: Възможно ли е измежду $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$ да има една 0 и две положителни:

БОО: $\left| \begin{array}{l} \bar{x}_3 = 0 \\ \bar{x}_1 > 0 \Rightarrow P(1,\bar{x}) = 0 \\ \bar{x}_2 > 0 \Rightarrow P(2,\bar{x}) = 0 \end{array} \right.$,,0"

$P(1,\bar{x}) = 0 = 0.\bar{x}_1 + 1.\bar{x}_2 - 2\cancel{\bar{x}_3} = \bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0$
$P(2,\bar{x}) = 0 = -1.\bar{x}_1 + 0.\bar{x}_2 + 3.\underset{0}{\bar{x}_3} = -\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0$

$\Rightarrow$ получихме, че $\overline{x_1} = \overline{x_2} = \overline{x_3} = 0$
$\Rightarrow$ противоречие.

$$\Rightarrow \text{трябва} \left| \begin{array}{l} x_1 > 0 \Rightarrow P(1, \overline{x}) = 0 \\ x_2 > 0 \Rightarrow P(2, \overline{x}) = 0 \\ x_3 > 0 \Rightarrow P(3, \overline{x}) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \overline{x_2} - 2\overline{x_3} = 0 \\ -\overline{x_1} + 3\overline{x_3} = 0 \\ 2\overline{x_1} - 3\overline{x_2} = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \overline{x_2} = 2\overline{x_3}, \ \overline{x_1} = 3\overline{x_3}$

и $\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} = 1$

$\Rightarrow 3\overline{x_3} + 2\overline{x_3} + \overline{x_3} = 1$

$\Rightarrow 6\overline{x_3} = 1 \Rightarrow \overline{x_3} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow \boxed{\overline{x_1} = \frac{1}{2}, \ \overline{x_2} = \frac{1}{3}, \ \overline{x_3} = \frac{1}{6}} \leftarrow$ равновесие по Неш.

Нека игра има равновесие в чисти стратегии в $(1,1)$:

$P(i,1) \le 0 \le P(1,j)$

$i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3$

В общия случай:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_0 1} & a_{i_0 2} & \dots & a_{i_0 n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underset{P(i_0, j)}{a_{i_0 j}} \ge \underset{P(i_0, i_0)}{0} \ge -a_{i_0 j} = \underset{P(j, i_0)}{a_{j i_0}}$$

$\Rightarrow$ НДУ една симетрична игра да има равновесие в чисти стратегии е да има ред с неотрицателни или стълб с неположителни числа (елементи).

Ако фиксираме ред с номер i_0:

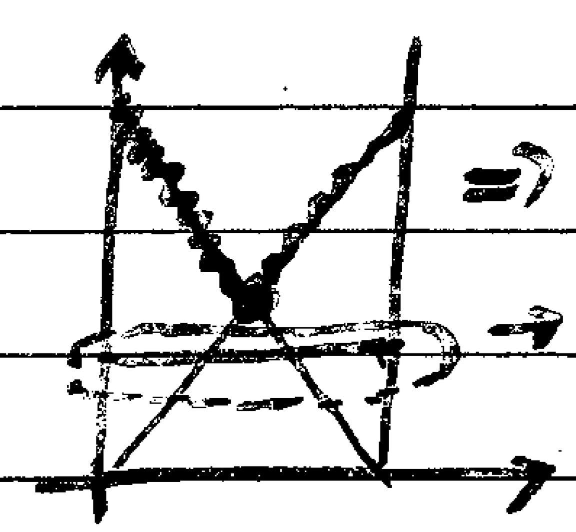
Правило за редовете:

$$\left| \begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \alpha_i a_i \ge a_{i_0} \\ \alpha_i \ge 0, \ i = 1, \dots, m, \ i \neq i_0 \\ \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m} \end{array} \right.$$

Правило за стълбовете:

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} B_j \beta_j \leq B_{j_0} \\ \beta_j \geq 0, j=1,\dots,n, j\neq j_0 \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{n} \beta_j = 1. \end{cases}$$

Пример: $\left.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix}\right)+ \to \left(\frac{3}{2}, 3/2\right) > (1;1)$



$\Rightarrow$ min на max

$\to$ никога няма да изберем втора чиста стратегия

Решаваме системите:

$$\begin{cases} 0.\bar{y}_1 + 3.\bar{y}_2 = v \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = v \\ 3.\bar{y}_1 + 0.\bar{y}_2 = v \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1 \\ \bar{y}_1 \geq 0, \bar{y}_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0.\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 3\bar{x}_3 = v \\ 3.\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + 0.\bar{x}_3 = v \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1 \\ \bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, \bar{x}_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$v = \min_y \left(\max_x P(x,y)\right).$$

Развиваме $P(x,y)$ по x:

$$P(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(i,y) \leq \max_{i=1,2,3} P(i,y)$$

$$\max_{i=1,2,3} P(i,y) \leq \max_{x\in X} P(x,y) \leq \max_{i=1,2,3} P(i,y)$$

защото чистите стратегии са подмножество на всички стратегии

$$\Rightarrow \max_{x\in X} P(x,y) = \max_i P(i,y)$$

$$v = \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X} P(x,y)\right) = \min_{y\in Y}\left(\max_{i=1,2,3} P(i,y)\right)$$

$$= \min_{y_2\in[0,1]}\left(\max_{i=1,2,3} P(i,y)\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \text{има цена } v$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} & m & n & 1 \\ \hline m & 0 & A & -1 \\ n & -A^T & C & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \to \text{стратегии} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{t} \end{pmatrix}$$

За матрицата A:

$$P(i,\bar{y}) \le v \le P(\bar{x}, j)$$
$$i=1,\dots,m \qquad j=1,\dots,n$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \le v, \; i=1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i \ge v, \; j=1,\dots,n \\ \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 1 = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j \\ \bar{x}_i \ge 0, \bar{y}_j \ge 0 \end{cases}$$

Да напишем сега тези неравенства за $\begin{pmatrix} 0 & A & -1 \\ -A^T & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$:

Съответните на първите m неравенства за A са:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j - \bar{\lambda} \le 0, i=1,\dots,m \to$ първите $\underline{m}$ реда

$-\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{x}_i + \bar{\lambda} \le 0, j=1,\dots,n \to$ следващите $\underline{n}$ реда

$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j \le 0 \to$ последния ред

ще получим $(\bar{x}, \bar{y}, v)$: $\bar{x}, \bar{y}$ и цената v.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j + \lambda = 1 \\ x_i \ge 0, y_j \ge 0, \lambda \ge 0 \end{cases}$$

$\boxed{1сл.}$ Допускаме, че $\bar{\lambda} = 1 \Rightarrow \bar{x}_i = \bar{y}_j = 0$
$\Rightarrow$ има равновесие в чисти стратегии
$\Rightarrow$ трябва да има неотрицателен ред
$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \underline{\bar{\lambda} \ne 1}$.

$\boxed{2сл.}$ $\bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j \le 0$.

Но от тук: $\bar{y}_j = 0, \forall j = 1,\dots,n$.

Имаме, че: $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j + \bar{\lambda} = 1 \\ \bar{x}_i \ge 0, \bar{y}_j \ge 0, \bar{\lambda} \ge 0. \end{cases}$

При $\bar{y}_j = 0, \forall j$ и $\bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = 1$.

Но $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \le \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j = 0 \Rightarrow \bar{x}_i = 0, \forall i = 1,\dots,m$

$\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow \underline{\bar{\lambda} \ne 0}$.

3сл. $\bar\lambda \in (0,1)$

$\Rightarrow$ в неравенството $\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j \le 0$

трябва да се достига равенство, т.е.

$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{y}_j$ и трябва да е $= \underbrace{\frac{1-\bar\lambda}{2}}_{\mu} > 0$

Означаваме:

$\bar{\bar{x}}_i = \frac{\bar{x}_i}{\mu}$, $\bar{\bar{y}}_j = \frac{\bar{y}_j}{\mu}$

$\Rightarrow$ неравенствата изглеждат така:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{\bar{y}}_j - \frac{\bar\lambda}{\mu} \le 0 \\ &-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \bar{\bar{x}}_i - \frac{\bar\lambda}{\mu} \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\bar\lambda}{\mu} \text{ е цената.}$$

13л. Разглеждаме симетрична игра, зададена от произволна матрица $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Нека:

$$a_{1j} \le \sum_{i=2}^{m} c_i a_{ij}, \quad c_i \ge 0, \quad \sum_{i=2}^{m} c_i = 1.$$

Разглеждаме матрицата $\bar{A}$, получена от A чрез задраскване на първия ред, и допускаме, че сме намерили равновесие по Неш за $\bar{A}$:

$\bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$. Взимаме $\tilde{x} = (0, \bar{x})$

$\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$

$\Rightarrow \bar{P}(i, \bar{y}) \le v \le \bar{P}(\bar{x}, j)$;

$\forall i = 2, \dots, m \qquad \forall j = 1, \dots, n$

от тези неравенства имаме:

$$v \le \sum_{i=2}^{m} a_{ij} \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \tilde{x}_i = P(\tilde{x}, j)$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{y}_j \le v, \quad i = 1, 2, \dots, m$

$P(i, \bar{y}) \le v, \ \forall i = 2, \dots, m \leftarrow$ имаме го.

От $a_{1j} \le \sum_{i=2}^{m} c_i a_{ij}$ имаме:

1) умножаваме с $\bar{y}_j$; 2) сумираме:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \bar{y}_j}_{= P(1, \bar{y})} \le \sum_{i=2}^{m} a_{ij} c_i . \bar{y}_j = \bar{P}(c, \bar{y}) \le v$$

т.к. v е равновесие по Неш

Аналогично за стълбовете:

$a_{i1} \geq \sum_{j=2}^{n} c_j \cdot a_i \Rightarrow$ можем да махнем първия стълб.

Нека X – ограничено и затворено, $X \subset \mathbb{R}^m$

Y – ограничено и затворено, $Y \subset \mathbb{R}^n$,

$f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

↳ непрекъсната функция

Нека $g(y) = \max\limits_{x \in X} f(x,y)$

$h(x) = \min\limits_{y \in Y} f(x,y)$.

Използваме дефиницията за непрекъснатост с редици:

Разгл. $g(y) = \max\limits_{x \in X} f(x,y)$, y – фикс.

взимаме $\{y_n\} \to y_0$

$\Rightarrow g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y_0)$ ← това трябва да покажем.

$g(y_n) = \max\limits_{x \in X} f(x, y_n) = f(x_n, y_n) \geq f(x, y_n), \ \forall x \in X$

БОО считаме, че $\exists x_0 \in X: \{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in X$

$g(y_n) = f(x_n, y_n) \geq f(x, y_n)$

$\downarrow \qquad \downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$

$g(y_0) = f(x_0, y_0) \quad f(x, y_0)$

и неравенството се запазва.

$\Rightarrow g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(y_0)$.

Задача:

Фирма произвежда 2 вида бързоразвалящи се продукти. Себестойността на единица от I продукт е 1,60 лв., а на II – 1,00 лв. Цената на I продукт е 2,40 лв., а на II продукт – 1,60 лв.

Цената на следващия ден се намалява 4 пъти и тогава се продава всичко. При хубаво време се продават 2000 единици от I продукт и 12000 единици от II продукт, а при лошо време – 8000 единици от I и 2400 единици от втория продукт.

Разходите за транспорт на ден са 800 лв.

	себестойност	цена	4пъти↓ цената
I	1,60 лв.	2,40 лв.	0,80 лв.
II	1,00 лв.	1,60 лв.	0,40 лв.

