Обща теория на относителността

Исторически бележки

Още когато създава своята знаменита теория на гравитацията, Исак Нютон пише: „Мисълта, че ... едно тяло може да привлича друго ... през празното пространство без посредник и преминавайки свободно през телата..., ми се струва нелепа ...“[1]

Нютон казва още: „Досега аз обяснявах небесните явления и приливите чрез силата на гравитацията, но не изяснявах причините за самата гравитация. Тази сила прониква до самият център на Слънцето и планетите по някаква причина ..., действа пропорционално силно на количеството вещество и намалява както квадрата на разстоянието. ... Причините на тези свойства на гравитацията и досега не са ми известни, но аз не измислям хипотези (Hypoyheses non fingo). Всичко, което не е следствие от фактите, са хипотези, а за хипотезите – метафизични, физични, механични, скрити свойства, няма място в експерименталната философия. ... Важното е, че гравитацията съществува реално, действа съгласно изложените от нас закони и е напълно достатъчна за обяснението на движенията на небесните тела и моретата“.

През 1859 г. Льоверие[2] изследва движението на четирите вътрешни планети и открива, че перихелият и афелият на Меркурий „избързват“ с около 43 дъгови секунди за 100 земни години. Хипотезата на Льоверие е, че това се дължи на планета между Слънцето и Меркурий. Мистериозната планета Vulcanus така и не е открита.

През следващите 50 години множество други хипотези биват отхвърлени. Движението на перихелия на Меркурий бива най-накрая обяснено от Алберт Айнщайн

[1]Трето писмо до Bentley, 1692 г.

[2]Le Verrier, *Théorie et tables du mouvement de Mercure.* Ann. Obs. Imperial (1859).

през 1915 година[3] с помощта на Общата теория на относителността. Първата работа на Айнщайн по ОТО[4] е съвместна с Марсел Гросман, професор по математика в Цюрих. Окончателният вариант на ОТО е публикуван самостоятелно от Айнщайн през 1916 г.[5]

Въодушевен от работите на Айнщайн, Давид Хилберт извежда математически теорията на гравитацията като следствие на принципа на най–малкото действие[6].

Частен случай на общата е Специалната теория на относителността (СТО). Тя обхваща всички видове физични явления – електричество, магнетизъм, и т. н., с единствено изключение на гравитацията:

$$\text{ОТО} \ = \ \text{СТО} \ + \ \text{гравитация} \ .$$

Докато СТО описва връзките между пространството и времето, то геометрията на пространство–времето е (свързано с) гравитацията.

СТО е създадена около 1905 година и е базирана на идеята на Айнщайн, че скоростта на светлината c е една и съща за всички инерциални системи. Интересно е да се отбележи[7], че в създаването на СТО, освен общоизвестни физици като Айнщайн и Лоренц, са участвали и най–големите геометри на своето време - Анри Поанкаре́ и Херман Минковски.

Теория на Айнщайн за гравитацията

Ще формулираме в най–съкратен вид идеите на Айнщайн.

- **Гравитацията е чисто геометрично свойство на пространството и времето.**

Гравитацията е напълно определена от Риманова метрика

$$ds = \sqrt{g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k}$$

със сигнатура $(+\,-\,-\,-)$, в 4–мерното пространство–време с координати

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \ = \ (ct, x, y, z)$$

Координатата $x^0 = ct$ съответства на времето, а $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ са пространствените координати. Точките в пространство–времето се наричат **събития**.

- **Общ принцип за ковариантност: Физичните закони не зависят от избора на координати и във всички координатни системи имат еднакъв вид.**

---

[3] A. Einstein, Sitzunsber. der Berl. Akad. (1915)

[4] A. Einstein, M. Grossman, *Entwurt einer verallgemeinerte Relativitaetstheorie und Theorie der Gravitation.* Zs. Math. Phys (1913)

[5] A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie.* Annalen der Physik (1916).

[6] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik.* Göttingen Nachr. (1915).

[7] Виж: Дубровин, Новиков Фоменко, *Современная геометрия.*, с.368.

Координатите са фикция - те са необходими от математически гледна точка, за да запишем физичните закони. Ние имаме пълна свобода да избираме координати, както и да ги сменяме с цел да опростим уравненията, изразяващи даден физически закон.

В частност, разстоянието между две събития $P(x)$ и $Q(x)$ се задава чрез криволинейнии интеграл

$$s = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{ik}\, dx^i\, dx^k}\ ,$$

зависещ от пътя на интегриране, но не и от избора на координати.

- **Уравнения на полето.**

Изследването на всяка конкретна гравитационна задача изисква:

1. Да открием съответната метрика, т.е. 10-те гравитационни потенциала

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}(x)\,, \qquad x = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

В точките, в който $g_{00} = 0$, метриката има осбеност; там времето спира, c става нула има наличие на маса.

2. Да проверим, че наистина $g_{ik}(x)$ удовлетворяват уравненията на полето (уравнения на Айнщайн). Това са 10 нелинейни ЧДУ от втори ред

$$R_{ik} = \Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ia,k} - \Gamma^a_{bi}\Gamma^b_{ka} + \Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{ab} \equiv 0\ ,$$

R_{ik} са компонентите на тензора на Ricci, а

$$\Gamma^a_{bc} = \tfrac{1}{2} g^{ai} \left[g_{bi,c} + g_{ci,b} - g_{bc,i} \right]$$

са символите на Christoffel от втори вид.

Ако в някоя координатна система всички $\Gamma^a_{bc} = 0$ в околност на никоя точка, то казваме, че там пространстаото е плоско, т. е. неизкривено.

3. Да решим четирите уравнения на геодезичните

$$\frac{d^2x^a}{ds^2} + \Gamma^a_{bc}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^c}{ds} = 0 \implies x^a = x^a(s)\ , \qquad a = 0, 1, 2, 3.$$

Това са траекториите $x = x(s)$ на частица с пренебрежимо малка (но положителна) маса в гравитационното поле за фиксираната задача.

Източникът на нашите точни знания за метриката g_{ij}, т. е. за изкривяването на пространството, са наблюденията на движевията на небесните тела и на светлината с последващо извличане на g_{ij} от уравненията на геодезичните.

Сравнение на теориите на Нютон и Айнщайн

Теорията на Айнщайн не е опровержение на теориита на Нютон, а нейно уточнение. Засега са известни четири физически опита, доказващи по–голямата прецизност на теорията на Айнщайн – отместванито на перихелия на Меркурий, гравитационното изместване (аберациита) на светлината, червеното изместване (зависимост на дължината на светлината от гравитационния потенциал на източника) и лазерната локация на точка от Луната.

Когато Айнщайн създава теорията си, единствено достоверно проверен е бил фактът за отместването на перихелия на Меркурий. Другите ефекти не са били наблюдавани дори качествено. Така например аберацията на светлината според теорията на Нютон е двойно по–малка в сравнение с теорията на Айнщайн и е измерена достатъчно точно през 1919 г.

Не е известно нито едно физическо опровержение на тази теория, следователно засега ти се приема за вярна.

В повечето случаи, двете теории дават практически един и същ резултат. В теорията на Нютон, уравненията на движение се описват не от 10-те потенциала g_{ij}, $0 \leq i \leq j \leq 3$, а от единствения потенциал

$$\varphi \;=\; \sum_A \frac{\mathcal{G} m_A}{|r - r_A|}$$

$r = (x, y, z)$ са координатите на точка от $\mathbb{R}^3$, A са точки с маса m_A и координати r_A, $\mathcal{G}$ е гравитационната константа.

Уравненията на Нютон ($F = ma$) за точката r, във векторен запис имат вида

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \;=\; \frac{\partial \varphi}{\partial r}\,.$$

Времето t е абсолютно – във всички точки от $\mathbb{R}^3$ то е синхронизирано. С други думи, всички часовници вървят еднакво.

В теорията на Айнщайн, в различните точки от пространството, дори и в различни инерциални координатни системи, времето тече по различен начин. Отделно от това, самата гравитация забавя часовниците. Колкото по–силно е гравитационното поле, толкова по–голим е коефициентът на забавяне; в частност, времето изобщо спира за точките с маса. Изобщо казваме, че **гравитацията изкривява пространството и времето.**

Теорията на Айнщайн автоматически решава и противоречивостта на въпроса за скоростта на гравитацията в теорията на Нютон – там тя се счита за безкрайна. В теорията на Айнщайн се приема, че скоростта на гравитацита е равна на скоростта на светлината.

Известни примери

1. При липсата на гравитация – в Специалната теории на относителността, пространство–времето е плоско с метриката на Минковски

$$ds^2 \;=\; c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \,.$$

Геодезичните в СТО са правите линии. Разстоянието между две точки може и да е нула, дори те да не съвпадат. За целта трябва да се движим със скоростта на светлината.

2. При наличието на едиствено тяло с маса – задача на Шварцшилд (1916).

3. При наличието на единствено тяло с маса, това тяло е сферически симетрично и се върти около оста си – задача на Kerr (1963).

Задача на Шварцшилд [8].

Точка S, примерно Слънцето, с маса m_S, разположена в началото $(t,0,0,0)$ на координатната система създава метрика (гравитационно поле)

$$ds^2 \;=\; \Big(1-\frac{\alpha}{r}\Big)c^2dt^2 \,-\, \frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} \,-\, r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 \,-\, r^2 d\theta^2 \,,$$

наречена метрика на Шварцшилд. Тук (t,r,φ,θ) са координатите в пространство–времето (сферични координати на Шварцшилд), $\alpha = \frac{Gm_A}{c^2}$ е гравитационният радиус[9] на точката S, а

$$r^3 \;=\; \alpha^3 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,, \quad r = \left\{ \begin{array}{c} \text{разстояние по Шварцшилд} \\ \text{в пространството } (x,y,z) \end{array} \right\} .$$

Лесно се проверява, че уравненията на Айнщайн $R_{ik}=0$ са изпълнени.

Метриката има особеност при $r=\alpha$, т.е. при $x=y=z=0$. Както вече отбелязахме, особеностите на метриката означават наличие на маса на съответното мисто и в съответното време.

Геодезичните в метриката на Шварцшилд са траекториите на планетите. Предполага се, че масите на планетите са пренебрежимо малки и не влияят върху метриката на Шварцшилд.

---

[8]Schwarzschild K., *Uber das Gravitationsfield eines Massenpunktes nach der einsteinischen Theorie.* Sitzunsber. der Berl. Akad. (1916).

[9]За сравнение, гравитационният радиус на Слънцето е 2953.4 метра, а на Земята – само 8.8 милиметра.

Траекториите се изразяват по няколко еквивалентни начина чрез елиптични функции:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{r} &= \frac{1}{3} + 4\wp(\varphi - \varphi_o) \qquad (\textit{Y.Hagihara},\ 1931)\ , \\
r &= \frac{p}{1 - e.\cos_q u} \qquad (u = \varphi - \varphi_o)\ , \\
\frac{1}{r} &= \frac{\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}{r_{\min}} + \frac{\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}}{r_{\max}}\ .
\end{aligned}
$$

Разстоянието между планетата и Слънцето е изразено чрез ъгъла: $r = r(\varphi)$. Същото важи и за ексцентричната аномалия $u = u(\varphi)$.

Планетата се движи в равнината $z \equiv 0$, и по-точно в пръстена

$$(r, \varphi) \in \left[r_{\min}, r_{\max}\right] \times [0, 2\pi)\ .$$

Във втората формула, решенията се параметризират от следните константи: параметър p, ексцентрицитет e, елиптичен модул q и фаза φ_0. В класическия случай формулата е същата, както и константите; единствеио изключение е елиптичниит модул, който е нула ($q = 0$); съответно $\cos_q u$ е равен на стандартнии $\cos u$.

Функцията $r = r(\varphi)$ има един чисто имагинерен период и един реален период $T_{Re} = 2\pi\mu\ ,\ \mu > 1$, задаващ „избързването на перихелия“

$$\Delta\varphi = 2\pi(\mu - 1) \approx 2\pi\frac{12\sqrt{q}}{e}\ .$$

Hagihara доказва[10], че в случая на Меркурий решението $r = r(\varphi)$ съвпада в рамките на експерименталната грешка с предсказаното от ОТО „избързване на перихелия на Меркурий“.

За разлика от класическата Нютонова механика, **в ОТО няма колизии, т.е. материалните частици не се сблъскват**. Ако планетата се движи право към Слънцето, то ще и трябва безкрайно много време, за да стигне до него. Разбира се това важи само за идеалния случай, когато става въпрос за две материални точки.

[10]Hagihara, Jap. Journ. of Astron. and Geoph., VIII, pp. 67, 168, 1931

Механика на Нютон-Галилей

Съгласно Х. Вайл, първото нещо, което трябва да направим при изследването на дадена физическа система, е да намерим нейните симетрии; в частност, трябва да намерим групата от линейни смени на променливите, които запазват вида на съответните за физическата система закони.

За класическата механика, тези симетрии са установени от Галилей. След това Нютон формулира и съответните диференциални уравнения.

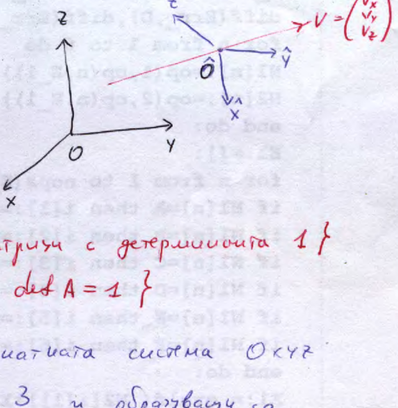
Принципът на Галилей гласи, че „природните закони са еднакви за всеки две инерциални системи".

Група на Галилей наричаме 10-мерната група от смени на променливите

$$\begin{pmatrix}\hat x\\ \hat y\\ \hat z\\ \hat t\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & A & & \begin{matrix}V_x\\ V_y\\ V_z\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\\ t_0\end{pmatrix},$$

където ${}^t(x,y,z)$ са координати в евклидовото пространство, t е времето; ${}^t(\hat x,\hat y,\hat z)$ са координатите във втората „инерциална спрямо първата" координатна система, $\hat t$ е времето във втората координатна система.

$V = {}^t(V_x, V_y, V_z)$ е скоростта, с която $\hat O \hat x \hat y \hat z$ се движи спрямо $Oxyz$.



Матрицата

$$A \in SO(3) = \{(3\times 3)\text{-ортогонални матрици с детерминанта } 1\}$$
$$= \{A_{3\times3} : A^tA = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \det A = 1\}$$

задава (еднократно) завъртане на координатната система $Oxyz$ около началото O. Размерността на A е 3 и образуващи са

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos\varphi & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

въртене на $\measuredangle\varphi$ около Oz — въртене на $\measuredangle\varphi$ около Oy — въртене на $\measuredangle\varphi$ около Ox

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ е транслация в пространството и времето.

Групата на Галилей е афинна и може да се представи във вида

$$\begin{pmatrix}\text{група на} \\ \text{Галилей}\end{pmatrix} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{ротации} \\ A}}{SO(3)} \rtimes \underset{\substack{\downarrow \\ 3 \text{ скорост} \\ V}}{\mathbb{R}^3} \rtimes \underset{\substack{\downarrow \\ \text{транслации} \\ {}^T(x_0, y_0, z_0, t_0)}}{\mathbb{R}^4}$$

полудиректно декартово произведение — полудиректно декартово произведение

Групата от транслации $\{{}^T(x_0, y_0, z_0, t_0)\} = \mathbb{R}^4$ прави групата на Галилей áфинна: групата на Галилей не е линейно пространство, но разликата на два елемента $(x,y,z,t) - (x',y',z',t')$ от $\mathbb{R}^4$ е вектор, т.е. се преобразува линейно:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} - \hat{x}' \\ \hat{y} - \hat{y}' \\ \hat{z} - \hat{z}' \\ \hat{t} - \hat{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \\ t - t' \end{pmatrix}.$$

Съществуването на 4-мерната група от симетрии - транслациите - подгрупа на 10-мерната група на Галилей е равносилно да кажем, че „всички точки (x,y,z) от евклидовото пространство, както и времето t, са равноправни".

3-мерната подгрупа $SO(3)$ от въртение около O-та е следствие от факта, че „всички направления в $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)\}$ са равноправни".

3-мерната подгрупа от инерциални движения $V = {}^T(V_x, V_y, V_z)$ съществува като следствие от относителността на понятието „движение" и „покой"

Ако се намираме в изолирано помещение (влак), то не можем да установим дали влакът се движи или е в покой с никакъв физически експеримент.

Уравненията на Нютон $m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = F(|(x,y,z) - (x',y',z')|)$ са инвариантни относно групата на Галилей защото:

а) F зависи само от разстоянията между точките

б) вторите производни (ускоренията) $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ не зависят от $V = {}^T(V_x, V_y, V_z)$

Група на Поанкаре́ – Лоренц

През 1881 г. Майкелсон провежда знаменит опит, с който доказва, че скоростта на светлината във вакуум е константна за всички инерциални координатни системи.

Това променя представите за устройството на пространството и времето. Времето t вече не е абсолютно, а зависи от координатите (x, y, z).

Специалната теория на относителността (СТО) има за предмет пространство-времевия континуум $\{(t, x, y, z)\}$, в който живват каквито и да е било маси.

СТО описва по-добре реалното пространство-време, в сравнение с механиката на Нютон-Галилей.

Метриката в СТО е метриката на Минковски

$$(*) \qquad ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Аналог на 10-мерната група на Галилей във СТО е също 10-мерната

$$\begin{pmatrix}\text{група на} \\ \text{Поанкаре́}\end{pmatrix} = \underbrace{SO(1,3)}_{\substack{\text{преобразования} \\ \text{на Лоренц}}} \rtimes \underbrace{\mathbb{R}^4}_{\text{транслации}}$$

полудиректна сума

Подгрупата от транслации $\mathbb{R}^4$ е същата, както и в теорията на Нютон-Галилей.

6-мерната подгрупа

$$SO(1,3)_c = \left\{ 4\times 4\text{-матрици } M : \ M \begin{pmatrix} 1/c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} {}^{T}M = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det M = 1 \right\}$$

съдържа линейните преобразования, запазващи метриката (*) $ds = \dots$

Нейните елементи задават формули за прехода от една към друга инерциална координатна система в 4-мерното пространство-време.

$$\begin{pmatrix} \hat{t} \\ \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \qquad M \in SO(1,3)$$

$6^{те}$ генератора на $SO(1,3)$ са /при $c = 1$ за простота/

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{pmatrix}}_{\text{въртене около } Ox \text{ на } \sphericalangle \varphi_1} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}}_{\text{въртене около } OY \text{ на } \sphericalangle \varphi_2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{въртене около } Oz \text{ на } \sphericalangle \varphi_3}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\alpha & \mathrm{sh}\,\alpha & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\alpha & \mathrm{ch}\,\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{хиперболично въртене} \\ \text{по } X \text{ на ъгъл } \alpha}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\beta & 0 & \mathrm{ch}\,\beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\beta & 0 & \mathrm{ch}\,\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{хиперболично въртене} \\ \text{по } Y \text{ на ъгъл } \beta}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,\gamma & 0 & 0 & \mathrm{sh}\,\gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \mathrm{sh}\,\gamma & 0 & 0 & \mathrm{ch}\,\gamma \end{pmatrix}}_{\substack{\text{хиперболично въртене} \\ \text{по } Z \text{ на } \sphericalangle \gamma}}$$

В частност, ако $\hat{y} = y$, $\hat{z} = z$ и транслацията $t_0 = x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и втората коорд. система се движи със скорост V спрямо първата, то са в сила следните формули на Лоренц:

$$(*) \qquad \hat{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \hat{t} = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \hat{y} = y, \quad \hat{z} = z$$

Формулите на Лоренц са хиперболично въртене по X на ъгъл

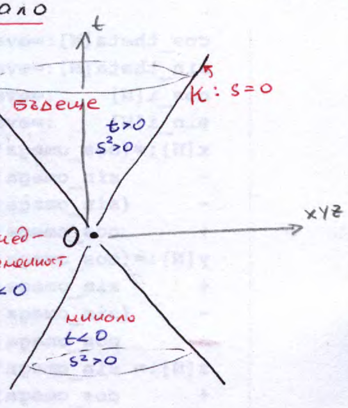
$$\alpha = -\operatorname{arctgh} \frac{v}{c}.$$

Когато скоростта на светлината $c \to \infty$, то преобразованията на Лоренц (*) преминават в преобразованията на Галилей

$$x' = x - vt, \quad t' = t, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Може да се каже, че при $c \to \infty$, СТО преминава в класическата теория на Нютон.

Светлинен конус. Бъдеще и минало



На всяка лоренцова координатна система $Otxyz$ съпоставяме светлинния конус

$$K = \{(t,x,y,z) : c^2t^2 = x^2+y^2+z^2\}$$

$$= \{ s = 0 \},$$

K е с връх $O = (0,0,0,0)$ – началото на координатната система и се състои от ~~точките~~ събитията на „разстояние 0 от началото, т.е. от траекториите на светлината, с начало точката $O_{(0,0,0,0)}$.

Светлинният конус K разделя пространство-времето на 3 части:

бъдеще: $ct > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

минало: $ct < -\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

квазиедновременни събития: $c^2t^2 < x^2+y^2+z^2$

Дали едно събитие (t,x,y,z) е в бъдещето, миналото, квазиедно-временно със $(0,0,0,0)$ или едновременно с него (т.е. върху K), не зависи от избора на лоренцова координатна система.

Наистина, първо ще отбележим, че поради $SO(3)$ (ротационната) - симетрия на метриката на Минковски, можем да считаме, че скоростта на втората лоренцова координатна система $O't'x'y'z'$ е насочена по оста Ox: $v = (v,0,0)$. От формулите на Лоренц

$$\left.\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow ct' \mp x' = \frac{ct \mp x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[1 \mp \frac{v}{c}\right] \Rightarrow \begin{aligned} sgn(ct'-x') &= sgn(ct-x) \\ sgn(ct'+x') &= sgn(ct+x) \end{aligned}$$

т.е. бъдещето си остава бъдеще в $O't'x'y'z'$, миналото си остава минало, ако $|ct| < |x|$, то пак $|ct'| < |x'|$.

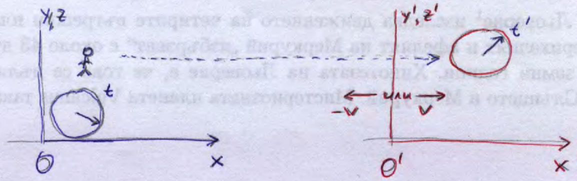
За квазиедновременните събития е възможно $t > 0$, но $t' < 0$, стига $c > v > \frac{c^2|t|}{|x|}$. Това означава, че понятието „едновременност" е относително в СТО.

Ефекти на СТО

Ефектите на СТО са следствие от постулата, че скоростта на светлината C е константна за всяка инерциална система (липсва гравитация), или, еквивалентно, на преобразованията на Лоренц

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(1) Изоставане на движещите се часовници



Нека координатна система $O'x'y'z'$ се движи със скорост $(\pm v, 0, 0)$ относно координатна система $Oxyz$; нека t е времето в $Oxyz$ и t' е времето в $O'x'y'z'$.

От гледна точка на неподвижен в $Oxyz$ наблюдател е в сила обратното преобразование на Лоренц

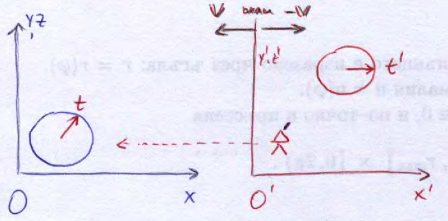
$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'$$

В частност, за часовник в $O'x'y'z'$, примерно в точката O', на наблюдателя ще му се струва, че

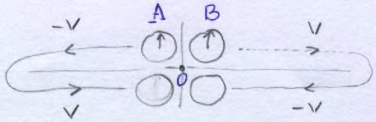
$$t = \frac{t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{т.е.} \quad t' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, t < t;$$

с други думи за собственият часовник (време t) ще върви по-бързо от часовника (t') в $O'x'y'z'$. При това, коефициентът на забавяне в $O'\ldots$ спрямо $O\ldots$ е $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Забележка. Разбира се, за наблюдател $\overset{\prime}{A}$ от $O'x'y'z'$ ще е точно обратното – неговият часовник ще е по-бърз с коефициент $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$



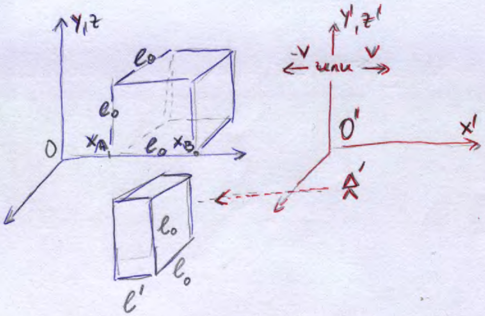
Парадокс на близнаците. Двама близнака A и B тръгват от една точка в противоположни посоки с равни скорости $\pm V$. След време спират и тръгват наобратно със скорости $\mp V$, докато се срещнат отново в точката O.



Съгласно принципа за забавяне на движещите се часовници, за A часовникът на B винаги върви по-бавно от собствения; за B е точно обратното. От съображения за симетрия обаче, в крайна сметка часовниците показват едно и също.

Да се обясни полученото противоречие!

(2) Съкращаване на размерите на движещите се тела

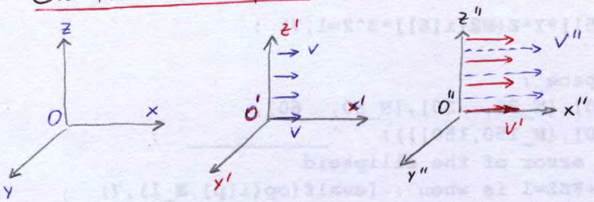


Ако наблюдател $\overset{\prime}{A}$ се отдалечава от куб със страна l_0 със скорост $\pm V$, то от преобразуването на Лоренц за $O'x'y'z'$

$$\left.\begin{aligned} x_B &= \frac{x'_B + Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ x_A &= \frac{x'_A + Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow l' = x'_B - x'_A = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\cdot l_0$$

Това означава, че дължината (l_0) на движещо се тяло изглежда с $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ пъти по-малка. Напречните размери остават същите.

Сумиране на скорости



$O'x'y'z'$ се движи спрямо $Oxyz$ със скорост $(V,0,0)$ – това съответства на хиперболично въртене по X на ъгъл $\alpha = -\operatorname{arcth}\frac{V}{c}$.

$O''x''y''z''$ се движи спрямо $O'x'y'z'$ със скорост $(V',0,0)$ – това съответства на хиперболично въртене по X на ъгъл $\alpha' = -\operatorname{arcth}\frac{V'}{c}$.

Движението на $O''x''y''z''$ спрямо $Oxyz$ съответства на хиперболично въртене по X на ъгъл $\alpha+\alpha'$, защото

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha' & \operatorname{sh}\alpha' & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\alpha' & \operatorname{ch}\alpha' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\alpha+\alpha') & \operatorname{sh}(\alpha+\alpha') & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\alpha+\alpha') & \operatorname{ch}(\alpha+\alpha') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Сега, от формулата

$$\operatorname{th}(\alpha+\alpha') = \frac{\operatorname{th}\alpha + \operatorname{th}\alpha'}{1 + \operatorname{th}\alpha . \operatorname{th}\alpha'}$$

следва формулата за сумиране на успоредни скорости

$$V'' = \frac{V+V'}{1+\frac{VV'}{c^2}} \qquad \Big/ \; \frac{V''}{c} = \frac{\frac{V}{c}+\frac{V'}{c}}{1+\frac{VV'}{cc}} \; \Big/$$

В частност, ако $V'=c$, то $V'' = \frac{V+c}{1+\frac{V}{c}} = c$: скоростта на светлината в $Oxyz$ е $V''=c$, както е на теория.