време	продукт I	продукт II
хубаво	2000	12000
лошо	8000	2400

<u>Решение:</u> $\max\limits_{x}\left(\min\limits_{y} P(x,y)\right)$

Матрица с 2 реда и 2 стълба:

имаме 2 стратегии: мислим, че времето ще е хубаво и мислим, че ще е лошо.

$$\begin{array}{c|cc} & \Lambda & X \\ \hline X & a & b \\ \Lambda & c & d \end{array}$$

стратегии на времето: или е хубаво, или е лошо

Пресмятаме:

$a = 2000 \cdot 0{,}8 + 2400 \cdot 0{,}6 - 9600 \cdot 0{,}6 - 800 =$
$= 1600 - 7200 \cdot 0{,}6 - 800 =$
$= 800 - 4320 = -3520.$

$b = 2000 \cdot 0{,}8 + 12000 \cdot 0{,}6 - 800 =$
$= 1600 + 7200 - 800 =$
$= 8000$

$c = 8000 \cdot 0{,}8 + 2400 \cdot 0{,}6 - 800 =$
$= 6400 + 1440 - 800 = 7040$

$d = 2000 \cdot 0{,}8 - 6000 \cdot 1 + 2400 \cdot 0{,}6 - 800 =$
$= 1600 - 6000 + 1440 - 800 =$
$= 3040 - 6800 = -3760.$

$\Rightarrow$ имаме: $\begin{pmatrix} -3520 & 8000 \\ 7040 & -3760 \end{pmatrix} :80$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{array} \begin{pmatrix} -44 & 100 \\ 88 & -47 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad \overline{y_1} \quad \overline{y_2}$$

$\Rightarrow \begin{cases} -44 \cdot \overline{x_1} + 88 \cdot \overline{x_2} = v \\ 100\overline{x_1} - 47\overline{x_2} = v \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} = 1 \\ \overline{x_1} \geq 0, \overline{x_2} \geq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} -44\overline{y_1} + 100\overline{y_2} = v \\ 88\overline{y_1} - 47\overline{y_2} = v \\ \overline{y_1} + \overline{y_2} = 1 \\ \overline{y_1} \geq 0, \overline{y_2} \geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow 144\overline{x_1} = 135\overline{x_2} \quad |:9$

$16\overline{x_1} = 15\overline{x_2}$

$\begin{cases} \overline{x_1} = \frac{15}{16} \cdot \overline{x_2} \\ \overline{x_1} + \overline{x_2} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{15}{16}\overline{x_2} + \overline{x_2} = 1$

$\frac{31}{16}\overline{x_2} = 1 \Rightarrow \overline{x_2} = \frac{16}{31} \Rightarrow \overline{x_1} = \frac{15}{31}.$

$v = -44 \cdot \frac{15}{31} + 88 \cdot \frac{16}{31}$

$v = +\frac{44}{31} \cdot (-15 + 2 \cdot 16) = \frac{44 \cdot 17}{31}$

$v = \frac{748}{31}$

$\Rightarrow 80 \cdot v = \frac{80{,}748}{31} \approx 1930{,}32$

$132\bar{y}_1 = 147\bar{y}_2 \;|:3$

$44\bar{y}_1 = 49\bar{y}_2$

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{49}{44}\bar{y}_2 \\ \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{49}{44}\bar{y}_2 + \bar{y}_2 = 1$

$\frac{93}{44}\bar{y}_2 = 1 \Rightarrow \bar{y}_2 = \frac{44}{93} \Rightarrow \bar{y}_1 = \frac{49}{93}$

$\Rightarrow$ окончателно имаме:

$\bar{x} = \left(\frac{15}{31}, \frac{16}{31}\right); \bar{y} = \left(\frac{49}{93}, \frac{44}{93}\right)$

$80 \cdot v = \frac{80{,}748}{31} \approx \underline{\underline{1930{,}32}}$

Ако произвеждаме гарантирания, сигурния минимум, т.е. 2000 от първата стока и 2400 от втората, печалбата ще бъде:

$2000 \cdot 0{,}80 + 2400 \cdot 0{,}6 - 800 =$

$= 1600 + 1440 - 800 = \underline{\underline{2240}}.$

$$\begin{array}{c} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 9 \\ 11 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$\quad\;\; \bar{y}_1 \;\; \bar{y}_2 \;\; \bar{y}_3$

$v = ?, \bar{x} = ?, \bar{y} = ?$

Няма равновесие в чисти стратегии

$$\begin{cases} 9\bar{x}_1 + 10\bar{x}_2 + 11\bar{x}_3 = v \\ 10\bar{x}_1 + 11\bar{x}_2 + 9\bar{x}_3 = v \\ 11\bar{x}_1 + 9\bar{x}_2 + 10\bar{x}_3 = v \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1 \\ \bar{x}_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, \bar{x}_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ решаваме тази система и получаваме

$v = 10,$

$\bar{x} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$

За $\bar{y}$ системата е същата: $\bar{y} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Доп., че има равн. при което $x_i = 0$.

$\Rightarrow$ трябва да стигнем до противоречие.

$\Rightarrow P(\bar{x},\bar{y}) \geq P(x,\bar{y})$.

Аналогично за $Q(\bar{x},\bar{y}) \geq Q(\bar{x},y)$

$\Rightarrow P(\bar{x},\bar{y}) \geq P(i,\bar{y}),\ \forall i=1,\dots,m$ и
$Q(\bar{x},\bar{y}) \geq Q(\bar{x},j),\ \forall j=1,\dots,n$
са достатъчни условия за равновесие по Неш.

Теорема на Брауер (за неподвижна точка):

$F: S \to S,\ S \subseteq \mathbb{R}^n$

S – затворено, ограничено, изпъкнало

F – непрекъснато изображение.

$\Rightarrow \exists$ т. $\bar{x} \in S: \bar{x} = F(\bar{x})$.

$\overset{\text{непр.}}{H}: S \to T$ $\qquad$ $\overset{\text{непр.}}{G}: T \to T$

$\exists H^{-1}:\quad \underset{\text{непр.}}{H^{-1}}: T \to S$

20.11.

$h: S \to T$ $\qquad$ $g: T \to T$

$h^{-1}: T \to S$

↳ непр. изобр. $\qquad \Rightarrow \exists \bar{x} \in T: g(\bar{x}) = \bar{x}$.

биекция

Разгл. $h^{-1}(g(h(\bar{x})))$:

$h^{-1} \circ g \circ h: S \to S \Rightarrow$ има неподвижна точка

$\Rightarrow g(h(\bar{x})) = h(\bar{x}) \Rightarrow h(\bar{x})$ е неподвижна точка за g.

Биматрични игри:

$A = (a_{ij})_{m \times n},\ B = (b_{ij})_{m \times n}$

$x \in X = \{(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i=1,\dots,m\}$

$y \in Y = \{(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0,\ j=1,\dots,n\}$

$P(x,\bar{y}) \leq P(\bar{x},\bar{y}),\ \forall x \in X \qquad P(i,\bar{y}) \leq P(\bar{x},\bar{y})$
$Q(\bar{x},y) \leq Q(\bar{x},\bar{y}),\ \forall y \in Y \iff Q(\bar{x},j) \leq Q(\bar{x},\bar{y})$
$\forall i=1,\dots,m$
$\forall j=1,\dots,n$.

$P(x,y) = x^T A y \qquad Q(x,y) = x^T B y$.

Нека $(\bar{x}, \bar{y})$ е равновесие по Неш и $\bar{x}_{i_0} > 0$ за някое $i_0 = 1, \dots, m$

$\Rightarrow P(i_0, \bar{y}) = v = P(\bar{x}, \bar{y})$.

Допускаме противното:

$P(i_0, \bar{y}) < v, \ \bar{x}_{i_0} > 0 \mid \cdot \bar{x}_{i_0}$

$P(i, \bar{y}) \le v, \ \bar{x}_i, \ i \ne i_0 \mid \cdot x_i \quad \Big| +$

$\Rightarrow P(\bar{x}, \bar{y}) < v = P(\bar{x}, \bar{y})$

$\Rightarrow$ противоречие

$\Rightarrow \boxed{P(i_0, \bar{y}) = v = P(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } \bar{x}_{i_0} > 0}$

Аналогично при $\bar{y}_{j_0} > 0 \Rightarrow Q(\bar{x}, j_0) = w = Q(\bar{x}, \bar{y})$

От $P(i_0, \bar{y}) < P(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow i_0 : \bar{x}_{i_0} = 0$.

$F : X \times Y \to \underline{X \times Y}$ изпъкнало, ограничено, затворено

$\downarrow$

непрек.

Взимаме $(x, y) \in X \times Y$

$\Rightarrow F(x, y) = (x', y')$:

$$x_i' = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k}, \quad y_j' = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_{s=1}^{n} d_s}$$

непр $\Leftarrow$ $\overset{c_i(x,y)}{c_i} = \max(0, P(i, y) - P(x, y)), \ i = 1, \dots, m$

$\underset{d_j(x,y)}{d_j} = \max(0, Q(x, j) - Q(x, y)), \ j = 1, \dots, n$

Ако (x, y) е равновесна точка $\Rightarrow$

$c_i = 0, \ d_j = 0 \Rightarrow x_i' = x_i,$

$y_j' = y_j$

От теоремата на Брауер $\Rightarrow \exists$ неподвижна точка.

$$\bar{x}_i = \frac{\bar{x}_i + \bar{c}_i}{1 + \sum_{k=1}^{m} \bar{c}_k}, \quad \bar{y}_j = \frac{\bar{y}_j + \bar{d}_j}{1 + \sum_{s=1}^{n} \bar{d}_s}$$

$\bar{c}_i = \max(0, P(i, \bar{y}) - P(\bar{x}, \bar{y})), \ i = 1, \dots, m$

$\bar{d}_j = \max(0, Q(\bar{x}, j) - Q(\bar{x}, \bar{y})), \ j = 1, \dots, n$

Ако $\forall c_i$ са $0 \Rightarrow$ OK

Доп., че $\exists i_0 \in \{1, \dots, m\} : \bar{c}_{i_0} > 0$.

Доп., че $\bar{c}_i > 0, \ \forall i = 1, \dots, m$

$\Rightarrow P(i, \bar{y}) > P(\bar{x}, \bar{y}) \mid \cdot \bar{x}_i \ \Big| \sum_{i=1}^{m} \to$ сумираме по тези i, за които $\bar{x}_i > 0$.

$\Rightarrow P(\bar{x}, \bar{y}) > P(\bar{x}, \bar{y})$

$\Rightarrow \exists \ \bar{c}_{i_0} = 0$ за някое i_0.

Задача: $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 1\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

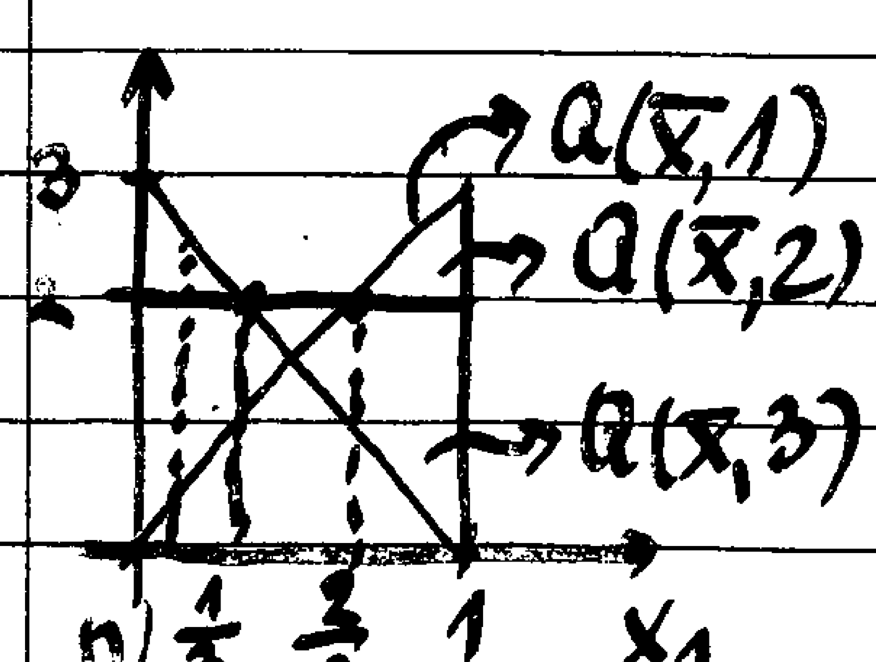
равновесие в чисти стратегии

$A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ няма равновесие в чисти стратегии.