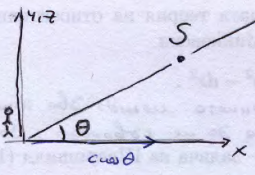
Ако пък $c \to \infty$ $(c=\infty)$, то получаваме Нютоновия закон за сумиране на успоредни скорости

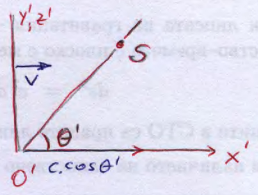
$$V'' = V + V'$$

Общият закон за сумиране на скорости $\vec{V}$ и $\vec{V'}$ има по-сложен вид, но се извежда като умножим съответните матрици от хиперболичната $SO(3)$ подгрупа на $SO(1,3)$

④ Аберация на светлината.

Далечна звезда S се вижда под: $\begin{cases} \sphericalangle\theta \text{ в } Oxyz \\ \sphericalangle\theta' \text{ в } O'x'y'z' \end{cases}$, където инерциалната $O'x'y'z'$ се движи със скорост V спрямо $Oxyz$.





Съгласно закона за сумиране на скорости, приложен за проекцията на светлината върху оста Ox' и Ox,

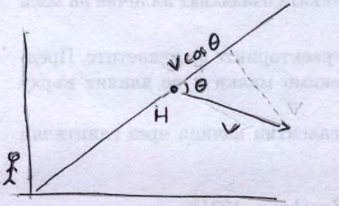
$$c\cos\theta = \frac{c\cos\theta' + V}{1 + \frac{V}{c}\cos\theta'}, \quad \text{т.е.} \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}\cos\theta}.$$

От последната формула изразяваме

$$\theta' = \theta + \frac{V}{c}\sin\theta + \frac{V^2}{4c^2}\sin 2\theta + \dots \approx \theta + \frac{V}{c}\sin\theta.$$

И ъглите в СТО са относителни!

⑤ Ефект на Доплер.



Източник H излъчва светлинни сигнали с период T_h, който е известен – например T_h е периодът на излъчване на атомите на водорода.

Тогава неподвижен наблюдател ще получава сигналите с период

$$T = \frac{T_h}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\left(1 - \frac{V\cos\theta}{c}\right)$$

където V е скоростта на H (и следователно $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ е релативисткият коефициент на забавяне на часовника), а θ е ъгълът, който скоростта V сключва с оста на наблюдение (и значи $1 - \frac{V}{c}\cos\theta$ е коефициент на забавяне на сигнала поради отдалечаване).

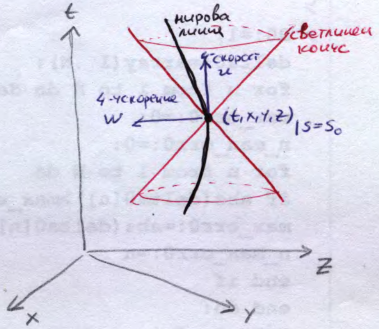
Динамика на точка в СТО

В пространството на Минковски с метрика $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ разглеждаме движение на материална точка (частица). Нейната графика

$$\gamma = (t(s), x(s), y(s), z(s)) \qquad s_1 \le s \le s_2$$

наричаме 4-траектория или мирова линия. Тя се параметризира от дължината си

$$s = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$$



За всяко фиксирано $s = s_0$, 4-траекторията лежи в светлинния конус с връх $(t,x,y,z)_{|s=s_0}$, защото $ds^2 > 0$. Изключение е мировата линия на светлината – тя лежи върху светлинния конус, тъй като $ds^2 = 0$.

Както и в класическия случай, с 4-траекторията свързваме понятията

4 - скорост $\quad u := \dfrac{d\gamma(s)}{ds} = \left(\dfrac{dt}{ds}, \dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right)$ и

4 - ускорение $\quad w = \dfrac{d^2\gamma(s)}{ds^2} = \left(\dfrac{d^2t}{ds^2}, \dfrac{d^2x}{ds^2}, \dfrac{d^2y}{ds^2}, \dfrac{d^2z}{ds^2}\right) = \dfrac{du}{ds}$.

Ако „класическата скорост" означим с 3-вектора

$$v := (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

то предвид равенството $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{c^2 - v^2}$ получаваме, че

$$u = \frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}(1, v_x, v_y, v_z), \text{ откъдето } \langle u, u\rangle = \frac{c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}{c^2 - v^2} = 1.$$

Доказахме, че 4-скоростта u има дължина 1. Оттук за 4-ускорението,

$$0 = \frac{d}{ds}\langle u, u\rangle = 2\langle u, w\rangle \Rightarrow w \perp u.$$

И 4-скоростта u и 4-ускорението W са вектори: при действието

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \qquad M \in SO(1,3)_c$$

на групата на Поанкаре, ds остава инвариантно и значи

$$u' = M \cdot u, \qquad w' = M w.$$

Равноускорително движение.

Да разгледаме движението на фотонна ракета, която има постоянно собствено ускорение $W = (0, \frac{a}{c^2}, 0, 0)$. Ще считаме, че при $t = 0$ ракетата е на Земята и със скорост 0.

W е ускорението спрямо координатната система, неподвижно свързана с ракетата; но понеже W е 4-вектор, то квадратът на ускорението $W^2 = \frac{a^2}{c^4}$ е същият, както и за наблюдател от Земята. Следователно, ако $\gamma = (t(s), x(s), 0, 0)$ е траекторията на ракетата спрямо Земята, $v = (\frac{dx}{dt}, 0, 0)$ е скоростта на ракетата и $u = (\frac{dt}{ds}, \frac{dx}{ds}, 0, 0)$ нейната 4-скорост, то

$$\frac{a^2}{c^4} = W^2 = \left[c \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\right]^2 - \left[\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}\right]^2.$$

След преобразуване получаваме

$$\frac{\frac{d}{dt} v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3} = a \Rightarrow v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}} \Rightarrow x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}} - 1\right)$$

Собственото време на ракетата.

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int_0^t \sqrt{1-\frac{a^2t^2}{c^2+a^2t^2}}\, dt = \frac{c}{a} \ln\left(\frac{at}{c} + \sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\right)$$

За големи t, собственото време на ракетата $\tau \approx \frac{c}{a} \ln \frac{2at}{c}$ тече по логаритмичен закон, т.е. много по-бавно, отколкото на Земята.

Принцип на най-малкото действие за свободна частица.

Обикновено във физическата литература се приема, че функционалът действие за свободна частица (материална точка, върху която не действат сили) е равен на

$$S = -m_0 c \int_\gamma ds = -m_0 c^2 \int_{t(s_1)}^{t(s_2)} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt .$$

* ЛЛ, с.34 : Разсъждения защо S е точно такъв

С други думи, функцията на Лагранж за свободна частица е

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} .$$

Величината $m_0 = const$ характеризира частицата и се нарича маса на покой. За материалните точки $m_0 > 0$, а за светлинните частици $m_0 = 0$.

Във вариационното смятане, с лагранжиана L са асоциирани физическите понятия:

$$\begin{pmatrix}\text{импулс на}\\ \text{частицата}\end{pmatrix} = p := \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(v_x, v_y, v_z) = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{енергия на}\\ \text{частицата}\end{pmatrix} = E := p\cdot v - L = \cdots = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

От уравненията на Ойлер-Лагранж $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right) = (0,0,0)$ следва законът за запазване на импулса

$$p = (p_x, p_y, p_z) = \overrightarrow{const} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Следователно, $p\cdot p = const$ и значи $v^2 = const$. Доказахме, че в СТО свободните частици се движат с постоянни скорости v.

Освен това доказахме и закона за запазване на енергията

$$E = mc^2 = const, \quad \text{където} \quad m := \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} := \begin{pmatrix}\text{маса на}\\ \text{движещата}\\ \text{се частица}\end{pmatrix}.$$

Ще отбележим, че масата на частицата е най-малка в инерциалната координатна система, свързана неподвижно с частицата и

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m_0 + \frac{m_0 v^2}{2c^2} + \cdots$$

а енергията на частицата

$$E = mc^2 = m_0c^2 + \frac{m_0V^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{m_0V^4}{c^2} + \dots$$

$$= \begin{pmatrix}\text{енергия}\\ \text{на покой}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{кинетична}\\ \text{енергия в}\\ \text{класическата}\\ \text{механика}\end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$\geqslant m_0c^2 .$$

Когато скоростта $V \to C$ (но $V < C$), импулсът P и енергията и масата на частицата клонят към ∞.

Получените З ЗЗИ и ЗЗЕ можем да обединим в следното твърдение:

4-импулсът $\left(\frac{E}{c}, P_x, P_y, P_z\right)$ е константен за свободна частица вектор с дължина

$$\sqrt{\frac{E^2}{c^4}\cdot c^2 - P^2} = \dots = m_0 .$$

В частност, преобразованията на Лоренц имат вида

$$E' = \frac{E - V\cdot P_x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad P_x' = \frac{P_x - \frac{VE}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad P_y' = P_y, \quad P_z' = P_z$$

В сила е следното съотношение между енергията, импулса и скоростта на свободна частица:

$$P = \frac{EV}{c^2}$$

Разпадане на частица. Нека частица с маса M се разпада на 2 частици с маси на покой съответно m_{01} и m_{02}.

От ЗЗЕ $\Rightarrow$ $Mc^2 = E_1 + E_2$, където E_1 и E_2 са енергиите на разпадналите се частици.

(От друга страна, от ЗЗИ $\Rightarrow$ $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = 0 \Rightarrow P_1^2 = P_2^2$ ($P_{1,2}$ са 3-импулсите)

Но $P^2 = E^2 - m_0^2c^4$, значи $E_1^2 - m_{01}^2c^4 = E_2^2 - m_{02}^2c^4$. Комбинирано с $Mc^2 = E_1 + E_2$, това ни дава

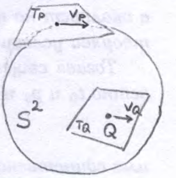
$$E_1 = c^2\frac{M^2 + m_{01}^2 - m_{02}^2}{2M}$$

$$E_2 = c^2\frac{M^2 - m_{01}^2 + m_{02}^2}{2M}$$

Следователно $M > m_{10} + m_{20}$

Свързаност и ковариантно диференциране

Бихме желали да можем да сравняваме стойностите на даден тензор в различни точки от пространството. Примерно, ако V_P е вектор в точката P, то кой е векторът V_Q в точка Q, успореден на V_P? В евклидовия случай отговорът е лесен, но ако примерно $P, Q \in S^2$ = двумерната сфера?



Като за начало, необходимо е да сравняваме стойностите на тензорите за „безкрайно близки" точки. За целта въвеждаме понятието ковариантно диференциране или, както често се нарича, диференциално-геометрична свързаност.

__Дефиниция__. Казваме, че е зададена свързаност Γ, ако за всеки набор от координати $(x^1, \dots, x^n)$ е зададен набор от функции $\Gamma^i_{jk}(x)$ (символи на Кристофел) и такива, че при други координати $y = y(x)$, новите символи на Кристофел $\tilde{\Gamma}^a_{bc}$ се изразяват чрез старите по формулата

$$(*) \qquad \tilde{\Gamma}^a_{bc} = \underbrace{\Gamma^i_{jk} \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \frac{\partial x^k}{\partial y^c}}_{\text{тензорна част на свързаността}} + \underbrace{\frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^b \partial y^c}}_{\text{нетензорна част}}$$

Свързаността $\Gamma = \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} dx^j dx^k$ НЕ е тензор, но се преобразува като (1,2)-тензор при линейните и афинни преобразования.

Изобщо казано, свързаността Γ и метриката $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ са независими. Но:

$$(**) \qquad \text{В ОТО, свързаността е: } \Gamma^i_{pq} = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} \right]$$

(формули на Кристофел). Казваме, че това е симетрична* свързаност, съгласувана с метриката.

$*\ \Gamma^i_{pq}(x) = \Gamma^i_{qp}(x) \quad \forall i, p, q, x$

За симетрична свързаност, съгласувана с метриката, формулите (*) се проверяват непосредствено. Обратно, от (**) следва (*) и обяснението, как сме се сетили за самата дефиниция.

Казваме, че свързаността Γ е евклидова, ако съществуват координати $(x^1, \dots, x^n)$, за които $\Gamma^i_{jk}(x) = 0 \quad \forall i,j,k$. Тогава координатите $(x^1, \dots, x^n)$ наричаме евклидови.

Еквивалентни условия за евклидовост са: $\exists$ координати x, за които

$$\Gamma^i_{jk} = 0 \quad \forall i,j,k \iff \Gamma_{mjk} = g_{im}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left[g_{mj,k} + g_{mk,j} - g_{jk,m}\right] = 0 \quad \forall m,j,k$$

$$\iff g_{ab,c} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = 0 \quad \forall a,b,c$$

$$\iff g_{ab} = const \quad \forall a,b,c$$

т.е. компонентите на метриката (g_{ab}) са константи.

Стандартната евклидова метрика $ds^2 = \sum (dx^i)^2$, както и метриката на Минковски $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ са евклидови.

Да припомним, че в една точка винаги можем да постигнем $\Gamma^i_{jk}(x(P)) = 0 \quad \forall i,j,k$, но, изобщо казано, в съседните точки това условие ще е нарушено. С други думи,

свързаността Γ отчита отклонението на геометрията на пространството от евклидовата.

Ковариантно диференциране.

Ако просто диференцираме компонентите на даден тензор, то няма да получим тензор. Затова въвеждаме понятието ковариантна производна ∇_k, заменяща обикновената частна производна $\frac{\partial}{\partial x^k}$.

Ако T е тензор от тип (p,q), то неговите ковариантни производни $\nabla_k T$ са тензори от тип $(p, q+1)$. Те се пресметат при зададена свързаност Γ (съгласно дефиниция (*)).