$A \to \max$ по стълбове
$B \to \max$ по редове

I играч има само 2 стратегии
$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$
$\bar{y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3)$



$\bar{y}=(0,0,1) \Rightarrow$ равн. в чисти стратегии

Ако $Q(\bar{x},j_0)<Q(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow \bar{y}_{j_0}=0.$

$\bar{x}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \to$ има 1 променлива.
Другата е 1-първата пром.

$\bar{y}_{j_0}>0 \Rightarrow Q(\bar{x},j_0)=v$ $\quad Q(x,j)=v$
$Q(x,j_0)<v \Rightarrow \bar{y}_{j_0}=v$

$\Rightarrow$ единствените възможности за $\bar{x}$ а
$\bar{x}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ и $\bar{x}=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

1сл.) Нека $\bar{x}_1=\frac{1}{3} \Rightarrow \bar{x}_2=\frac{2}{3} \Rightarrow \bar{y}_1=0,\ \bar{y}_2>0,\ \bar{y}_3>0$

$\Rightarrow$ махаме първия ред на А $\Rightarrow$ остава
$\begin{pmatrix}7 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}P(1,\bar{y})=v=P(\frac{1}{3},\bar{y})\\ P(2,\bar{y})=v=P(\frac{2}{3},\bar{y})\end{cases}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}7\bar{y}_2+3\bar{y}_3=v\\ 5\bar{y}_2+2\bar{y}_3=v\end{array}\right\}\ 2\bar{y}_2+\bar{y}_3=0 \Big\}\ \begin{array}{l}\bar{y}_2=0,\\ \bar{y}_3=0\end{array}$
$\bar{y}_2+\bar{y}_3=1$
$\bar{y}_2>0,\ \bar{y}_3>0$ $\quad \Rightarrow$ противоречие.

2сл. $\bar{x}_1=\frac{2}{3},\ \bar{x}_2=\frac{1}{3} \Rightarrow \bar{y}_3=0,\ \bar{y}_1>0,\ \bar{y}_2>0.$

$$\begin{cases} P(1,\bar{y})=v \\ P(2,\bar{y})=v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1\cdot\bar{y}_1+7\cdot\bar{y}_2=v \\ 4\cdot\bar{y}_1+5\cdot\bar{y}_2=v \\ \bar{y}_1+\bar{y}_2=1, \\ \bar{y}_1>0,\ \bar{y}_2>0. \end{cases}$$

$3\bar{y}_1=2\bar{y}_2 \Rightarrow \bar{y}_1=\frac{2}{5},\ \bar{y}_2=\frac{3}{5} \Rightarrow v=\frac{2}{5}+\frac{7\cdot 3}{5}=\frac{23}{5}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x}=\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right);\ \bar{y}=\left(\frac{2}{5};\frac{3}{5};0\right),\ v=\frac{23}{5}}$$

Проверка, че $\bar{x},\bar{y}$ е решение:

$$Q(\bar{x},\bar{y})=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/5\\ 3/5\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/5\\ 3/5\\ 0\end{pmatrix}=\underline{(2)} \Rightarrow w=2$$

$$P(\bar{x},\bar{y})=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/5\\ 3/5\\ 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & \frac{19}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/5\\ 3/5\\ 0\end{pmatrix}=\underline{\left(\frac{23}{5}\right)} \Rightarrow v=\frac{23}{5}=4{,}6.$$

$\Rightarrow P(\bar{x},\bar{y})=\frac{23}{5};\ Q(\bar{x},\bar{y})=2.$

$P(1,\bar{y})=\frac{23}{5} \Rightarrow$ ok /* $1\cdot\frac{2}{5}+7\cdot\frac{3}{5}+3\cdot 0$ */

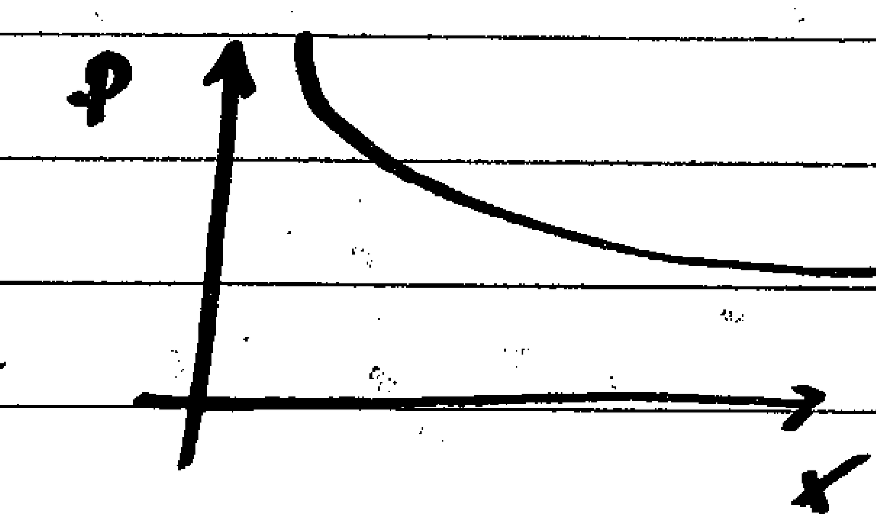
$P(2,\bar{y})=\frac{23}{5} \Rightarrow$ ok. /* $4\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot 5+0$ */

$Q(\bar{x},1)=2 \Rightarrow$ Ok.

$Q(\bar{x},2)=2 \Rightarrow$ Ok.

$Q(\bar{x},3)=1<2 \Rightarrow$ OK.

$P(x_1+x_2+\dots+x_n)$ ↓ произволна намаляваща функция, приемаща положителни стойности



$u_i(x_1,\dots,x_n)=x_i\cdot P(x_1+\dots+x_n),\ \forall i=1,\dots,n$

Има ли равновесие по Неш и какво е то?

$u^* \geq u_i$

$x_i^*\cdot P(x_1^*+\dots+x_n^*) \geq x_i\cdot P(x_1^*+\dots+x_n^*)$

x_i^* $\qquad$ x_i

$P > 0$, $P \to$ намаляваща
$\Rightarrow P' \ldots$

Равновесие по Неш:
точка $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$:
$$u_i(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}) \geq u_i(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{i-1}}, x_i, \overline{x_{i+1}}, \ldots, \overline{x_n})$$

$\Rightarrow u_i(x_i) = x_i \cdot P(x_i + C)$,
$$C = \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_{i-1}} + \overline{x_{i+1}} + \ldots + \overline{x_n}$$
$\Rightarrow u_i'(\overline{x_i}) = P(\overline{x_i} + C) + \overline{x_i} \cdot P'(\overline{x_i} + C) = 0$

за максимум

$$\overline{x_i} + C = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} = C^*$$

$\Rightarrow P(C^*) + \overline{x_i} \cdot P'(C^*) = 0$
$$\overline{x_i} = -\frac{P(C^*)}{P'(C^*)} \Rightarrow \text{равни са } \forall i$$
$$\Rightarrow \overline{x} = -\frac{P(n\overline{x})}{P'(n\overline{x})}$$

Примери:

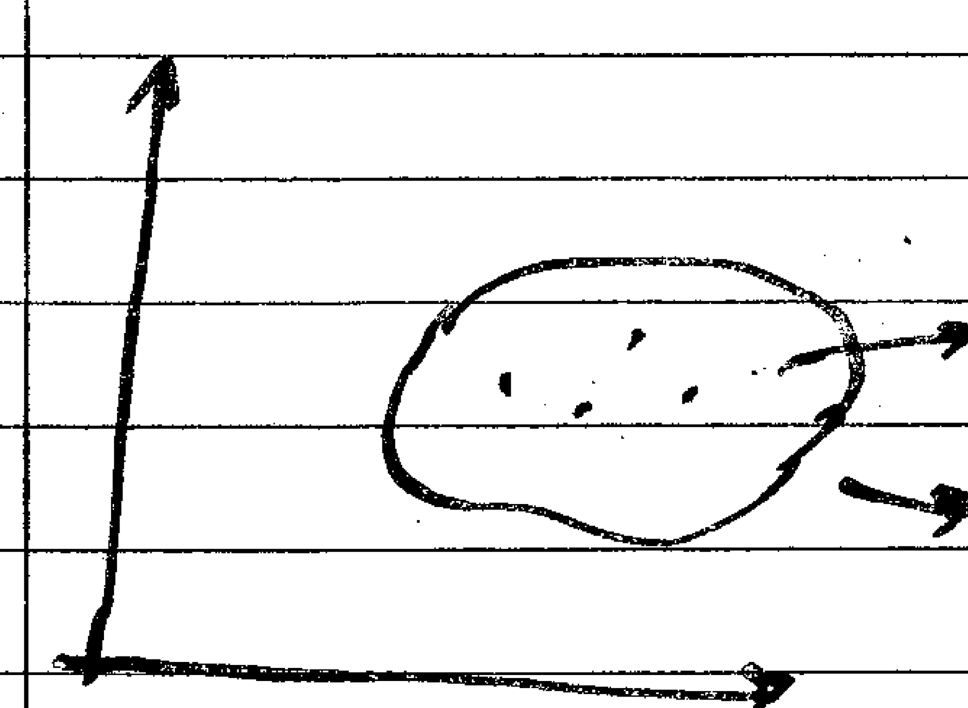
1.

5 / 5	0 / 10
10 / 0	1 / 1

$\downarrow$ max

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \to \min$$
$$B = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\to$ A и B са конкуренти, не си вярват и не си говорят $\to$ това е най-доброто сигурно.
Очакваната печалба:
$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left[\sum_{j=1}^{n} y_j \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} \right]$$
$\to$ все изобразяваме печалбата като множество от точки в равнината



$\to (a_{ij}, b_{ij})$
$\to$ взимаме изпъкналата обвивка
$\to$ това е, което могат да изкарат при антагонистична игра.

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} p_{ij} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix}$$

ако избират с еднакви вероятн.

2.

4 / 1	0 / 0
0 / 0	1 / 4

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

2.7.11 $\begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}$ $v = 0$

$\overline{x} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\overline{y} = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$ $v = 0$

$\overline{x} = (1, 0, 0)$

$\overline{y} = (1, 0, 0)$

$\overline{\overline{x}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\overline{\overline{y}} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ → това равновесие по Неш ли е?

Достатъчно е да проверим, че

$P(i, \overline{\overline{y}}) \leq 0 \leq P(\overline{\overline{x}}, j)$

$i = 1,2,3 \qquad j = 1,2,3$

$P(1, \overline{\overline{y}}) = 0$, $\overline{\overline{x}}_1 = 0 \Rightarrow$ противоречие $\overline{\overline{x}}$.

$\Rightarrow$

Казали сме, че при $x_{i_0} > 0 \Rightarrow P(i_0, \overline{y}) = v$

Сега показахме, че обратното не е вярно.

Пример:

$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 10 & 11 & 9 \\ 11 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ → правим тази игра симетрична:

↓

разместваме местата на редовете

$\begin{pmatrix} 10 & 11 & 9 \\ 9 & 10 & 11 \\ 11 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

$\downarrow -10$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Допускаме, че $x=(0,x_2,x_3)$ е равновесие по Неш

$\Rightarrow -1.0+0.x_2+1.x_3=0 \Rightarrow x_3=0$
и $1.0+(-1).x_2+0.x_3=0 \Rightarrow x_2=0$ $\Big\}$ $\overset{\circ}{x}$

! Можем да направим същите
• разсъждения, ако не сведем играта към симетрична.