По изключение, ковариантната производна на функция $f = f(x)$ не зависи от свързаността Γ:

$$\nabla f := (\nabla_1 f, \dots, \nabla_n f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right) = \{\text{градиент на } f\}$$

Без да изписваме общото правило за ковариантно диференциране на тензори от тип (p,q), ще посочим формулите за най-важните за нас случаи:

$\nabla_k f = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ — за функции f

$\nabla_k V^i = \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j$ — за вектори $V = V^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$\nabla_k \omega_s = \dfrac{\partial \omega_s}{\partial x^k} - \Gamma^i_{ks}\omega_i$ — за диференциални форми $\omega = \omega_s dx^s$

$\nabla_k g_{ab} = \dfrac{\partial g_{ab}}{\partial x^k} - \Gamma^m_{ak} g_{mb} - \Gamma^m_{kb} g_{ma}$ — за метрика $ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$

Задача. Проверете, че в резултат на ковариантното диференциране получаваме тензор от тип $(p, q+1)$:

$\nabla f := \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$ = тензор от тип $(0,1)$

$\nabla V := \nabla_k V^i \cdot \dfrac{\partial}{\partial x^i} dx^k$ = тензор от тип $(1,1)$

$\nabla \omega := \nabla_k \omega_s \cdot dx^s dx^k$ = тензор от тип $(0,2)$

$\nabla g := \nabla_k g_{ab} \cdot dx^a dx^b dx^k$ = тензор от тип $(0,3)$

Ако свързаността Γ е евклидова, а координатите $(x^1, \dots, x^n)$ са евклидови, то

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x^k} = \text{(обичайната частна производна)}.$$

Теорема. Следните две твърдения са еквивалентни

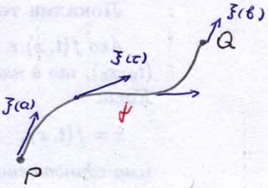
$(**)$ $\quad \Gamma^i_{pq} = \frac{1}{2} g^{im}\left[g_{pm,q} + g_{qm,p} - g_{pq,m}\right]$ (формули на Кристофел)

$(***)$ $\quad \nabla_k g_{ab} = g_{ab,k} - \Gamma^m_{ak} g_{mb} - \Gamma^m_{bk} g_{ma} = 0 \quad \forall k,a,b$ (ковариантната производна на метричния тензор е тъждествено 0)

и следователно могат да бъдат приети за дефиниция на понятието свързаност, съгласувана с метриката.

Паралелен пренос на тензори. Геодезични

Пренасянето на тензор T от точка P до точка Q от пространството става по (произволно) избран път от P до Q, т.е. по крива



$$\gamma = \{ (x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)),\ a \le \tau \le b \},$$

τ е параметър, $P = x(a)$ - начало, $Q = x(b)$ - край.

Във всяка точка от γ, т.е. за всяко $\tau \in [a,b]$ е определен вектор на скоростта на γ

$$\xi(\tau) = \frac{dx^k(\tau)}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^k} := \xi^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Производна по направление. Ако $\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ е векторно поле, а T е тензор от тип (p,q), то производната на T по направление ξ

$$\nabla_\xi T := \xi^k \nabla_k T$$

също е тензор от тип (p,q).

Производната по направление показва скоростта на изменение на тензора T по направлението ξ

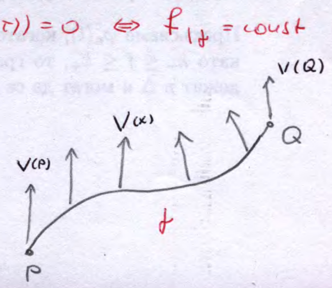
Дефиниция. Казваме, че е зададен паралелен пренос на тензора T по продължение на кривата γ, ако

$$\nabla_\xi T \big|_\gamma \equiv 0$$

За скаларните функции f :

$$\nabla_\xi f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = \frac{d}{d\tau} f(x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)) = 0 \Leftrightarrow f\big|_\gamma = const$$

Паралелен пренос на вектори.



Пренасянето на вектор $V(P)$ в т. P по кривата γ (от P до Q), „успоредно на себе си" става, като решим линейната хомогенна система от диференциални уравнения

$$0 = \frac{dx^k}{d\tau}\nabla_k V^i = \frac{dx^k}{d\tau}\left(\frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} V^j\right) = \frac{dV^i}{d\tau} + \left(\Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{d\tau}\right)V^j, \quad i = 1 \div n$$

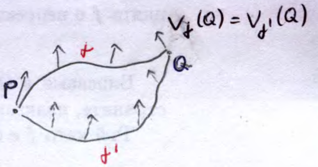
с неизвестни функции $V^i = V^i(\tau)$. И така,

$$(\Pi) \quad \left.\begin{array}{ll} \dfrac{dV^i}{d\tau} = -\Gamma^i_{jk}\dfrac{dx^k}{d\tau}\cdot V^j & \left(\begin{array}{c}\text{уравнения}\\ \text{на паралел-}\\ \text{ния пренос}\end{array}\right) \\ V^i(a) = V^i(P) & \left(\begin{array}{c}\text{начални стойности}\\ \text{на } V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i}(P)\end{array}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} V(\tau) = V^i(\tau)\dfrac{\partial}{\partial x^i(\tau)} \\ (V(\tau) \parallel V(P)) \end{array} ;$$

решението съществува и е единствено съгласно съответната теорема от теорията на обикновените диференциални уравнения.

Уравненията (П) са линейни, следователно $V(Q)$ зависи линейно от $V(P)$. Уравненията на паралелен пренос задават изоморфизъм $T_P \to T_Q$ на тангенциалните пространства.

Ако координатите са евклидови,



то $\Gamma^i_{jk} = 0$ и уравненията на преноса са

$$\frac{dV^i}{d\tau} = 0 \Rightarrow V^i = const^i$$

и имаме успоредност в познатия смисъл. Преносът по друг път γ' от P до Q дава същия резултат. Казваме, че

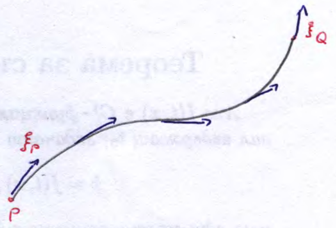
Ако геометрията е евклидова, то паралелният пренос не зависи от пътя γ

Ако обаче геометрията не е евклидова, то различните пътища от P до Q дават различни преноси на един и същи вектор $V_P \in T_P$

Геодезични.

Кривата

$$\gamma = \{ (x^1(\tau), \dots, x^n(\tau)),\ a \le \tau \le b \}$$



наричаме геодезична, ако нейният вектор на скоростта $\xi = \frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^i}$ е успореден на себе си:

$$\nabla_\xi \xi \equiv 0 \quad , \quad a \le \tau \le b$$

Разписано покоординатно, за всяко $i = 1 \div n$ се иска

$$0 = (\nabla_\xi \xi)^i = \frac{dx^k}{d\tau} \nabla_k \xi^i = \frac{dx^k}{d\tau} \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \tau} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau} \right].$$

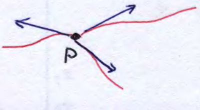
Като използваме, че $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^k}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{dx^i}{d\tau}$, получаваме уравнението на геодезичните

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0 \qquad i = 1 \div n$$

При зададени начални условия в точката P:

$$x^i(P)\ ,\ \frac{dx^i}{d\tau}(P)$$

уравнението на геодезичните има единствено решение в околност на P.



Ако свързаността е евклидова, то геодезичните са прави линии:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^i = a^i\tau + b^i$$

$$a^i, b^i = const$$

Геометрия: координати, метрика

Съгласно Хилберт, „геометрията е част от физиката".

В контекста на ОТО, физичното понятие гравитация съответства на математичното понятие кривина на пространство-времето. В СТО гравитацията липсва и пространство-времето е плоско, т.е. без кривина. Обратно, колкото по-силно е гравитационното поле, толкова повече пространството и времето са „изкривени".

Нашата цел е да изложим във възможно най-конспективен вид необходимите за ОТО геометрични понятия. Интересно е, че съответната математическа теория е развита в трудовете на Риман, Кристофел, Ричи и Леви-Чивита преди възникването на ОТО, но все пак във връзка със структурата на пространството.

1. Пространство-време, координати, събития

Съгласно ОТО, светът в който живеем е **4-мерен** и се състои от събития. Към обичайните 3 пространствени координати (x, y, z) прибавяме и времето t; получаваме 4-мерния пространствено-времеви континуум.

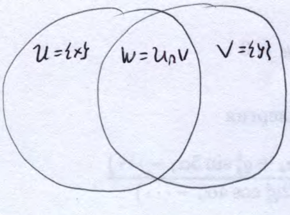
В класическата теория на Нютон, времето t е абсолютно, т.е. не зависи от (x, y, z). В ОТО, времето тече с различна скорост в различни точки от пространството и следователно е относително.

Координатният запис (t, x, y, z) на събитие P подчертава връзката с обичайните координати. При пресмятанията в ОТО по-удобен се оказва записът

$$(x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$$

2. Смяна на координатите (променливите)

Координатите са локални - важат в парче от пространството.



Нека, например, $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ са координати върху W.

Казваме, че функциите

$$y^i = y^i(x^0,x^1,x^2,x^3)\,, \qquad i=0,1,2,3$$

задават смяна на променливите, ако

(i) функциите y^i са диференцируеми по всяка от променливите x^j

(ii) За всяко $P\in W$ матрицата на Якоби (Якобиан)

$$\frac{\partial y}{\partial x} := \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial y^0}{\partial x^0} & \frac{\partial y^0}{\partial x^1} & \frac{\partial y^0}{\partial x^2} & \frac{\partial y^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^0} & \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^0} & \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^0} & \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}\right|_{x=x(P)}$$

има детерминанта $\det\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{(P)} \neq 0$.

Тогава и $y=(y^0,y^1,y^2,y^3)$ са координати върху W.

Ако $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ са координати върху U, а $y=(y^0,y^1,y^2,y^3)$ са координати върху V, то върху сечението $W=U\cap V$ както $y=y(x)$, така и $x=x(y)$ са смени на променливите.

Особено важни са формулите за смяна на координатите

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{(за вектори)}$$

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}\,dx^k \qquad \text{(за диференциали, т.е. ковектори)}$$

3. Космологични модели.

Глобалното устройство на пространство-времето е неясно. Съгласно модела на de Sitter (1917), пространство-времето е 4-мерния хиперболоид $x^2+y^2+z^2+u^2-t^2=R^2$, $R=\text{const}$.

4. Тензори от тип (p,q)

Тензорите са физични величини, т.е. не зависят от координатите.

Тензорът T е от тип (p,q), ако е p-пъти вектор и q пъти ковектор.

Ако $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ са локални координати, то T се записва във вида

$$T = \underbrace{T^{n_1 \dots n_p}_{k_1 \dots k_q}(x)}_{\text{функция}} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{n_1}}}_{\text{вектор}} \dots \underbrace{\frac{\partial}{\partial x^{n_p}}}_{\text{вектор}} \underbrace{dx^{k_1}}_{\text{ковек-тор}} \dots \underbrace{dx^{k_q}}_{\text{ковек-тор}} = T^n_k(x) \frac{\partial}{\partial x^n} dx^k$$

Изпускането на сумите $\sum_{n_i=0}^{3}, \sum_{k_j=0}^{3}$ наричаме сумиране по Айнщайн.

Тензорът T има 4^{p+q} компонента $T^n_k(x) = T^{n_1 \dots n_p}_{k_1 \dots k_q}(x)$. При смяна на координатите $y = y(x)$ или $x = x(y)$, T не се мени, т.е.

$$T = \underbrace{T^n_k(x(y)) \frac{\partial y^i}{\partial x^n} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}}_{T^i_j(y)} \frac{\partial}{\partial y^i} dy^j$$

Разбира се, това става след „правилната смяна" на компонентите $T^n_k(x) \mapsto T^i_j(y)$.

Най-важните за нас тензори са от тип $(0,0)$ - скалари, тип $(1,0)$ - вектори, тип $(0,1)$ - диференциали, тип $(0,2)$ - метрика и тип $(1,3)$ или $(0,4)$ - тензор на кривината (на Риман).

5. Диференциали

Диференциал df на функция f наричаме нарастването на f и

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=0}^{3} \left(\text{частната производна } \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \cdot \left(\text{нарастването на координатата } x^i\right)$$

В общия случай, диференциал или 1-форма наричаме

$$\omega = \underbrace{\omega_i(x)}_{\text{функция}} dx^i .$$

Да припомним, че при смяна на координатите $x \to y$,

$$\omega = \omega_i(x(y)) \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k = \tilde{\omega}_k(y)\, dy^k$$

6. Метрика

Измерванията на геометрични обекти като дължина, площ, обем, ъгли и т.н. стават с помощта на симетричен тензор от тип $(0,2)$

$$g_{ik}(x)\, dx^i dx^k = (\text{метрика или метричен тензор})$$

$g_{ik}(x) = g_{ki}(x) \quad \forall i,k,x.$

Метриката определя

$$ds = \begin{pmatrix}\text{елемент на}\\ \text{дължината}\end{pmatrix} = \sqrt{g_{ik}(x)\, dx^i dx^k}\ ,$$

а оттук и понятието дължина на кривата

$$\gamma = \{ (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau)),\ a \le \tau \le b \},$$

(зададена параметрично), а именно

$$\begin{pmatrix}\text{дължината}\\ \text{на } \gamma\end{pmatrix} = \int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x(\tau))\, \frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}}\ d\tau$$

Лесно се проверява, че дължината на γ не зависи нито от избора на координати $x = (x^0, \dots, x^3)$, нито от параметризацията.

Основен въпрос във физиката, с който са се занимавали Гаус, Риман, Лоренц, Поанкаре́, Айнщайн, Х. Вайл и т.н. е:

Коя е метриката в света, в който живеем ?

(i) Теорията на Нютон съответства на Евклидовата метрика

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \begin{pmatrix}\text{3-мерна формула на}\\ \text{Питагор}\end{pmatrix};$$

там дължината

$$\int_\gamma ds = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2}\ d\tau = \int_P^Q \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

(ii) Пространство-времето без гравитация, т.е. СТО, съответства на метриката на Минковски

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Разстоянието от $(0,0,0,0)$ до събитие (t,x,y,z), лежащо в светлинния конус, е положително ($\int ds > 0$); разстоянието до точки извън светлинния конус е чисто имагинерно ($\int ds \in i\mathbb{R}$).

(iii) Метриката на Шварцшилд (1916 г.)

$$ds^2 = \left(1-\frac{\alpha}{R}\right)dt^2 - \frac{dR^2}{1-\frac{\alpha}{R}} - R^2\,d\theta^2 - R^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

съответства на гравитационното поле, породено от една-единствена точка с маса $m_0>0$ и намираща се в началото $(t, x=0, y=0, z=0)$ на координатната система. (R,θ,φ) са аналог на пространствените сферични координати, само че $R^3 = \alpha^3 + (x^2+y^2+z^2)^{3/2}$. Константата α е пропорционална на масата m и се нарича гравитационен радиус на масовата точка.

Известна е само още една метрика – на гравитационното поле, създадено от въртяща се хомогенна сфера (Kerr, 1953).

Удобно е да използваме следните матрични или векторни записи съответно за метриката и координатите:

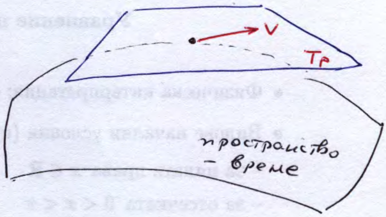
$$g := \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \qquad dx = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}.$$

Тогава, при смяна на координатите $x \to y$,

$$\begin{aligned} ds^2 &= {}^{T}dx \cdot g \cdot dx \\ &= {}^{T}dy \cdot \underbrace{{}^{T}\frac{\partial x}{\partial y} \cdot g(x(y)) \cdot \frac{\partial x}{\partial y}}_{\tilde{g}(y)} \cdot dy \end{aligned}$$

7. Вектори

Нека P е точка от пространство-времето, т.е. събитие, а T_P е тангенциалното пространство (към пространство-времето) в точката P.



Елементите на T_P наричаме вектори. Всеки вектор $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ е тензор от тип $(1,0)$.

Базис на T_P са векторите $\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}$, за $x = x(P)$.

Начинът на смяна на координатите

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

ни позволява да отъждествяваме векторите с линейни диференциални оператори, които са хомогенни и от ред 1.

Ако е зададена метрика $g_{ik} dx^i dx^k$, то можем да дефинираме следните понятия:

- скаларно произведение на вектори V, W от T_P:

$$\langle V, W \rangle_g = \left\langle V^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle = V^i W^k \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle_g}_{g_{ik}(x)}$$

$$= V^i W^k g_{ik}(x)$$

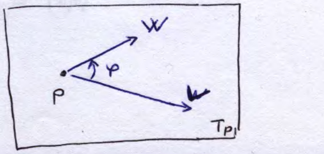
- дължина на вектор $V \in T_P$:

$$\| V \| = \sqrt{\langle V, V \rangle_g} = \sqrt{g_{ik}(x) V^i V^k} \qquad \left(V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

- ъгъл φ между векторите $V, W \in T_P$:

$$\cos \varphi = \frac{\langle V, W \rangle_g}{\|V\| \|W\|}, \qquad \sin \varphi = \pm \frac{\sqrt{\|V\|^2 \|W\|^2 - \langle V, W \rangle_g^2}}{\|V\| \|W\|}$$

Във формулата за $\sin \varphi$, знакът $(\pm)$ се избира в зависимост от това, дали $\varphi \in (0, \pi)$ или не.

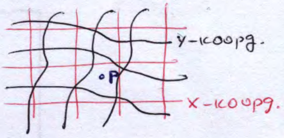


Ковариантност. Инварианти на метриката

В СТО, всички инерциални системи са равноправни. Що се касае до ОТО, то Айнщайн изказва следната хипотеза:

Принцип на ковариантност. Всички координатни системи са равноправни.

Ако P е събитие в пространство-времето, то множеството от смени на променливите в околност на т. P наричаме (локална) група на Айнщайн.



Групата на Айнщайн е безкрайномерна; освен линейните смени тя включва и огромно количество нелинейни смени $y=y(x)$, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \neq const$. На фона на „праволинейните координати" x, координатите y изглеждат „изкривени". И обратно.

Индекс (1,3) на метриката.

Естествено е, в околност на P да подложим метриката

$$ds^2 = g_{ik}(x)\,dx^i\,dx^k$$

на действието на групата на Айнщайн, с цел да приведем ds^2 във възможно най-стандартен вид.

Отначало, с помощта на 4-мерната подгрупа от транслации $x \mapsto x + \overrightarrow{const}$ центрираме P, т.е. ще считаме, че $x(P)=(0,0,0,0)$. Това води до опростяване на записа на $10^{\text{те}}$ гравитационни потенциала: за всяко $0 \le i \le k \le 3$, редът на Тейлър е

$$g_{ik}(x) = g_{ik}(0) + x^s g_{ik,s}(0) + x^k x^e \frac{g_{ik,se}(0)}{2!} + O(x^3);$$

със $_{,s} = \frac{\partial}{\partial s}$; $_{,se} = \frac{\partial^2}{\partial s \partial e}$ бележим частните производни.

Второ, подлагаме координатите x на линейна смяна

$$x = Ay, \quad A = (4\times 4 - \text{константна матрица}), \ \det A \neq 0.$$

Тогава, записано във векторен и матричен вид, метриката

$$ds^2 = {}^T dx \cdot g \cdot dx = {}^T dy \cdot \underbrace{{}^T A\, g(x(y))\, A}_{\tilde{g}(y)} \cdot dy = {}^T dy \cdot \tilde{g}(y) \cdot dy.$$

В частност, $\tilde{g}(0) = {}^{T}\!A\, g(0)\, A$. Съгласно теоремата за индекса, $\exists$ матрица A привеждаща симетричната матрица $g(0)$ в диагонален вид $\tilde{g}(0)$, като по диагонала стоят $-1, 0, 1$.

Айнщайн изказва и хипотезата, че индексът е $(1,3)$, т.е. по диагонала на $\tilde{g}(0)$ имаме $(+1, -1, -1, -1)$.

И така, след линейно преобразование, метриката става

$$ds^2 = (dy^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (dy^i)^2 + g_{ik,s}(0)\, y^s dy^i dy^k + O(y^2)$$

Символи на Кристофел.

Следващата ни стъпка е да унищожим линейните членове, т.е. коефициентите $g_{ik,s}(0)$. Това става чрез квадратична смяна

$$y^0 = z^0 - \tfrac{1}{2} a^0_{pq} z^p z^q$$
$$y^\ell = z^\ell + \tfrac{1}{2} a^\ell_{pq} z^p z^q, \quad \ell = 1,2,3, \qquad a^i_{pq} = a^i_{qp} = const$$

За метриката получаваме

$$ds^2 = \left[dz^0 - \frac{a^0_{pq}}{2}(z^p dz^q + z^q dz^p)\right]^2 - \sum_{\ell=1}^{3}\left[dz^\ell + \frac{a^\ell_{pq}}{2}(z^p dz^q + z^q dz^p)\right]^2$$
$$+ g_{ik,s}(0)\, z^s dz^i dz^k + O(z^2)$$
$$= (dz^0)^2 - \sum_{\ell=1}^{3}(dz^\ell)^2 + \underbrace{[g_{ik,s}(0) - a^i_{ks} - a^k_{is}]}_{\text{трябва да е } 0} z^s dz^i dz^k + O(z^2).$$

Унищожаването на $O(z)$-членовете е равносилно на избора $g_{ik,s}(0) = a^i_{ks} + a^k_{is}$, $\forall i,k,s$. След циклична ротация на i,j,k и елементарни преобразования, достигаме до еквивалентното изискване

$$\Gamma_{\ell ij} := \frac{1}{2}\left[g_{\ell i,j} + g_{\ell j,i} - g_{ij,\ell}\right] = a^\ell_{ij}$$
$$= (\text{символи на Кристофел от II вид})$$

Доказахме, че в дадена точка P винаги можем да сведем метриката до $ds^2 = (dz^0)^2 - \sum_{\ell=1}^{3}(dz^\ell)^2 + O(z^2)$, т.е. да унищожим символите на Кристофел.

Равносилно твърдение е, че в точка винаги можем да анулираме символите на Кристофел от първи вид

$$\Gamma^{s}_{ij} = g^{sm}\Gamma_{mij} = \frac{1}{2}g^{sm}\left[g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right]$$

Наистина, ако $\Gamma_{mij} = 0$, то $\Gamma^{s}_{ij} = 0$. Обратното следва от формулата

$$\Gamma_{mij} = g_{ms}\Gamma^{s}_{ij}$$

(съгласно правилата за повдигане и сваляне на индекси чрез метриката).

Тъй като физически символите на Кристофел съответстват на гравитацията, то горните твърдения можем да формулираме и така:

Принцип за еквивалентност. Във фиксирана точка P от пространство-времето, винаги можем да изключим гравитацията, т.е. да постигнем $\Gamma^{s}_{ij}(P) = 0 \;\forall s, i, j$.

Разбира се, при наличието на гравитация е невъзможно да я игнорираме в околност на точката P.

Кубични смени на променливите.

След като сведохме метриката до

$$ds^2 = (dz^0)^2 - \sum_{l=1}^{3}(dz^l)^2 + \frac{g_{ij,kl}(0)}{2}z^k z^l dz^i dz^j + O(z^3),$$

можем да унищожим 80 от $100^{те}$ коефициента $g_{ij,kl}(0)$ чрез кубична смяна

$$z^0 = w^0 - \frac{1}{6}b_{ijk}w^i w^j w^k$$

$$z^l = w^l + \frac{1}{6}b^{l}_{ijk}w^i w^j w^k \qquad l = 1,2,3$$

където считаме, че b^{*}_{ijk} са симетрични по долните си индекси i, j, k; $80^{те}$ коефициента b^{a}_{ijk} са неопределени.

Получаваме метрика

$$ds^2 = (dw^0)^2 - \sum_{l=1}^{3} (dw^l)^2 - \frac{1}{3} b^s{}_{pqr}\, dw^s\, d(w^p w^q w^r)$$

$$+ \frac{1}{2} g_{ij,kl}(0)\, w^k w^l dw^i dw^j + O(w^3)$$

$$= (dw^0)^2 - \sum_{l=1}^{3} (dw^l)^2 + \frac{1}{2} \underbrace{\left[g_{ij,kl}(0) - b^i{}_{jkl} - b^j{}_{ikl} \right]}_{\tilde{g}_{ij,kl}} w^k w^l dw^i dw^j + O(w^3)$$

Избирайки $b^i{}_{ikl} = \frac{1}{2} g_{ii,kl}(0)$, унищожаваме $40^{\text{те}}$ $\tilde{g}_{ii,kl} (= 0)$.

Избирайки $b^i{}_{jkk} = g_{ij,kk}(0) - b^j{}_{ikk}$, унищожаваме още 24 $\tilde{g}_{ij,kk}$, а именно при i, j, k – различни.

Тъй като

$$\tilde{g}_{ij,kl} - \tilde{g}_{kl,ij} = g_{ij,kl}(0) - g_{kl,ij}(0) - b^i{}_{jkl} - b^j{}_{ikl} + b^k{}_{ijl} + b^l{}_{ijk}$$

то можем да постигнем $\tilde{g}_{ij,kl} = \tilde{g}_{kl,ij}$ при $i<j,\ k<l,\ (i,j) \neq (k,l)$ с цената на точен избор на някое $b^s{}_{pqr}$, $s \neq p,q,r$.

Остават 21 независими $\tilde{g}_{ij,kl}$, а именно при $i<j,\ k<l$ и $\{ i=k,\ j \leq l$ или $i<k \}$. Остава и един свободен избор на b, примерно $b^0{}_{123}$. Фиксирайки и $b^0{}_{123}$, получаваме точно 20 свободни $\tilde{g}_{ij,kl}$.

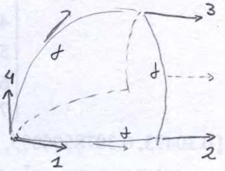
Окончателно, фиксирайки по подходящ начин $80^{\text{те}}$ $b^s{}_{pqr}$, унищожаваме 80 от $100^{\text{те}}$ $g_{ij,kl}(0)$. Останалите 20 коефициента $\tilde{g}_{ij,kl}$ не могат да бъдат променени при смени на променливите, запазващи вече постигнатите нули измежду $\tilde{g}_{ij,kl}$.

Тези 20 $\tilde{g}_{ij,kl}$ са инвариантите на метриката.

1

Тензор на кривината (Тензор на Риман): $R^i{}_{jkl}$, R_{ajkl}

При паралелен пренос на два вектора, ъгълът между тях е константен. В частност, при пренос по геодезични, всеки вектор $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ сключва константен ъгъл с тангентата към геодезичната.



В неевклидовата геометрия, при преноса на V по затворен контур γ, резултатът е вектор $V + \delta V$, различен от V. На рисунката, при преноса по „осминка" от сфера, векторът $1 \to 2 \to 3 \to 4$, като $\measuredangle(4,1) = \frac{\pi}{2}$. Може да се докаже, че $\delta V =$ (площта, заградена от γ)/(радиусът на сферата)^2.

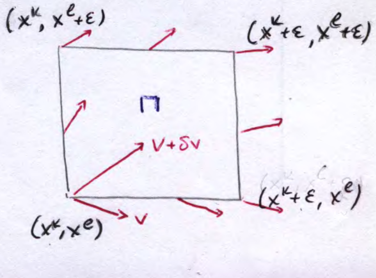
Причината за отклонението $\delta V \neq 0$ е в изкривяването на пространството. То се измерва чрез тензора на кривината $R^i{}_{jkl}$ или, както също се нарича тензор на Риман.