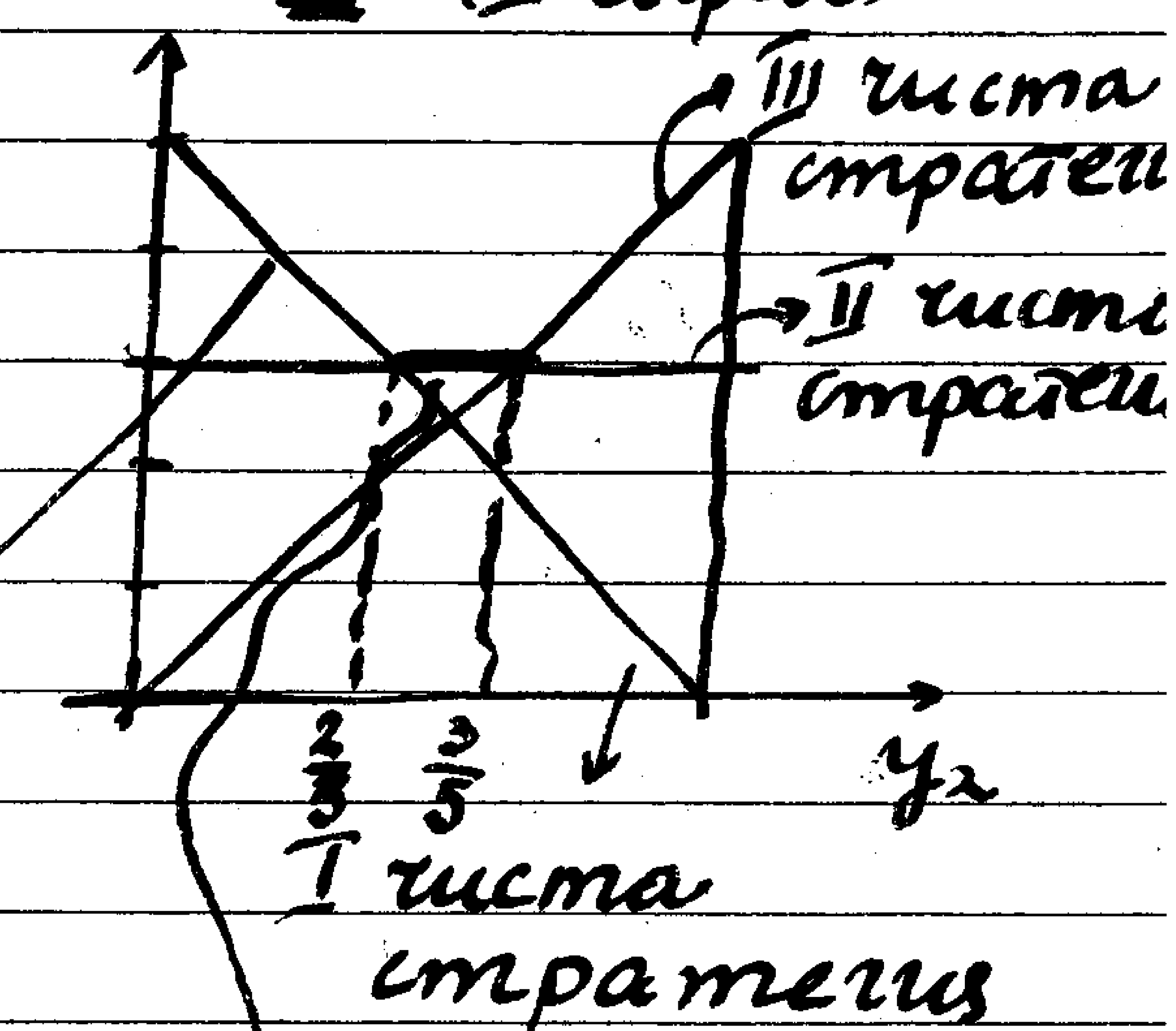
$$A=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ \;\; y_1 \quad y_2 \end{array} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

! A: max по стълбовете
• B: max по редовете.

$\underline{A}$: ако $\overline{II}$ играч играе $\overline{I}$ стратегия, $\overline{I}$ играч ще играе б (Iа);
ако $\overline{II}$ играч играе $\overline{II}$ стратегия, $\overline{I}$ играч ще играе отново 5 (IIа)

$\Rightarrow$ няма равновесие в чисти стратегии.

$\underline{A}$: (I играч)



$\overline{y}=\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$

$\overline{x}=(0,1,0)$

$w=\frac{18}{5}$

$v=3$

$P(x,\overline{y})\le P(\overline{x},\overline{y})=v$
$Q(\overline{x},y)\le Q(\overline{x},\overline{y})=w$

тази отсечка:
$P(3,y)=P(3,(1-y_2,y_2))$
// $P(3,y)=P(3,(1-y_2,y_2))=5y_2$

цялата отсечка е:
$\alpha.(0,5)+(1-\alpha).(1,0)=(1-\alpha,5\alpha)$
$5\alpha=3 \Rightarrow \alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow 1-\alpha=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

/* Ако $\overline{y_2}=0 \Rightarrow \overline{y_1}=1, \overline{x_1}=1, \overline{x_2}=0, \overline{x_3}=0$
$\Rightarrow$ противоречие (получихме равновесие в чисти стратегии
// $(\overline{x},\overline{y}) \to$ равн. по Неш
// $\overline{x_{i_0}}>0 \Rightarrow P(i_0,\overline{y})=v$
// $P(i_0,\overline{y})<v \Rightarrow \overline{x_i}=0$
// $P(i,\overline{y})<v$

От $y_2=0 \Rightarrow y_1=1$

$\Rightarrow P(3,y)=P(3,(1-y_2,y_2))=$
$=0\cdot(1-y_2)+5\cdot y_2=5y_2$

$P(1,(1-y_2,y_2))=5\cdot(1-y_2)+0\cdot y_2=$
$=5-5y_2$

• $y_2=0 \Rightarrow y_1=1,\ x_2=x_3=0,\ x_1=1 \rightarrow$ пада
$P(2,(1-y_2,y_2))=3\cdot(1-y_2)+3\cdot y_2=3$

• Когато $0<\overline{y_2}<\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\overline{y_1}=1-\overline{y_2}$
$\overline{x_2}=\overline{x_3}=0,\ \overline{x_1}=1$
$\overline{x}=(1,0,0)$
$\overline{y}=(\underset{0}{\overline{y_1}},\ \underset{0}{\overline{y_2}})$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 1=Q(\overline{x},1)=w\\ 2=Q(\overline{x},2)=w\end{array}\right\}$ $1\neq 2 \Rightarrow$ противоречие
$\Rightarrow$ този случай отпада

• Когато $\frac{2}{5}<\overline{y_2}<\frac{3}{5} \Rightarrow \overline{y_1}=1-\overline{y_2}$

$\overline{x_1}=\overline{x_3}=0,\ \overline{x_2}=1$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow 3=Q(\overline{x},1)=w\\ 4=Q(\overline{x},2)=w\end{array}\right\}$ $3\neq 4$ противоречие

• Когато $\frac{3}{5}<\overline{y_2}<1 \Rightarrow 4\neq 1$ противоречие

• $\overline{y_2}=1$
$\Rightarrow$ аналогично: противоречие.

$\Rightarrow$ Остават случаите $\overline{y_2}=\frac{2}{5}$, т.е.

$\overline{y_1}=\frac{3}{5}$ и $\overline{y_2}=\frac{3}{5}$, т.е. $\overline{y_1}=\frac{2}{5}$

• Когато $\overline{y_2}=\frac{2}{5},\ \overline{y_1}=\frac{3}{5} \Rightarrow \overline{x_3}=0,\ v=3$ (вижда се от чертежа)

$\Rightarrow$ пишем система:

$$\left|\begin{array}{l}\overline{x_1}+3\overline{x_2}=w\\ 2\overline{x_1}+4\overline{x_2}=w\\ \overline{x_1}+\overline{x_2}=1\\ \overline{x_1}\geq 0,\ \overline{x_2}\geq 0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \overline{x_1}+\overline{x_2}=0$ противоречие

/* ⇒ остава $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$ *

$3 \; 4$ $\qquad \overset{\circ}{x}$ */

• $\overline{y_2} = \frac{3}{5}, \overline{y_1} = \frac{2}{5} \Rightarrow \overline{x_1} = 0, v = 3$

(вижда се от чертежа)

⇒ пишем система

$$\begin{cases} 3\overline{x_2} + 4\overline{x_3} = w \\ 4\overline{x_2} + \overline{x_3} = w \\ \overline{x_2} + \overline{x_3} = 1 \\ \overline{x_2} \geq 0, \overline{x_3} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3\overline{x_2} + 4\overline{x_3} = 4\overline{x_2} + \overline{x_3}$$

$\overline{x_2} = 3\overline{x_3}$

$\Rightarrow \overline{x_3} = \frac{1}{4}, \overline{x_2} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{x} = \left(0; \frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right), \overline{y} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$4 \; 4$

$w = 3\overline{x_2} + 4 \cdot \overline{x_3} = 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4}$

$\boxed{w = \frac{13}{4}}$

няма равн. в чисти стратегии.

$\begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix}$

има 2 равновесия в чисти стратегии

⇒ ако I играч избере I стратегия, а II играч избере II стратегия, отиват в $(-1,-1)$.

Кооперативни игри

→ да си говорят; заедно да избират вероятностите, с които да избират стратегии

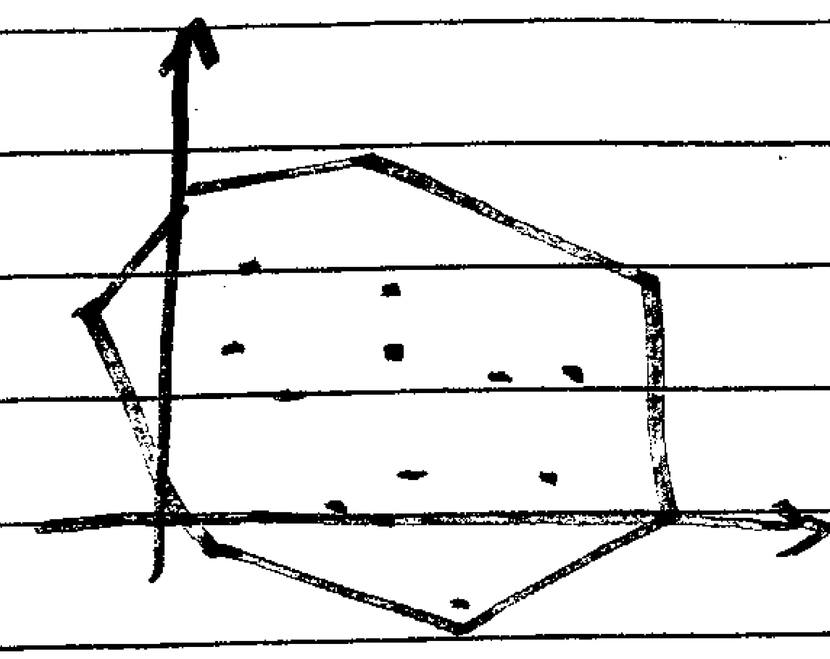
$(x_1, \ldots, x_m) = x \in X$

$(y_1, \ldots, y_n) = y \in Y$

$$\begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} x_i \left[\sum_{j=1}^{n} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} y_j \right]$$