Ще дадем следните три еквивалентни дефиниции за тензор на Риман:

(1) $$R^i{}_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{al}\Gamma^a_{jk} - \Gamma^i_{ak}\Gamma^a_{jl}$$

(2) $$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) v^i = -R^i{}_{jkl} v^j \quad \forall i, k, l$$

(3) При паралелния пренос на вектора $V = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ по контурите на квадратче със страна ε в двумерната равнина $Ox^k x^l$, отклонението δv^i е такова, че



$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta v^i}{\varepsilon^2} = -R^i{}_{jkl} \cdot v^j$$

② Формулата (1) е еквивалент на (2), имайки впредвид дефиницията за ковариантна производна $\nabla_s v^i = \frac{\partial v^i}{\partial x^s} + \Gamma^i_{js} \cdot v^j$ и уравненията на преноса $\nabla_m V^i \big|_\gamma = 0$.

Както се вижда от (2), тензорът на Риман отразява некомутативността $[\nabla_k, \nabla_\ell] = \nabla_k \nabla_\ell - \nabla_\ell \nabla_k$ на ковариантните производни. В евклидовата геометрия, смесените производни са равни: $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^\ell} = \frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial x^k}$.

(3) е еквивалентно на (1,2) съгласно формулата на Стокс:

$$\begin{aligned}
\delta v^i &= \oint_\gamma \nabla v^i \\
&= \iint_\Pi [\nabla_k, \nabla_\ell] V^i \\
&= -\iint_\Pi \left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^i_{j\ell} v^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^\ell}\left(\Gamma^i_{jk} v^j\right) \right] dx^k dx^\ell \\
&= -\varepsilon^2 R^i_{\ jk\ell} v^j + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

– изменението на Γ^i_{jk} и v^j в квадратчето Π е от порядък $O(\varepsilon)$.

Задача. Докажете, че $R^i_{\ jk\ell} \frac{\partial}{\partial x^i} dx^j dx^k dx^\ell$ е тензор от тип (1,3).

Макар и следващите свойства на тензора на Риман да са изпълнени и при по-общи свързаности Γ, ние ще предполагаме, че

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(g_{mj,k} + g_{mk,j} - g_{jk,m} \right) \qquad \left(\text{формули на Кристофел}\right)$$

е симетрична свързаност, съгласувана с метриката.

В сила са симетриите

$$R^i_{\ jk\ell} = -R^i_{\ j\ell k} \qquad \forall i,j,k,\ell$$

$$R^i_{\ abc} + R^i_{\ bca} + R^i_{\ cab} = 0 \qquad \forall i,a,b,c \quad \text{– тъждество на Бианки}$$

Може да се докаже следната

Теорема. Свързаността Γ е евклидова $\Leftrightarrow$ $R^i_{\ jk\ell} = 0 \quad \forall i,j,k,\ell$.

(3) Тензор на кривината можем да наричаме и тензора от тип $(0,4)$

$$R_{mjkl} := g_{mi} R^i{}_{jkl},$$

получен след сваляне на горния индекс.

Свойствата на този тензор са:

(*) $$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{cdab} \qquad \forall a,b,c,d$$

(**) $$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

и се доказват с непосредствена проверка.

В n-мерния случай, различните компоненти R_{abcd} (а следователно и независимите $R^i{}_{jkl}$) са

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} \text{ на брой.}$$

Наистина, предвид по-горните симетрии можем да считаме, че $a<b$, $c<d$ и $\{a<c$ или $a=c,\ b\le d\}$. Това са $\frac{n(n-1)}{2}$ комбинации за ab и общо $\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2}+1\right] = \frac{n(n-1)}{8}(n^2-n+2)$ различни R_{abcd} според (*).

Тъждествата (**) са тривиални при съвпадение на някои от индексите a,b,c,d. Нетривиалните съотношения са при $a<b<c<d$ (отново използване (*)), т.е. $\binom{n}{4}$ на брой. Окончателно, $\frac{n(n-1)}{8}(n^2-n+2) - \binom{n}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

За пространство-времето, размерността $n=4$ и независимите компоненти на тензора на Риман са 20:

$abcd$ = 0101, 0102, 0103, 0112, 0113, 0123, 0202, 0203, 0212, 0223,
0303, 0313, 0323, 1212, 1213, 1223, 1313, 1323, 2323, 0312

④ Тензор на Ричи (R_{ik}). Уравнения на Айнщайн $R_{ik}=0$

Тензор на Ричи наричаме следата на тензора на Риман

$$R_{ik} = R^{a}_{\ iak} = \Gamma^{a}_{ia,k} - \Gamma^{a}_{ik,a} - \Gamma^{a}_{ba}\Gamma^{b}_{ik} + \Gamma^{a}_{bk}\Gamma^{b}_{ai}$$

Следата на тензора на Ричи наричаме скаларна кривина

$$R = g^{ik}R_{ik} = g^{ik}R^{a}_{\ iak} = g^{ik}g^{ab}R_{biak}.$$

Оператор на Айнщайн наричаме тензора

$$\left(R_{ik} - \tfrac{1}{2}Rg_{ik}\right)dx^i dx^k$$

В пространство-времето, тензорът на Ричи има 10 компонента, понеже е симетричен. Скаларната кривина е скаларна функция.

Откритието на Айнщайн е, че гравитацията се описва с $10^{те}$ уровнения

(A) $\quad R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = 0 \qquad 0 \le i \le k \le 3$

или, еквиволентно,

(A') $\quad R_{ik} = 0, \qquad 0 \le i \le k \le 3$

Наистина, от $R_{ik} = \frac{1}{2}Rg_{ik}$ следва $g^{mi}R_{ik} = \frac{1}{2}Rg_{ik}g^{mi}$, $R^{m}_{\ k} = \frac{1}{2}R\delta^{m}_{k}$ и при $m=k$, $R = \frac{1}{2}R\delta^{k}_{k} = \frac{1}{2}R\cdot 4 = 2R$, т.е. $R=0$. Оттук, $R_{ik}=0$. Обратно, ако $R_{ik}=0$, то $R=0$ и значи $R_{ik} = \frac{1}{2}Rg_{ik}$.

С други думи, хипотезата на Айнщайн е, че метриката g_{ik} в пространство-времето трябва да удовлетворява уровненията (A) или, еквивалентно (A').

Слаби гравитационни полета

В СТО гравитацията липсва; пространство-времето $\{(t,x,y,z)\}$ е плоско с метрика на Минковски

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
$$= (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \qquad x_0 := ct.$$

ОТО добавя към СТО и гравитацията - геометрично свойство на пространство-времето, отразено в метриката

$$ds^2 = g_{ab}(x)\, dx^a dx^b \qquad (a,b = 0,1,2,3)$$

и удовлетворяваща $10^{\text{те}}$ уравнения на Айнщайн $R_{ab} = 0$.

Нека $P = (0,0,0,0)$ е събитие, центрирано за простота в нулата. Ако развитието на метриката ds^2 в ред на Тейлър по степените на $\frac{1}{c}$ има вида

$$g_{ab}(x) = \overset{(0)}{g}_{ab} + \frac{1}{c^2}\overset{(2)}{g}_{ab}(x) + O\left(\frac{1}{c^3}\right), \qquad \left(\overset{(0)}{g}_{ab}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{(\eta_{ab})}$$

то гравитационното поле, определено от g_{ab} наричаме слабо. Ще видим, че това поле се определя от класическия (Нютонов) гравитационен потенциал

$$\varphi = \frac{1}{2}\, g^{(2)}_{00}(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Казваме, че геодезичната $\left\{ x^\alpha = x^\alpha(t),\ t = \frac{x^0}{c},\ \alpha = 1,2,3 \right.$ е бавна, ако $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$, т.е. $dx^\alpha \ll dx^0$.

Теорема. Уравнението на бавните геодезични в слабо гравитационно поле има вида

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + O\left(\frac{1}{c}\right), \qquad \alpha = 1,2,3$$

т.е. съвпада с уравненията на Нютон за частица в класическо гравитационно поле с потенциал φ.

Доказателство. За $\alpha = 1,2,3$, уравненията на геодезичните са

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} \\
&= \frac{d^2x^\alpha}{c^2dt^2} + \Gamma^\alpha_{jk}\frac{dx^j}{cdt}\frac{dx^k}{cdt} + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{00}\right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \\
&= \frac{1}{c^2}\left[\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right),
\end{aligned}
$$

което доказва теоремата. Междувременно използвахме развитията

$$
\begin{aligned}
ds &= \sqrt{g_{ab}dx^a dx^b} = \sqrt{g_{00}(dx^0)^2 + O\left(\tfrac{1}{c}\right)} \\
&= \sqrt{1 + O\left(\tfrac{1}{c^2}\right)}\, dx^0 + O\left(\tfrac{1}{c}\right) = c\,dt + O(1)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{jk} &= \frac{1}{2}g^{\alpha m}\left[g_{mj,k} + g_{mk,j} - g_{jk,m}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\eta^{\alpha m} + O\left(\tfrac{1}{c^2}\right)\right)\left[\frac{1}{c^2}\left(g^{(2)}_{mj,k} + g^{(2)}_{mk,j} - g^{(2)}_{jk,m}\right) + O\left(\tfrac{1}{c^3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2c^2}\eta^{\alpha\alpha}\left[g^{(2)}_{\alpha j,k} + g^{(2)}_{\alpha k,j} - g^{(2)}_{jk,\alpha}\right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right)
\end{aligned}
$$

В частност,

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\alpha_{00} &= \frac{1}{2c^2}\eta^{\alpha\alpha}\left[2\frac{\partial g^{(2)}_{\alpha 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g^{(2)}_{00}}{\partial x^\alpha}\right] + O\left(\frac{1}{c^3}\right) \\
&= \frac{-1}{2c^2}\left(-\frac{\partial 2\varphi}{\partial x^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{c^3}\right)
\end{aligned}
$$

Теоремата е доказана $\square$

Показахме, че ако скоростта на светлината $c\to\infty$, то

(i) всички геодезични стават „бавни" $\left(\frac{dx^\alpha}{dt} \ll \infty\right)$

(ii) уравненията на геодезичните стават точни: $\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$

С други думи,

$$\text{ОТО} \to \left(\begin{matrix}\text{класическата теория на} \\ \text{гравитацията на Нютон}\end{matrix}\right)$$

Да припомним, че в теорията на Нютон потенциалът създаван от маси m_A, намиращи се в точки $x_A \in \mathbb{R}^3$ има вида

$$\varphi(x) = -\sum_A \frac{G m_A}{|x-x_A|}$$

G е гравитационната константа. Лесно проверяваме, че потенциалът φ удовлетворява уравнението на Лаплас

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}}\right)\varphi = 0$$

Това линейно ЧДУ от $2^{ри}$ ред е независимо от уравнението на геодезичните и се определя от положението на масите.

В ОТО това не е така. Аналог на уравнението на Лаплас $\Delta\varphi = 0$ са $10^{те}$ уравнения $R_{ik} = 0$; особеностите на метриката определят положението на масите, но дори да знаем положението и скоростите на масите, не можем да определим метриката (или геодезичните).

Теорема. В ОТО, собственото време τ тече по-бавно, а именно

$$d\tau = \left(1 + \frac{\varphi(x)}{c^2} + O(c^{-3})\right)dt < dt,$$

$$\tau = t + \frac{1}{c^2}\int_0^t g_{00}^{(2)}\,dt + O\left(\frac{1}{c^3}\right) < t.$$

Наистина,

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{\frac{g_{00}}{c^2}dx^{0^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)} = \sqrt{g_{00}\,dt^2 + O\left(\frac{1}{c^3}\right)} = \left(1 + \frac{\varphi(x)}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^3}\right)\right)dt.$$

Използваме и факта, че $\varphi(x) < 0$. □

Накрая ще отбележим, че

1. При $c \to \infty$, $t \to \tau$, т.е. времето става абсолютно
2. В „силно" гравитационно поле, времето тече още по-бавно.

Принцип на най-малкото действие

Зародиш на принципа на най-малкото действие се намира в опита на Мопертюи (Maupertuis P.L.M. de) да получи корпускулната теория на светлината (1744), аналогична на „принципа на най-малкото време" на Ферма. Съгласно Мопертюи, „всеки път, когато в природата нещо се променя, големината на действието, породено от тази промяна, е най-малката от възможните".

Принципът на Мопертюи е бил установен от Ойлер (1744) за случая на отделна частица под действието на централна сила, както и от Lagrange (1760) за много по-общи задачи.

Всяка физическа система в n-мерното пространство се описва от функция на $(2n+1)$-променливи

$$L = L(x, \xi, \tau) = L\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau\right),$$

наричана Лагранжиан (на конкретната физическа задача). Тук

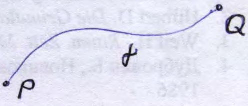
$x = (x^1, \ldots, x^n) = \{$координати в n-мерното пространство$\}$

τ = параметър

$\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) = \{$вектор на скоростта$\}$, $\xi^i := \frac{dx^i}{d\tau}$.

Ако P и Q са две фиксирани точки от n-мерното пространство, а γ е път от P до Q, то функционала

$$S[\gamma] := \int_P^Q L(x(\tau), x'(\tau), \tau)\, d\tau$$



/интегрирането е по пътя γ/, наричаме действие.

Въпросът е: ако P и Q са фиксирани, то за коя крива γ (от P до Q) действието $S[\gamma]$ е минимално?

<u>Теорема</u>. Ако действието $S[\gamma] = \int_P^Q L(x,x',\tau)\,d\tau$ достига минимума си за някоя крива $\gamma : x^i = x^i(\tau)$ (измежду кривите от P до Q), то върху γ са в сила уравненията на Ойлер-Лагранж

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial x^{i'}} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1 \div n \quad \left(x^{i'} = \xi^i = \frac{dx^i}{d\tau} \right)$$

В тези уравнения отначало считаме, че $L = L(x^1,\dots,x^n,\xi^1,\dots,\xi^n,\tau)$, после пресметаме частните производни $\frac{\partial L}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial L}{\partial \xi^i}$ и накрая заместваме $\xi^i = \frac{dx^i}{d\tau}$.