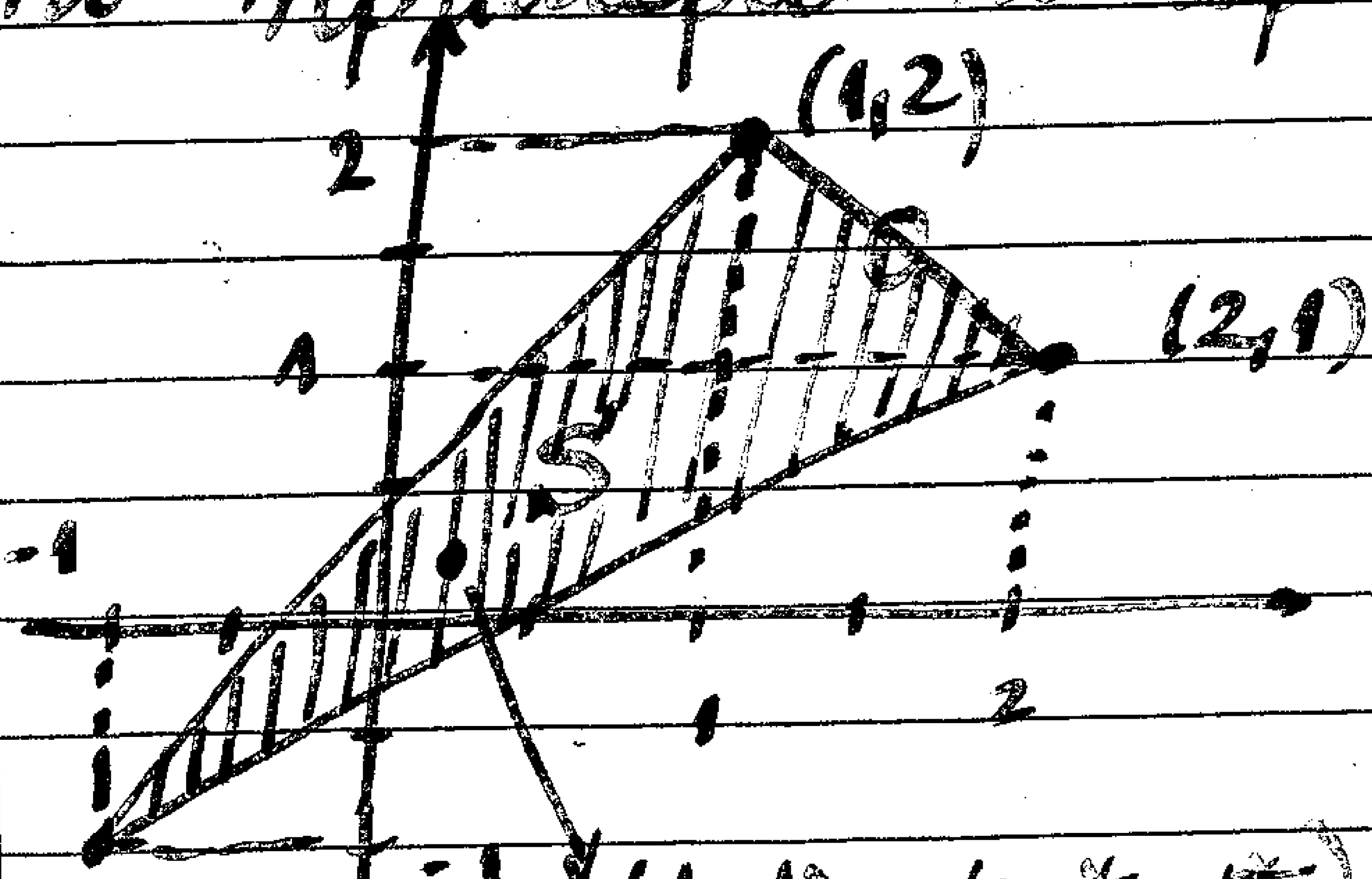
$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} p_{ij} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix}$$

$A=(a_{ij})_{m\times n}$
$B=(b_{ij})_{m\times n}$



изпъкналата обвивка
(в общия случай)
→ изпъкнало, затворено и ограничено множество.

По примера по-горе:



$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)=(u^*,v^*)$

$\begin{pmatrix} P((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \\ Q((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}x_1y_1 + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_2y_2 + \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}(x_1y_2+x_2y_1)$

Коя точка не може да се получи?
$\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ ← защо?

Това е средата на отсечката $(2;1) \leftrightarrow (1;2)$.

$\Rightarrow \begin{cases} x_1y_1=\frac{1}{2} & x_1+x_2=1 \\ x_2y_2=\frac{1}{2} & y_1+y_2=0 \\ x_1y_2+x_2y_1=0 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, y_1\geq 0, y_2\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1y_2=0$ и $x_2y_1=0$

Ако $x_1=0 \Rightarrow x_2=1 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow y_2=1$

Ако $y_2=0 \Rightarrow y_1=1 \Rightarrow x_2=0 \Rightarrow x_1=1$

Тогава $x_1y_1=0, x_2y_2=1$ или
$x_1y_1=1, x_2y_2=0$.

⇒ противоречие

⇒ Взимаме матрицата $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Намираме цената u^*:

$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}$ → няма равн. в чисти страт.

$\begin{matrix}2 & 1\end{matrix}$

$\Rightarrow$ имаме системата:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = u^* \\ -x_1 + x_2 = u^* \\ x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 > 0, x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - x_2 = -x_1 + x_2 \quad 3x_1 = 2x_2 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow u^* = 2x_1 - x_2 = 2 \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow \boxed{u^* = \frac{1}{5}}$$

За v^* имаме системата:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = v^* \\ -y_1 + 2y_2 = v^* \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 > 0, y_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = -y_1 + 2y_2 \quad 2y_1 = 3y_2 \quad \Rightarrow y_1 = \frac{3}{5}, y_2 = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow v^* = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{v^* = \frac{1}{5}}$$

Γ $B = \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \vdots \quad \dots \quad \vdots \\ b_{m1} \dots b_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow B^T$

при игра с нулева сума пишем печалбите на I играч (по принцип)

$\Rightarrow$ за да стане II играч първи, трябва да транспонираме матрицата.

$(S, (u^*, v^*)) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$

множество точка точка

Свойства на $(\bar{u}, \bar{v})$:

1. $(\bar{u}, \bar{v}) \in S$ (да може да се реализира)
2. $\bar{u} \geq u^*, \bar{v} \geq v^*$ (да не им предлагаме по-малко; да им предложим нещо по-добро).
3. $\nexists$ т. $(u, v) \in S$: $u > \bar{u}$ и $v > \bar{v}$ (едновременно; на едното може да е равенство) (т.е. $(\bar{u}, \bar{v})$ е оптимална точка; няма по-добро за двамата)

④ T – добро изпъкнало, ограничено и затворено, $T \subset S$,
$(S, (u^*, v^*)) \to (\bar{u}, \bar{v}) \in T$
$\Rightarrow (T, (u^*, v^*)) \to (\bar{u}, \bar{v})$

(u^*, v^*) може да е както в T, така и извън T (но в S), а може да е и извън S (но близо до S)

(т.е. ако оптималната точка за по-голямо множество е в по-малко множество, то оптималната точка за по-малкото множество е същата тази точка).

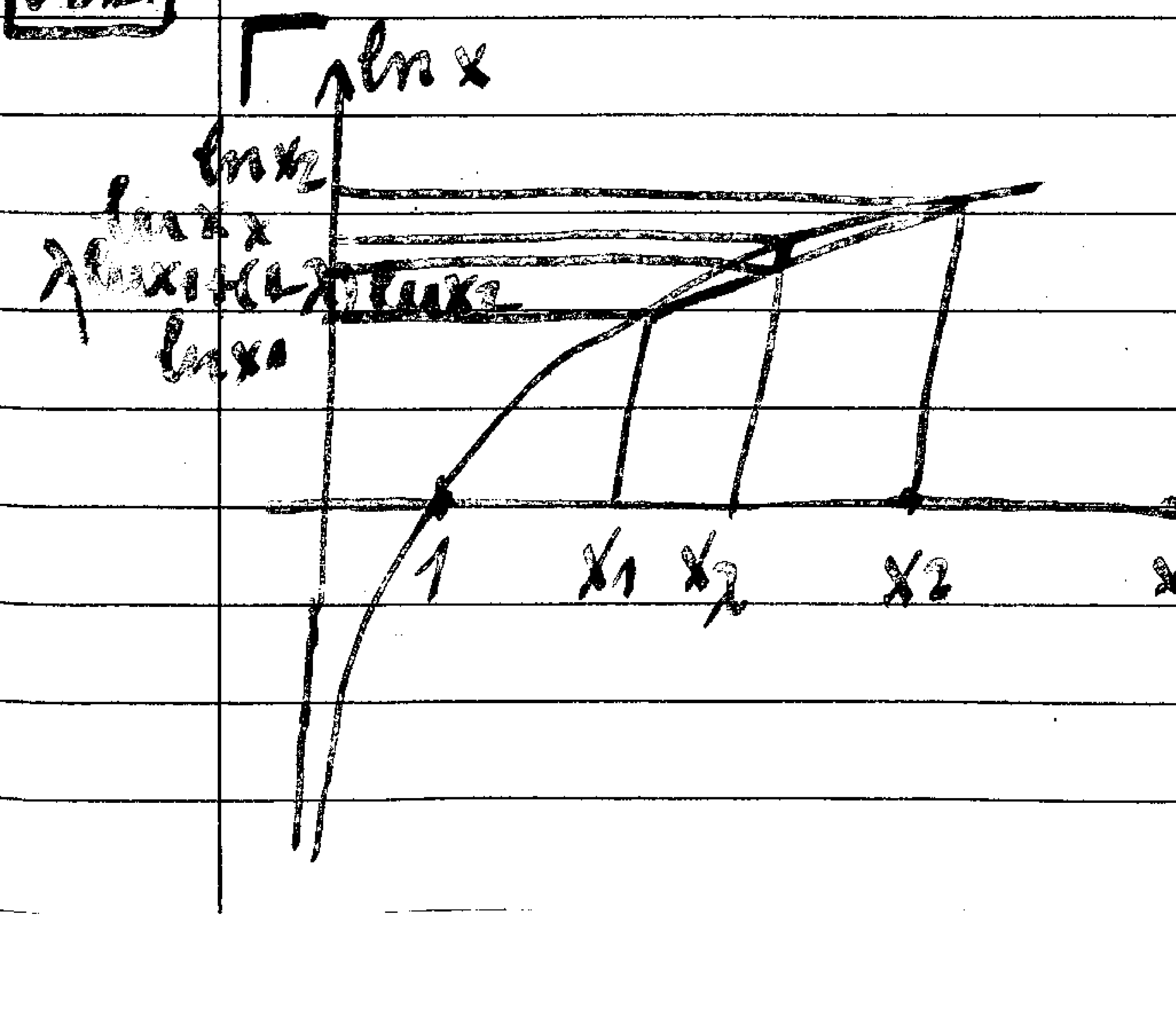
⑤ $L(u,v) = (u', v')$
↓
биекция
$u' = \alpha_1 u + \beta_1, \ \alpha_1 > 0$
$v' = \alpha_2 v + \beta_2, \ \alpha_2 > 0$
$\Rightarrow L^{-1}(u', v') = \left(\underbrace{\frac{u' - \beta_1}{\alpha_1}}_{u}, \underbrace{\frac{v' - \beta_2}{\alpha_2}}_{v}\right)$

$(S, (u^*, v^*)) \to (\bar{u}, \bar{v})$
$\Rightarrow (L(S), L(u^*, v^*)) \to L(\bar{u}, \bar{v})$.

⑥ $(u,v) \in S \Rightarrow (v,u) \in S$
$\Rightarrow (S, (u^*, u^*)) \to (\bar{u}, \bar{u})$
(играчите са равнопоставени, нямат предимства в тази игра; даваме на всеки за служенето)

∃! точка, която удовлетворява горните 6 свойства, е решението на задачата:
$$\begin{cases} (u - u^*)(v - v^*) \to \max \\ u \geq u^* \\ v \geq v^* \\ (u,v) \in S \end{cases}$$

$\boxed{04.12.}$



$\ln : (0; +\infty) \to (-\infty; +\infty)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$

$x_1>0,\ x_2>0,\ \lambda\in(0;1)$

$x_1\neq x_2$

$\ln(\underbrace{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}_{x_\lambda}) > \lambda\ln x_1+(1-\lambda)\ln x_2$

Неравенството се вижда от графиката (и от това, че ln е вдлъбната функция).

Строго доказателство:

$\ln(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \lambda\ln x_1+(1-\lambda)\ln x_2$

$\Longleftrightarrow$

$\ln(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \ln x_1^{\lambda}\cdot x_2^{(1-\lambda)}$

$\Longleftrightarrow$

$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2 > x_1^{\lambda}\cdot x_2^{(1-\lambda)}$

което е изпълнено поради неравенството на Коши с тегла (СА ≥ СГ, "=" при равни аргументи)

∎

Решаваме задача:

$$g(u,v)=(u-u^*)(v-v^*)\to\max$$
$$\left|\begin{array}{l}(u,v)\in S\\ u\geq u^*,\ v\geq v^*\end{array}\right.$$

Решението е $(\bar u,\bar v)$.

Има поне 1 такава точка.