Кривата γ наричаме екстремала за действието S, а функцията

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} := \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial x^{i'}} = \{\text{вариационна производна на } L \text{ по } x^i\}$$

Символът δ наричаме вариация.

<u>Теорема</u>. При смяна на променливите $x \to y$, както и при смяна на параметъра τ, уравненията на Ойлер-Лагранж запазват вида си. Така че,

$$\frac{\delta L}{\delta y} = 0 \quad \forall y, \quad \text{т.е.} \quad \delta L = 0.$$

<u>Пример</u>. Геодезичните са екстремалите на функционала действие

$$S[\gamma] = \int_P^Q ds = \int_a^b \sqrt{g_{ik}(x)\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}}\,d\tau$$

т.е. γ е най-краткото разстояние между точките P и Q.

Наистина, лагранжианът е $L = \sqrt{g_{ik}(x)x^{i'}x^{k'}}$, а уравненията на Ойлер-Лагранж са

$$\frac{\delta L}{\delta x^s} = 0 \quad \forall s \iff \frac{\delta L^2}{\delta x^s} = 2L\frac{\delta L}{\delta x^s} = 0 \quad \forall s$$

$$\iff 0 = g_{ik,s}x^{i'}x^{k'} - \left(g_{ik}\delta^i_s x^{k'} + g_{ik}x^{i'}\delta^k_s\right)'$$

$$= g_{ik,s}x^{i'}x^{k'} - \left(g_{ks,j}x^{j'}x^{k'} + g_{ks}x^{k''} + g_{is,j}x^{j'}x^{i'} + g_{is}x^{i''}\right)$$

Умножаваме по $\frac{1}{2}g^{sm}$ и получаваме точно уравнението

$$0 = x^{m''} + \Gamma^m_{ik}x^{i'}x^{k'}.$$

Функционал на Хилберт и уравнения на Айнщайн

През 1915, пет дена преди Айнщайн да представи своите уравнения в окончателната им форма, Д. Хилберт, вдъхновен от по-ранна работа на Айнщайн, формулира тези закони в най-простата им възможна форма и като следствие от принципа за най-малкото действие.

Функционалът на Хилберт има вида

$$S[g] = \iiiint\limits_D R\, d\Omega$$

$$= \iiiint\limits_D R_{ik}\, g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x$$

където S зависи от метриката g,

$R = R_{ik}\, g^{ik} = \{$скаларната кривина$\}$ ($R_{ik}\, dx^i dx^k =$ тензор на Ричи)

$g := \det(g_{ik})$

$d^4x := dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ (съкращение)

$d\Omega = \sqrt{-g}\, d^4x = \{$форма на обема в пространство-времето$\}$

$D =$ (произволна) област в пространство-времето, например 4-мерен куб.

Хилберт доказва следната

Теорема. При варирането на функционала $S[g]$ по $10^{\text{те}}$ гравитационни потенциала g^{ik}, получаване

$$\frac{\delta S[g]}{\delta g^{ik}} = \iiiint\limits_D \left(R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik}\right) d\Omega = 0$$

за всяка област D и всички $0 \le i \le k \le 3$.

Това е равносилно на уравненията на Айнщайн

$$R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik} \equiv 0 \qquad \forall\, 0 \le i \le k \le 3 .$$

С други думи, метриката $ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k$ минимизира S_{Hilbert} точно когато удовлетворява уравненията на Айнщайн

<u>Доказателство</u>. Ако метриката е екстремална, то

$$0 = \delta \iiiint_D R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x$$
$$= \iiiint_D (\delta R_{ik}) g^{ik} \sqrt{-g}\, d^4x + \iiiint_D R_{ik} (\delta g^{ik}) \sqrt{-g}\, d^4x$$
$$+ \iiiint_D R \cdot (\delta \sqrt{-g})\, d^4x$$
$$= 0 + \iiiint_D R_{ik} (\delta g^{ik}) \sqrt{-g}\, d^4x + \iiiint_D R \cdot (-\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik})\, d^4x$$

съгласно две леми – за първия и третия интеграли, които леми ще докажем. Преобразуваме горното равенство:

$$0 = \iiiint_D (R_{ik} - \tfrac{1}{2} R\, g_{ik}) \sqrt{-g} \cdot \delta g^{ik}\, d^4x$$

което означава, че $\iiiint_D (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) \sqrt{-g}\, d^4x = 0$ за всяка област D и всички i, k. Това е възможно само ако подинтегралната функция е тъждествено нула. След съкращаване на $\sqrt{-g}$ получаваме $10^{\text{те}}$ уравнения на Айнщайн.

Остават ни двете леми. По-лесна е лемата, свързана с третия интеграл.

<u>Лема 1.</u> $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g_{ik}\, \delta g^{ik}$

Наистина,

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \delta(\det(g_{ik}))$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{g}} \delta \sum^{24} (\pm g_{i_1k_1} g_{i_2k_2} g_{i_3k_3} g_{i_4k_4})$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \sum_1^{16} \delta g_{ik} \sum^{6} (\pm g_{i_1k_1} g_{i_2k_2} g_{i_3k_3})$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{-g}} \sum_{i,k=1}^{4} \delta g_{ik} \cdot \Delta^{ik}$$

Δ^{ik} = алгебрично допълнение на g_{ik} $= g^{ik} \cdot \det g$

$$= + \frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_{i,k=1}^{4} g^{ik} \delta g_{ik}$$
$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \sum_{i,k=1}^{4} g_{ik} \delta g^{ik},$$

защото $4 = g_{ik} g^{ik} \Rightarrow 0 = \delta(g_{ik} g^{ik}) = g_{ik} \delta g^{ik} + g^{ik} \delta g_{ik}$. $\square$

Лема 2. Ако D е 4-мерен куб, то

$$\iiiint_D (\delta R_{ik})\cdot g^{ik}\, d\Omega = 0$$

Следователно това е вярно и за всяка област D.

Доказателство. Отначало ще пресметнем подинтегралната функция в точка P. За целта най-удобно е да изберем координати (y^0, y^1, y^2, y^3) такива, че

$$\Gamma^a_{bc}(P) = 0 \quad \forall a,b,c, \text{ т.е. } \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(P) = 0 \quad \forall i,j,k.$$

Тогава, в точката P,

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\delta\left(\Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ia,k} + \Gamma^a_{ik}\Gamma^b_{ab} - \Gamma^a_{ib}\Gamma^b_{ak}\right)$$

$$= g^{ik}\delta\left(\Gamma^a_{ik,a} - \Gamma^a_{ia,k}\right)$$

$$= g^{ik}\left(\delta\Gamma^a_{ik}\right)_{,a} - g^{ik}\left(\delta\Gamma^a_{ia}\right)_{,k}$$

$$= \underbrace{\left[g^{ik}\delta\Gamma^a_{ik} - g^{ik}\delta\Gamma^k_{ik}\right]}_{\delta W^a}{}_{,a}$$

При последното равенство използвахме факта, че щом

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}(P) = 0$, то и $\frac{\partial g^{ab}}{\partial y^c}(P) = 0$ за всички a, b, c.

Продължаваме да преобразуваме:

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \delta W^a{}_{,a} = \nabla_a \delta W^a,$$

защото при $\Gamma^a_{bc}(P) = 0$ имаме $\frac{\partial}{\partial y^a} = \nabla_a$.

За законността на следващите пресмятания на дивергенцията $\nabla_a \delta W^a$ ще отбележим, че

$$\left\{ V = \delta W^a \cdot \frac{\partial}{\partial y^a} \text{ е вектор} \right\} \Leftarrow \left\{ W^a \frac{\partial}{\partial y^a} \text{ е вектор} \right\}$$

$$\Leftarrow \left\{ \delta\Gamma^i_{jk} \cdot \frac{\partial}{\partial y^k} \text{ е вектор} \right\}$$

$$\Leftarrow \left\{ \Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^k} \text{ и } \left(\Gamma^i_{jk} + \delta\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial y^k} \text{ са вектори} \right\}$$

Но $\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^k} = \nabla_i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ и значи Γ^i_{jk} са коефициентите на вектора $\frac{\partial}{\partial y^j}$, получен при паралелен пренос по координатната ос y^i. Следователно $\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial y^k}$ е вектор. Същите аргументи са в сила и за $(\Gamma^i_{jk}+\delta\Gamma^i_{jk})\frac{\partial}{\partial y^k}$.

Сега, знаейки че $V = V^a\frac{\partial}{\partial y^a}$ е вектор, пресметаме

$$\begin{aligned}
\nabla_a V^a &= \frac{\partial V^a}{\partial y^a} + \Gamma^a_{ak} V^k \\
&= V^a_{,a} + \frac{g^{am}}{2}\left[g_{ma,k} + g_{mk,a} - g_{ak,m}\right] V^k \\
&= V^a_{,a} + \frac{1}{2} g^{am}\, g_{ma,k} V^k \\
&= V^a_{,a} + \frac{1}{2g}\, g_{,k} V^k \qquad (g := \det(g_{ij})) \\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\cdot V^k\right)_{,k}
\end{aligned}$$

Да припомним, че $g^{ik}\delta R_{ik} = \delta W^a_{,a} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\cdot\delta W^k\right)_{,k}$.

Окончателно пресметаме

$$\begin{aligned}
\iiiint_D \delta R_{ik}\cdot g^{ik}\sqrt{-g}\, d^4x &= \delta\iiiint_D \nabla_a W^a \sqrt{-g}\, d^4x \\
&= \delta\iiiint_D \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\, W^k\right) d^4x \\
&= \sum_{k=0}^{3}\left[\delta\iiint_{D_k^+}\sqrt{-g}\, W^k \frac{d^4x}{dx^k} - \delta\iiint_{D_k^-}\sqrt{-g}\, W^k\frac{d^4x}{dx^k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{3}\left[0-0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

където $D_k^+ = D\cap\{x^k=\max\}$ и $D_k^- = D\cap\{x^k=\min\}$ са стените на куба; върху тях нямаме вариация. □

Теоремата на Хилберт е доказана.

Задача на Шварцшилд

„Избързването" на перихелия на Меркурий (43" за 100 години) е открито от Le Verrier (1859) и обяснено за първи път от Алберт Айнщайн (Einstein A., Sitz. Berl. Akad., Bd. 47, 1915, H. 2, S. 831, превод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. 1., «Наука», М., 1965, с. 439)

През 1916 г., Карл Шварцшилд развива и обосновава математически идеята на Айнщайн (Schwarzschild K., Sitz. Berl. Akad, 1916, S. 189) в статията „Върху гравитационното поле на точкова маса в теорията на Айнщайн".

Знаменитият резултат на Шварцшилд гласи следното

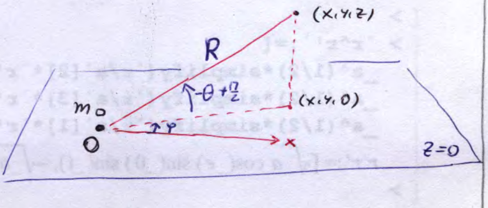
Гравитационното поле на точка с маса m_0, разбирай метриката която създава тази точка в пространство-времето, има вида

$$(*) \qquad ds^2 = \left(1-\frac{a}{R}\right)c^2dt^2 - \frac{dR^2}{1-\frac{a}{R}} - R^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

където координатите в пространство-времето са (t, R, φ, θ),

t е времето,

$a := \frac{2Gm_0}{c^2}$ наричаме „гравитационен радиус" на точката m_0 ($G = 6,67\cdot10^{-8}\,\frac{sm^3}{g\cdot sek^2}$ е гравитационната константа, c е скоростта на светлината в простр. на Минковски)



$$R^3 = a^3 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{r}$$

Считаме, че масата m_0 е неподвижна в центъра $(0,0,0)$ на пространството.

Интервалът (*) $ds = \sqrt{\cdots}$ наричаме метрика на Шварцшилд.

формулата за гравитационния радиус $a = \frac{2 k m_0}{c^2}$ задава пропорционалност между масата на покой m_0 и a.

За Слънцето, гравитац. радиус е $a_{\odot} = 2953{,}4$ метра, а за Земята е само $8{,}8$ mm.

Възможна е следната интерпретация: ако едно тяло бъде пресирано и свито до размер ≤ (гравитационния радиус на тялото), то се превръща в „черна дупка". Засега обаче няма убедителни доказателства на наличието на „черни дупки".

Обратно, макар и малко на брой, всички проведени наблюдения потвърждават формулата на Шварцшилд, за разстояния $\gg a$.

Понятно понятието „материална (тежка) точка" е чиста абстракция, напр. Слънцето има радиус .

Но, на разстояние > 10млн. км от Слънцето, то може да бъде разглеждано като точка и метриката е на Шварцшилд.

Формулата $R = \sqrt[3]{a^3 + (x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \approx \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(1 + \frac{a^3}{3(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \dots\right)$

$$\approx r\left(1 + \frac{a^3}{3r^3}\right) = r + \frac{a^3}{3r^2}, \quad r := \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

показва, че разстоянието по Шварцшилд R > декартовото разстояние r

Разликата е приблизително $\frac{a^3}{3r^2}$.

Когато $m_0 \to 0$, то и $a \to 0$, а

метриката на Шварцшилд $(*)$ $\longrightarrow$ метриката на Минковски

$$ds^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)$$

Съответно $(R, \theta, \varphi) \rightarrow$ (сферични координати) $\qquad = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

В сила е следната

Теорема на Биркхоф. Единственото сферически симетрично решение на уравненията на Айнщайн $R_{ik}=0$ е метриката на Шварцшилд

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Няма да доказваме единствеността; ще пресметнем метричния тензор, символите на Кристофел и тензора на Ричи.