Единственост на решението:

Допускаме, че има 2 решения:

Нека $(\bar u_1,\bar v_1)$ и $(\bar u_2,\bar v_2)$ са тези решения $\Rightarrow$

Тогава $g(\bar u_1,\bar v_1)=g(\bar u_2,\bar v_2)=M$

$\Rightarrow$ ще покажем, че $g\left(\frac{\bar u_1+\bar u_2}{2},\frac{\bar v_1+\bar v_2}{2}\right)>M$,

което ще доведе до противоречие:

Логаритмуваме g:

$\ln g(\bar u_1,\bar v_1)=\ln[(\bar u_1-u^*)(\bar v_1-v^*)]=$
$=\ln(\bar u_1-u^*)+\ln(\bar v_1-v^*)=\ln M$

$\|$

$\ln g(\bar u_2,\bar v_2)=\ln(\bar u_2-u^*)+\ln(\bar v_2-v^*)$

Имаме, че

$$\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{2} - u^* = \frac{1}{2}(\bar{u}_1-u^*) + \frac{1}{2}(\bar{u}_2-u^*)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{2} - u^*\right) > \frac{1}{2}\ln(\bar{u}_1-u^*) + \frac{1}{2}\ln(\bar{u}_2-u^*)$$

и

$$\ln\left(\frac{\bar{v}_1+\bar{v}_2}{2} - v^*\right) > \frac{1}{2}\ln(\bar{v}_1-v^*) + \frac{1}{2}\ln(\bar{v}_2-v^*)$$

+

$$\Rightarrow \ln g\left(\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_2}{2}, \frac{\bar{v}_1+\bar{v}_2}{2}\right) >$$

$$> \frac{1}{2}\ln g(\bar{u}_1,\bar{v}_1) + \frac{1}{2}\ln g(\bar{u}_2,\bar{v}_2) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln M + \frac{1}{2}\ln M = \ln M$$

$\Rightarrow$ допуснахме, че има 2 оптимални точки и получихме по-голяма стойност $\Rightarrow$ противоречие.

$\Rightarrow$ задачата има единствено решение.

Дефинираме си функция h:

$h(u,v) \stackrel{!}{=} (\bar{v}-v^*)u + (\bar{u}-u^*)v$,

където $(\bar{u},\bar{v})$ е решението на задачата по-горе.

$h(u,v)$ - линейна функция по u и по v

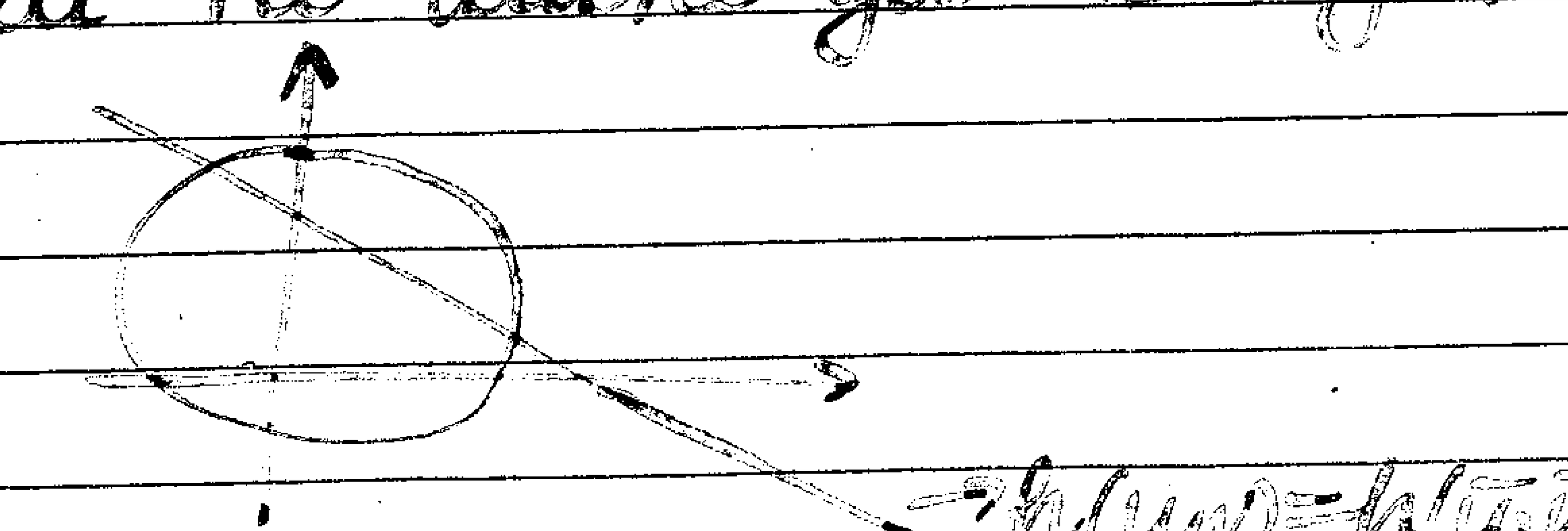
$(u,v)\in S \Rightarrow h(u,v) \le h(\bar{u},\bar{v})$

$(\bar{v}-v^*)u + (\bar{u}-u^*)v \le \underbrace{h(\bar{u},\bar{v})}_{\text{число}}$

$a.u + b.v \le c \to$ полуравнина.

$\Rightarrow S$ е в едната полуравнина спрямо $h(u,v) = h(\bar{u},\bar{v})$

$\Rightarrow$ това не може да се случи:



Бележки по математическо оптимиране —

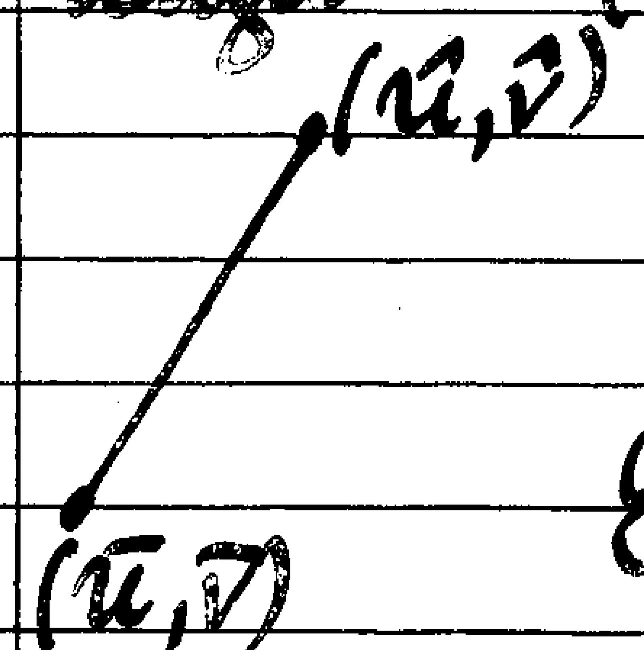
$$h(u,v)=\underbrace{(\bar{v}-v^*)}_{g'_u}u+\underbrace{(\bar{u}-u^*)}_{g'_v}v.$$

Ще покажем, че за $(u,v)\in S$ е изпълнено $h(u,v)\le h(\bar{u},\bar{v})$:

Допускаме, че това не е вярно:

$\exists$ т. $(\hat{u},\hat{v})$: $h(\hat{u},\hat{v})>h(\bar{u},\bar{v})$.

Разглеждаме отсечката с краища $(\hat{u},\hat{v})$ и $(\bar{u},\bar{v})$:



$$(1-\lambda)(\bar{u},\bar{v})+\lambda(\hat{u},\hat{v})=$$
$$=(\bar{u},\bar{v})+\lambda(\hat{u}-\bar{u},\hat{v}-\bar{v})$$

$$g\big((1-\lambda)\bar{u}+\lambda\hat{u},(1-\lambda)\bar{v}+\lambda\hat{v}\big)=$$
$$=(\bar{u}-u^*+\lambda(\hat{u}-\bar{u}))\cdot$$
$$\cdot(\bar{v}-v^*+\lambda(\hat{v}-\bar{v}))=$$
$$=g(\bar{u},\bar{v})+\lambda\underbrace{\big((\hat{u}-\bar{u})(\bar{v}-v^*)+(\bar{u}-u^*)(\hat{v}-\bar{v})\big)}_{A=h(\hat{u},\hat{v})-h(\bar{u},\bar{v})}+$$
$$+\lambda^2(\hat{u}-\bar{u})(\hat{v}-\bar{v})=$$
$$=g(\bar{u},\bar{v})+\lambda\cdot[\underset{+}{A}+\lambda(\hat{u}-\bar{u})(\hat{v}-\bar{v})]>g(\bar{u},\bar{v})$$

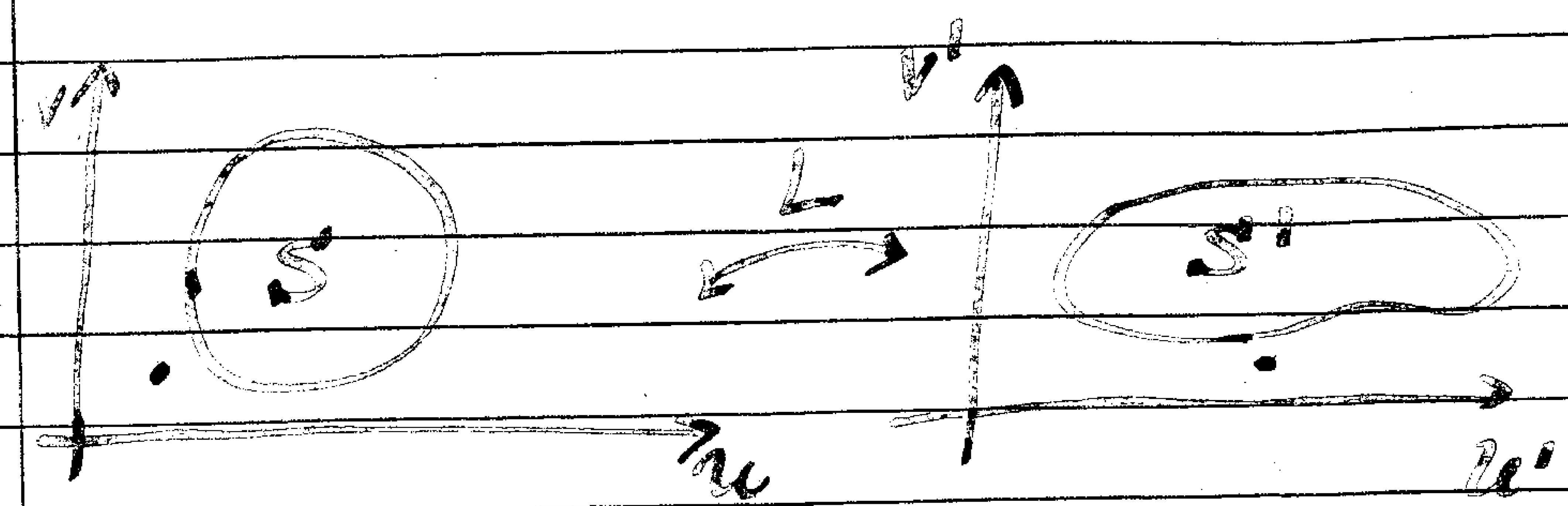
Взимаме $\underset{\lambda>0}{\lambda\to 0}$, правим граничен преход и получаваме последното неравенство.

$\Rightarrow$ противоречие.

Доказателства на шестте свойства:

Свойства (1), (2), (3) и (4) са очевидни (от изискванията точката да е допустима, достижима, най-добра).

(5) $g'(u',v')=(u'-u^{*\prime})(v'-v^{*\prime})=$
$$=\underbrace{(\alpha_1 u+\beta_1-(\alpha_1 u^*+\beta_1))}_{\alpha_1(u-u^*)}\underbrace{(\ \cdots\ )}_{\alpha_2(v-v^*)}=$$
$$=\alpha_1(u-u^*)\alpha_2(v-v^*)=$$
$$=\alpha_1\alpha_2(u-u^*)(v-v^*)=$$
$$=\alpha_1\alpha_2\, g(u,v)$$



$\Rightarrow \max g' = \alpha_1 \alpha_2 \max g$.

$\Rightarrow$ свойствата следва директно от връзката между g' и g.

⑥ Допускаме, че на $(S, (u^*, v^*))$ съответства точка $(\bar{u}, \bar{v})$ с $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Тогава:

$$g(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u} - u^*)(\bar{v} - v^*) =$$
$$= (\bar{v} - u^*)(\bar{u} - u^*) = g(\bar{v}, \bar{u})$$

$\Rightarrow$ получихме 2 различни оптимални точки

$\Rightarrow$ противоречие с допускането

$\Rightarrow (S, (u^*, v^*)) \to (\bar{u}, \bar{u})$.

11.12 Биматрична игра

$A = (\quad)$ $\quad B = (\quad)$

$$P(x,y) = x^T A y \to u^* = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} P(x,y)$$

$$Q(x,y) = x^T B y \to v^* = \max_{y \in Y} \min_{x \in X} Q(x,y)$$

$$\begin{cases} g(u,v) \to \max \\ (u,v) \in S,\ u \geq u^*,\ v \geq v^* \end{cases}$$

$g(u,v) = (u - u^*)(v - v^*)$

$h(u,v) = (\bar{v} - v^*)u + (\bar{u} - u^*)v$

фиксирани числа

h е линейна по u и по v

$(u,v) \in S$

$\Rightarrow h(u,v) \leq h(\bar{u}, \bar{v})$

$$\begin{cases} g(u,v) \to \max \\ (u,v) \in S \\ u \geq u^*, v \geq v^* \end{cases}$$

Взимаме линейно изображение $(u', v') = L(u,v)$:

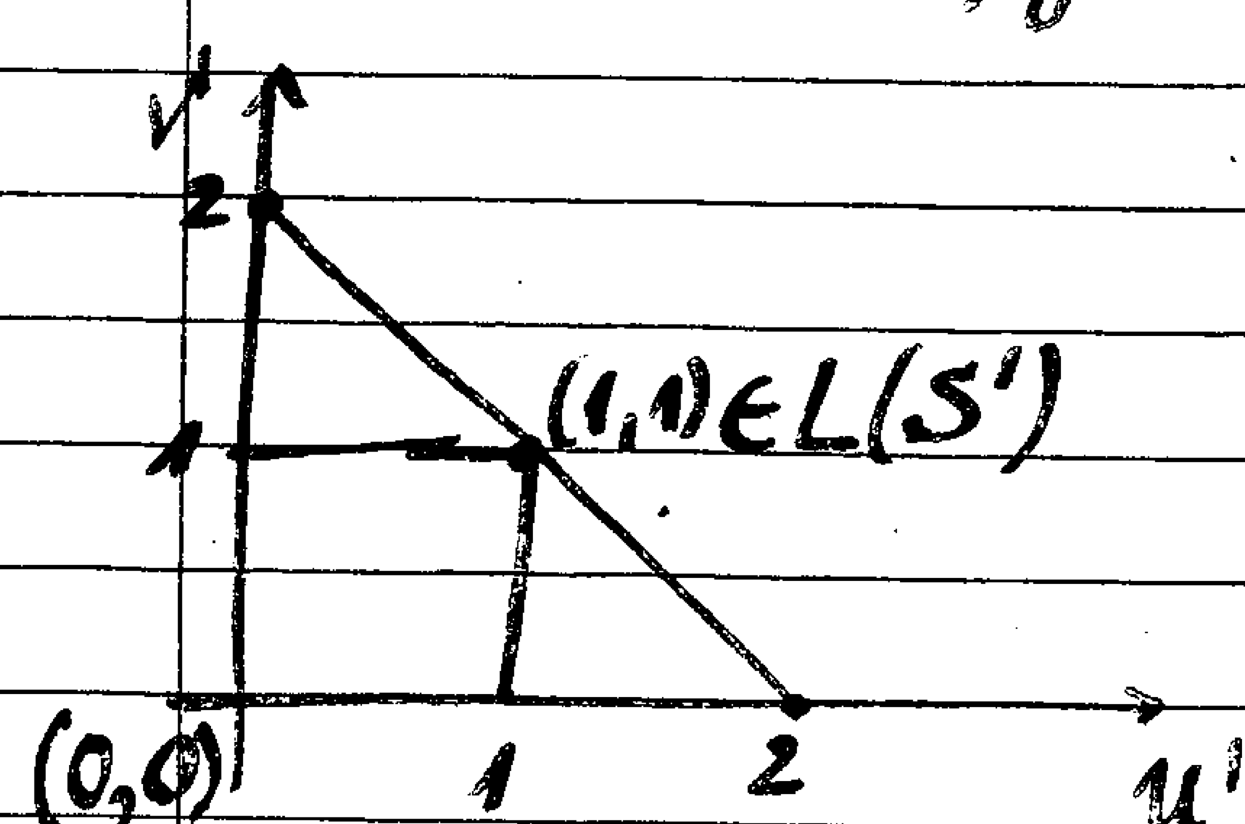
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\bar{u} - u^*}$, $\beta_1 = -\dfrac{u^*}{\bar{u} - u^*}$

$u' = \dfrac{u - u^*}{\bar{u} - u^*}$

Аналогично $v' = \dfrac{v - v^*}{\bar{v} - v^*}$

$L(u^*, v^*) = (0,0)$
$L(\bar{u}, \bar{v}) = (1,1)$

В новите координати:



$(u^*, v^*) \to (0,0)$
$(\bar{u}, \bar{v}) \to (1,1)$

$u\{(u,v): h(u,v) \leq h(\bar{u}, \bar{v})\}$
$h(u,v) = (\bar{v} - v^*)u + (\bar{u} - u^*)v$

$(\bar{v} - v^*)(u - \bar{u}) + (\bar{u} - u^*)(v - \bar{v}) \leq 0$

$(\bar{v} - v^*)(u - u^* + u^* - \bar{u}) +$
$+ (\bar{u} - u^*)(v - v^* + v^* - \bar{v}) \leq 0 \Big/ : [(\bar{v} - v^*) \cdot (\bar{u} - u^*)]$
$\vee$
0

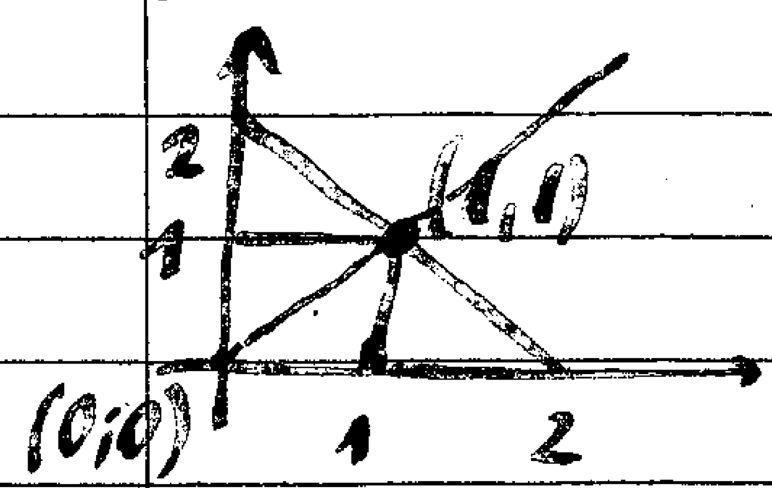
$\Rightarrow$ посоката на неравенството се запазва

$\Rightarrow \dfrac{u - u^* + u^* - \bar{u}}{\bar{u} - u^*} + \dfrac{v - v^* + v^* - \bar{v}}{\bar{v} - v^*} \leq 0$

$\dfrac{u - u^*}{\bar{u} - u^*} - 1 + \dfrac{v - v^*}{\bar{v} - v^*} - 1 \leq 0$

$\boxed{u' + v' \leq 2}$

Разглеждаме триъгълник Δ с върхове $(0;0)$, $(0;2)$ и $(2;0)$ → изпъкнало, затворено и ограничено множество.



$(\Delta, (0,0)) \to (1;1)$

$(L(S), L(u^*, v^*)) \to (1;1)$

$\Downarrow$

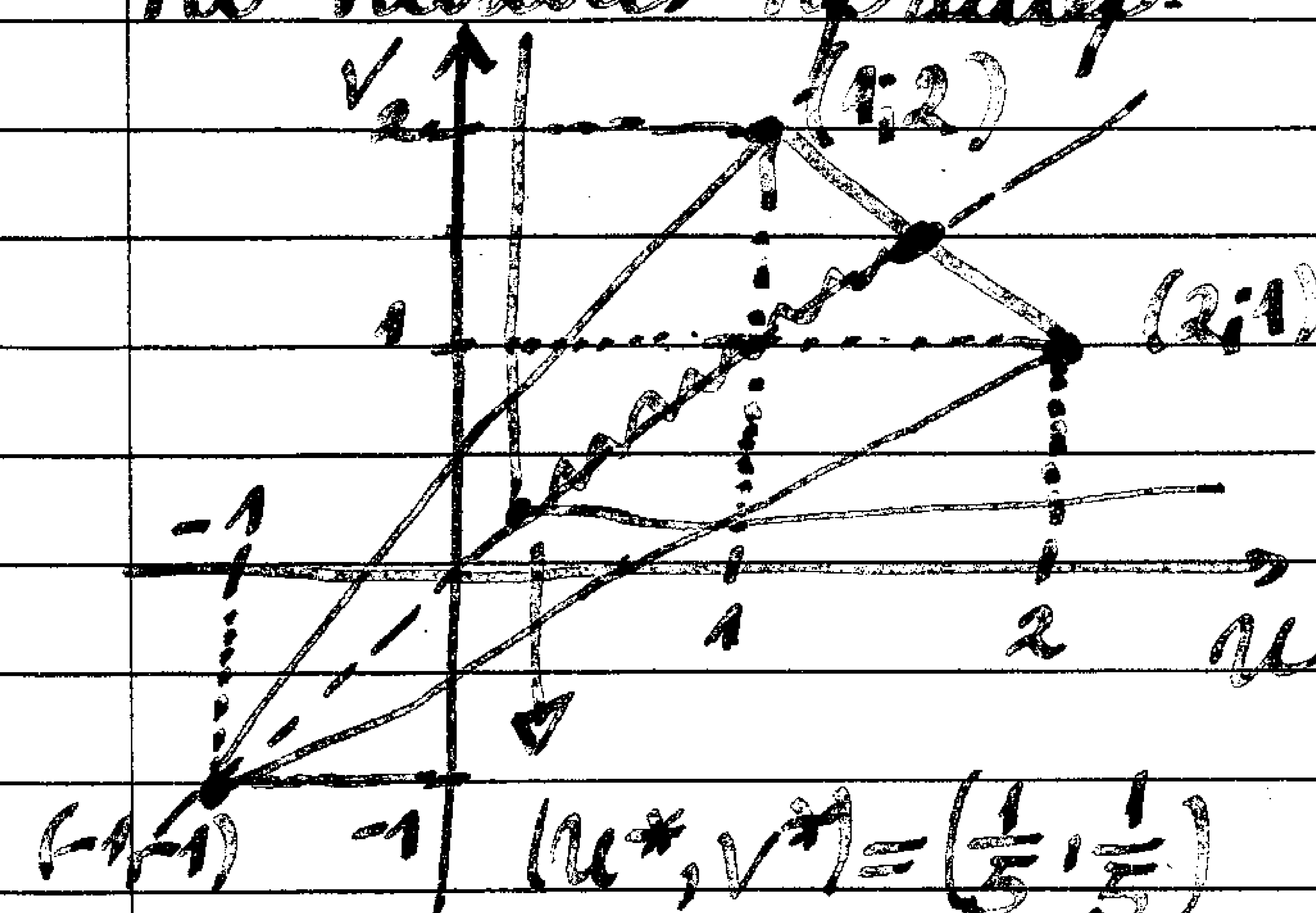
Δ е симетричен относно ъглополовящата на I и III квадрант

$(S, (u^*, v^*)) \to (\bar{u}, \bar{v})$

/* от св-во ② → интересува ни $S \cap \Delta$
от св-во ④ → $(1;1)$ */

⇒ Единствената точка, която удовлетворява (решава) условието на задачата, е същата тази единствена точка, която удовлетворява свойствата от ① до ⑥

По нашия пример: $\begin{pmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{pmatrix}$.



$(u^*, v^*) = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$

I начин: ъглополовяща и $u \geq \frac{1}{5}$, $v \geq \frac{1}{5}$.

II начин: За всички точки от вътрешността можем да се "придвижим" на горе / на дясно и получаваме противоречие със свойство ③.

⇒ единствено точките по отсечката с краища $(1;2)$ и $(2;1)$ могат да са решение на задачата.

Защо точно $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$?

Решаваме задачата:

$$\begin{cases}\left(u-\frac{1}{5}\right)\left(v-\frac{1}{5}\right)\to \max\\ \left.\begin{array}{l} u+v=3 \\ u\geq 1 \\ v\geq 1\end{array}\right\} \text{отсечката с краища } (1;2) \text{ и } (2;1).\end{cases}$$

Решаваме с множителите на Лагранж:

функция на Лагранж:

$$L(u,v,\lambda)=\left(u-\frac{1}{5}\right)\left(v-\frac{1}{5}\right)+\lambda(u+v-3)$$

$$\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial u}=0 \Rightarrow v-\frac{1}{5}+\lambda=0 \Rightarrow v=\frac{1}{5}-\lambda\\ \frac{\partial L}{\partial v}=0 \Rightarrow u-\frac{1}{5}+\lambda=0 \Rightarrow u=\frac{1}{5}-\lambda\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \rightarrow u+v=3\end{cases}$$

заместваме

$$\frac{1}{5}-\lambda+\frac{1}{5}-\lambda=3$$

$$2\lambda=\frac{2}{5}-3=-\frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda=-\frac{13}{10}}$$

$$u=\frac{1}{5}-\lambda=\frac{1}{5}-\left(-\frac{13}{10}\right)=\frac{15}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{u=\frac{3}{2}}$$

Аналогично $\boxed{v=\frac{3}{2}}$

/* Можем да решим тази конкретна задача и като използваме свойствата на квадратния тричлен:

$$\left(u-\frac{1}{5}\right)\left(3-u-\frac{1}{5}\right)=$$

$$=\left(u-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{14}{5}-u\right)=-u^2-3u-\frac{14}{25}\ \ldots\ */$$

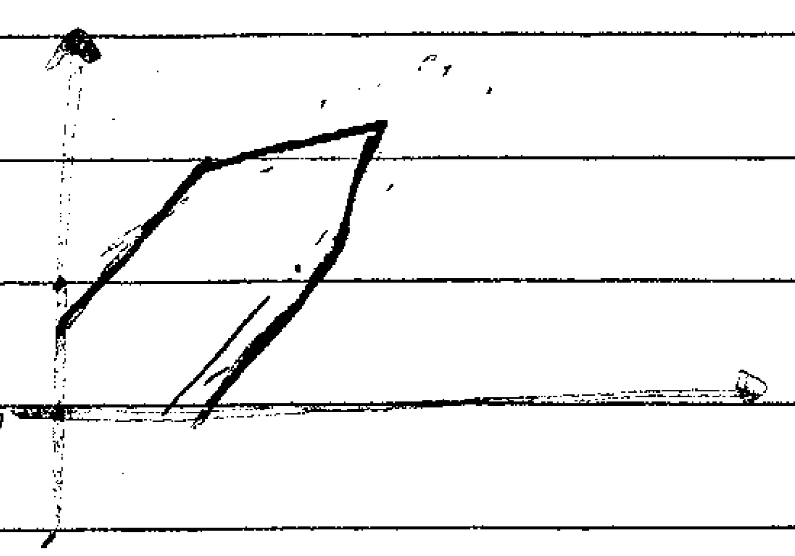
III начин: Отсечката, свързваща $(1;2)$ и $(2;1)$:

$$\alpha.(1;2)+(1-\alpha).(2;1)=(\alpha+(1-\alpha)2;\ 2\alpha+(1-\alpha))=$$

$$=(2-\alpha;\ 1+\alpha),\quad \alpha\in[0;1].$$

$\begin{cases} u_a = \alpha + (1-\alpha).2 \\ u_b = 2\alpha + (1-\alpha).1 \end{cases}$

⇒ заместване в условието u_1 и u_2 с u_a и u_b и решаване.

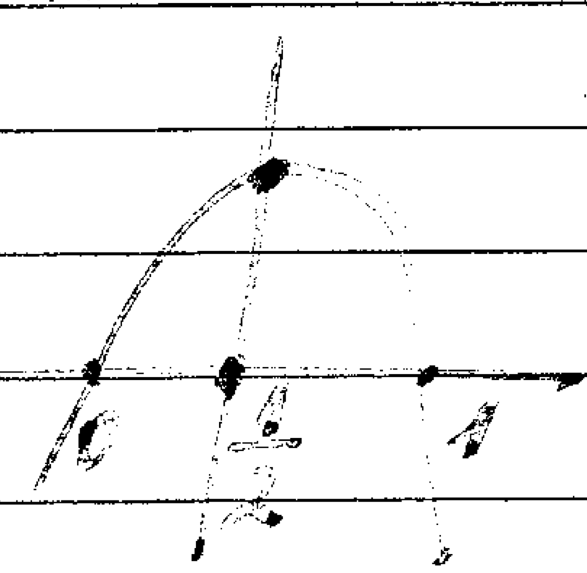


$\left(2-\alpha-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1+\alpha-\frac{1}{5}\right) =$

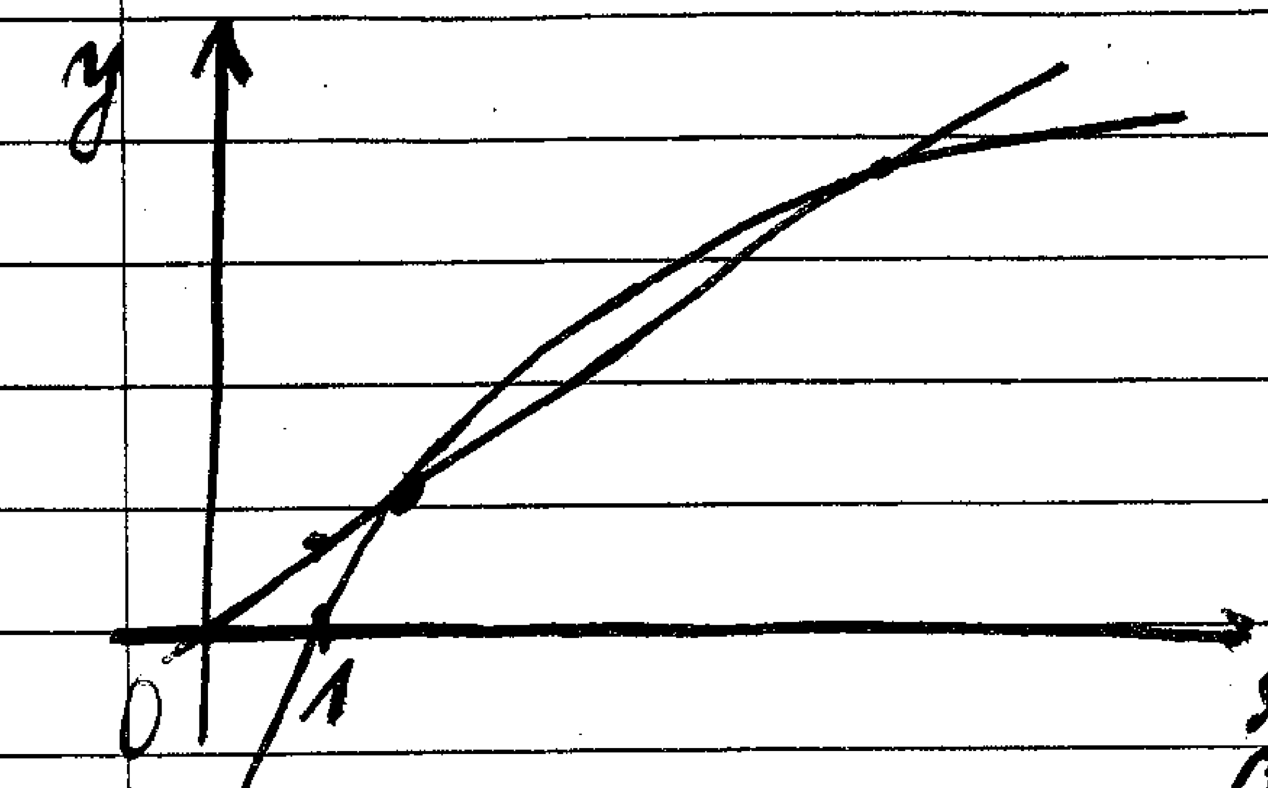
$= \left(\frac{9}{5}-\alpha\right)\left(\frac{4}{5}+\alpha\right) =$

$= -\alpha^2+\alpha+\frac{36}{25}$

⇒ $\begin{cases} -\alpha^2+\alpha+\frac{36}{25} \to \max \\ \alpha\in[0;1] \end{cases}$

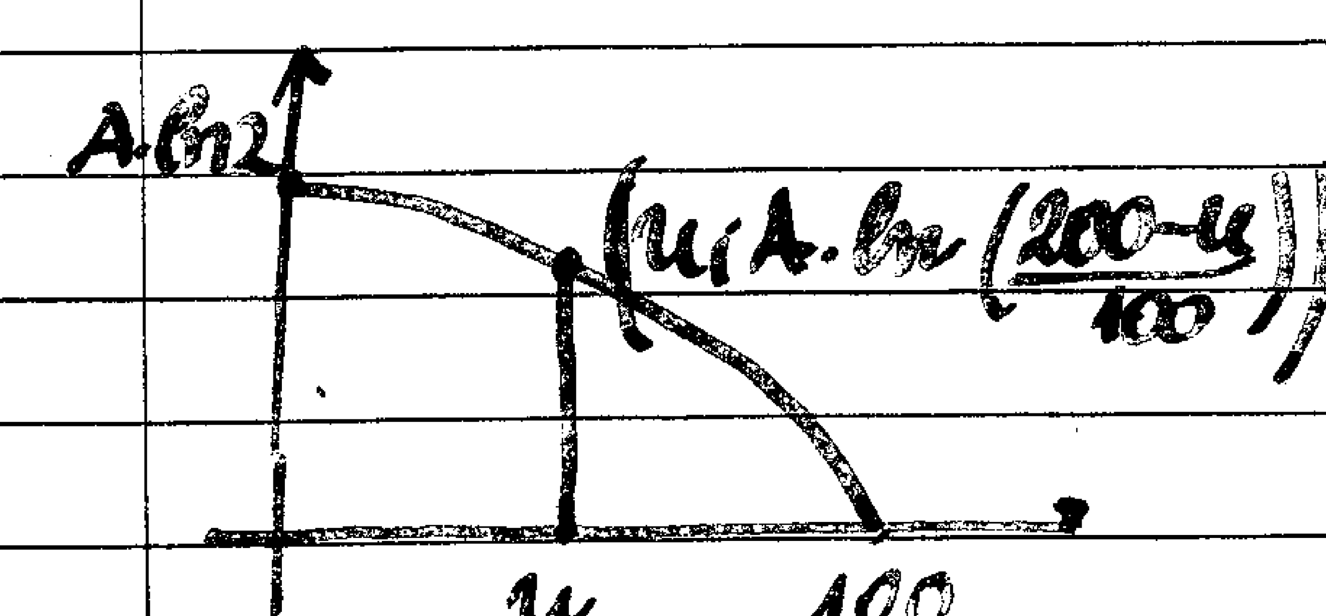


Задача:
Събираме богат и беден човек.
Как справедливо да разделим 100лв. между тях?



A → гъвкаво число, което отразява преценката на човека по отношение на числото $e (\approx 2,7)$.

частта от графиката под Ox: иска парите, много са ценни за него
частта от графиката над Ox: парите не са толкова важни



За бедния $A[\ln(100+100-u)-\ln 100] =$
$= A.\ln\frac{200-u}{100}$