1. В координатите (t, r, θ, φ), метричният тензор е $(x^0 := ct,\ x^1 := r,\ x^2 := \theta,\ x^3 := \varphi)$

$$\begin{pmatrix} g_{00} = \left(1-\frac{a}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} = \frac{-1}{1-a/r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} = -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} = -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

2. Детерминантата е

$$g = \det(g_{ij}) = -r^4\sin^2\theta$$

3. Единствените ненулеви символи на Кристофел са (9 на брой)

$$\Gamma^0_{01} = -\Gamma^1_{11} = \frac{a}{2r(r-a)} \qquad \Gamma^1_{22} = a-r \qquad \Gamma^3_{32} = \operatorname{cotg}\theta$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{a(r-a)}{2r^3} \qquad \Gamma^1_{33} = (a-r)\sin^2\theta$$

$$\Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \qquad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta$$

4. Всички компоненти на тензора на Ричи са нули:

$$R_{ik} = 0 \qquad i,k = 0,1,2,3$$

За пълнота ще посочим ненулевите компоненти на тензора на Риман:

$$R_{0101} = \frac{a}{r^3} \qquad R_{1212} = \frac{a}{r(r-a)}$$

$$R_{0202} = \frac{(a-r)a}{2r^2} \qquad R_{1313} = \frac{\sin^2\theta}{2(r-a)}a$$

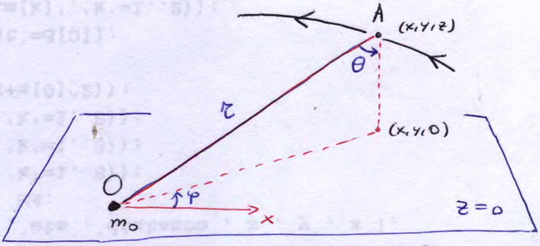
$$R_{0303} = \frac{a-r}{2r^2}a\sin^2\theta \qquad R_{2323} = -ra\sin^2\theta$$

Забележка:

$$R_{abcd} := \frac{1}{2}\left(g_{ad,bc} + g_{bc,ad} - g_{ac,bd} - g_{bd,ac}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{ad}\Gamma^p_{bc} - \Gamma^n_{ac}\Gamma^p_{bd}\right)$$

Геодезични в метриката на Шварцшилд

Точка с маса m_0, разположена в началото O на (x,y,z)-пространството, създава гравитационно поле, т.е. метрика на Шварцшилд



$$\boxed{r^3 = a^3 + (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$ds^2 = \left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\,dt^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{a}{r}} - r^2\,d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta . d\varphi^2$$

Тук (t, r, θ, φ) са координатите на Шварцшилд в пространство-времето
$a = \frac{2\gamma m_0}{c^2}$ е гравитационният радиус на масата m_0.

Нека A е пробна частица – точка с пренебрежимо малка маса. Тогава

$$\begin{pmatrix} \text{траектория} \\ \text{на } A \\ t = t(s) \\ r = r(s) \\ \theta = \theta(s) \\ \varphi = \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{геодезична в метриката} \\ \text{на Шварцшилд} \\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0, \\ x^0 := ct,\ x^1 := r,\ x^2 := \theta,\ x^3 := \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{решение на уравненията} \\ \text{на Ойлер – Лагранж} \\ \text{с лагранжиан} \\ L = h = \text{const} = h\,\frac{ds^2}{ds^2}, \\ \frac{L}{h} = \left(1-\frac{a}{r}\right)c^2 t'^2 - \frac{r'^2}{1-\frac{a}{r}} - \\ - r^2\theta'^2 - r^2\sin^2\theta\,\varphi'^2 \end{pmatrix}$$

От двата еквивалентни метода за пресмятане на уравненията на движение и траекторията на пробната частица A (геодезичните), в случая е по-удобно да използваме уравненията на Ойлер – Лагранж.

Винаги можем да считаме, че след завъртане около O в (x,y,z)-пространството,

$$\theta_{|s=s_0} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{ds}_{|s=s_0} = 0$$

(s_0 е произволно фиксирано). За целта трябва да завъртим вектора

$$(x,y,z)_{|s=s_0} \times (x',y',z')_{|s=s_0}$$

така, че да стане колинеарен с вектора $(0,0,1)$.

Четирите уравнения на Ойлер-Лагранж ще използваме в реда:

4), 3), 1), 2).

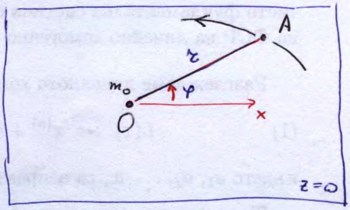
②

4) $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial \varphi'} \Leftrightarrow 0 = \left(r^2 \sin^2\theta \cdot \varphi'\right)' \Leftrightarrow \varphi' = \dfrac{c_4}{r^2 \sin^2\theta}, \quad c_4 = \text{const}$

3) $\dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial \theta'} \Leftrightarrow r^2\, 2\sin\theta \cos\theta \cdot \varphi'^2 = \left(r^2\, 2\theta'\right)' \quad /2r^2$

$\Leftrightarrow \theta'' + \dfrac{r'}{r}\theta' = \dfrac{c_4^2 \cos\theta}{r^4 \sin^3\theta}$

$\Leftrightarrow \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}$, защото $\theta_{|s=s_0} = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta'_{|s=s_0} = 0$ и $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}$ е решение



(От 3) и 4) получихме закона на Кеплер:

движението на пробната частица (планетата) A е в една неизменна равнина ($z=0$) и е постоянна площна скорост

$$\varphi' = \frac{c_4}{r^2}, \quad c_4 = \text{const}.$$

Лагранжианът вече се редуцира до

$$L = \left(1-\frac{a}{r}\right) c^2 t'^2 - \frac{r'^2}{1-\frac{a}{r}} - r^2 \varphi'^2$$

Сега

1) $\dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial t'} \Leftrightarrow 0 = \left[\left(1-\frac{a}{r}\right)t'\right]' \Leftrightarrow c\left(1-\frac{a}{r}\right)t' = c_1 = \text{const}$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial r} = \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial L}{\partial r'} \Leftrightarrow L = h = \text{const} \Leftrightarrow h = \dfrac{c_1^2 - r'^2}{1-\frac{a}{r}} - \dfrac{c_4^2}{r^2}$

$\Leftrightarrow r'^2 = c_1^2 - \left(1-\frac{a}{r}\right)\left(h + \frac{c_4^2}{r^2}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 = r'^2\left(\dfrac{ds}{d\varphi}\right)^2 = \dfrac{c_1^2 - h}{c_4^2} r^4 + \dfrac{ah}{c_4^2} r^3 - r^2 + ar$

Последното уравнение може да се реши в явен вид.

Пълно изследване на решенията е публикувано за първи път от

Y. Hagihara, Jap. Journ of Ast. and Geoph., 1931.

Решенията на Хагихара са

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{3} + 4\,\wp(\varphi + \text{const})$$

където $\wp$ е пе-функцията на Вайерщрас.

Първи закон на Кеплер в релативистката механика

Кеплеровото, т.е. ограничено движение на планета в гравитационното поле на Шварцшилд (на Слънцето) има вида

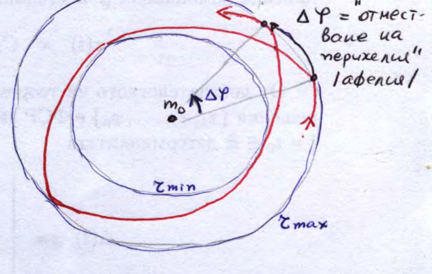
$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - e\cos_q u}$$

или, еквивалентно,

$$\frac{1}{r} = \frac{cn^2\frac{u}{2}}{r_{min}} + \frac{sn^2\frac{u}{2}}{r_{max}}.$$

Движението на планетата A е в пръстена $(r,\varphi) \in [r_{min}, r_{max}] \times [0, 2\pi)$

r е елиптична (двойнопериодична) функция на ъгъла φ. Чисто имагинерия период няма физически смисъл, а реалният период на $r = r(\varphi)$ е $T_{RE} = 2\pi\mu$.



Отместване на перихелия

$$\Delta\varphi = 2\pi(\mu - 1) \approx \frac{24\pi\sqrt{q}}{e}$$

Отместването на перихелия, или, все едно, на афелия на планетата е

$$\Delta\varphi = 2\pi\mu - 2\pi \approx \frac{24\pi\sqrt{q}}{e} > 0$$

Величините $p, e, q, u, \mu, \ldots$ и функциите $cn, sn, \cos_q u$ в горната теорема определяме по следния начин.

(i) r_{min} и r_{max} са двата най-големи корена на ДУ

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c_1^2 - h}{c_4^2}r^4 + \frac{ah}{c_4^2}r^3 - r^2 + ar := \frac{-a}{r_1 r_{min} r_{max}}\, r(r - r_1)(r - r_{min})(r - r_{max}),$$

най-малкия корен r_1 е свързан (по Виет) с равенството

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}}, \qquad 0 < a < r_1 < r_{min} < r_{max}.$$

(ii) На практика са известни величините m_0, $r_{средно}$, e (ексцентрицитет) и

$$a = \frac{2m_0\gamma}{c^2}, \quad r_{min} = (1-e)\cdot r_{средно}, \quad r_{max} = (1+e)\cdot r_{средно}$$

Параметърът p определяме от

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r_{max}} + \frac{1}{r_{min}},$$

а r_1 от формулата $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}$.

(iii) Пресмятане елиптичните интеграли

$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}, \qquad k^2 = \frac{\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{max}}} \in (0,1)$$

$$K' = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}}, \qquad k'^2 = 1 - k^2$$

Гаус (1799) е направил това на ръка по формулата

$$K = \frac{\pi}{2M(1,k')}, \qquad K' = \frac{\pi}{2M(1,k)}$$

където $M(\alpha,\beta)$ е средно аритметико-геометрично на числата α и β.

(iv) Реалния период на r по φ е

$$T_{RE} = \frac{4K}{\sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_{max}}}} = \frac{2\pi}{M\left(\sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_{max}}}, \sqrt{\frac{a}{r_1} - \frac{a}{r_{min}}}\right)} := 2\pi\mu \qquad (\mu > 1)$$

и следователно избързването на перихелие за една обиколка ($\varphi \in [0, 2\pi]$) е

$$\Delta\varphi = T_{RE} - 2\pi = 2\pi\left[1 - \frac{1}{M\left(\sqrt{1 - \frac{a}{r_{min}} - \frac{2a}{r_{max}}}, \sqrt{1 - \frac{2a}{r_{min}} - \frac{a}{r_{max}}}\right)}\right]$$

Това е формулата, обясняваща откритието на Льоверие от 1859г.!

Тази формула е точна; приближено

$$\Delta\varphi \approx 2\pi\left[1 - \frac{1}{M\left(1 - \frac{a}{2r_{min}} - \frac{a}{r_{max}}, 1 - \frac{a}{r_{min}} - \frac{a}{2r_{max}}\right)}\right]$$

$$\approx 2\pi\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{3a}{2r_{min}} - \frac{3a}{2r_{max}}}\right] \approx 3\pi a\left(\frac{1}{r_{min}} + \frac{1}{r_{max}}\right)$$

$$= 3\pi a \frac{1+e+1-e}{r_{\text{средно}}(1-e)(1+e)} = \frac{6\pi a}{r_{\text{средно}} \cdot (1-e^2)}$$ / формула на Айнщайн /

През 1915 година Айнщайн обяснява избързването на перихелие на Меркурий именно с тази приближена формула:

$$\Delta\varphi\left(\begin{matrix}\text{меркурий,}\\ \text{за 100 години}\end{matrix}\right) \approx \frac{6\pi a_{\text{слънцето}}}{r_{\text{ср,мерк.}}(1 - e^2_{\text{меркурий}})} \cdot \frac{100 \text{ години}}{\left(\begin{matrix}\text{периода на обиколка}\\ \text{на Меркурий около } \odot\end{matrix}\right)}$$

$$\approx 43''$$

(V) Останалите величини от теорията на елиптичните функции :

$$\tau := \frac{iK'}{K}$$

$$q := e^{\pi i \tau} = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$ – елиптичен модул $q \in (0,1)$

$$\Theta_{\alpha\beta}(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\left(n+\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{\pi i (2n+\alpha)\left(z+\frac{\beta}{2}\right)}$$ – тета-функции на Риман

$$\mathrm{sn}(z) := \frac{\Theta_{00}(0)\,\Theta_{11}(2Kz)}{\Theta_{10}(0)\,\Theta_{01}(2Kz)}$$ – елиптичен синус

$$\mathrm{cn}(z) := \frac{\Theta_{01}(0)\,\Theta_{10}(2Kz)}{\Theta_{10}(0)\,\Theta_{01}(2Kz)}$$ – елиптичен косинус

$$\left(\begin{array}{l} \mathrm{sn}^2 z + \mathrm{cn}^2 z \equiv 1 \\ \mathrm{sn}_{q=0}\, z = \sin z \\ \mathrm{cn}_{q=0}\, z = \cos z \end{array}\right)$$

$$\cos_q u := \mathrm{cn}^2 \frac{u}{2} - \mathrm{sn}^2 \frac{u}{2}$$ – релативистки косинус ($\cos_0 u = \cos u$)

$$u := \frac{\varphi - \varphi_0}{M}$$ – аргументът на елиптичните функции

Доказателството на релативисткия закон на Кеплер се основава на стандартни факти от теорията на елиптичните функции. По-конкретно, това е решаването на уравнението

$$r'^2 = P_4(r) = (\text{полином от } 4^{\text{та}} \text{ степен}).$$

Интересен частен случай е когато **геодезичната е насочена** право към масата m_0. Тогава

$$C_4 = 0\,, \quad \varphi' = 0$$

$$r'^2 = c_1^2 - h\left(1-\frac{a}{r}\right)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2}{c_1^2}\left[c_1^2 - h\left(1-\frac{a}{r}\right)\right] = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2\left[1-\frac{h}{c_1^2}+\frac{ha}{c_1^2 r}\right]$$

За $r > a$ но $r \approx a$, решението на това диференциално уравнение е

$$\dot{r} \approx \pm c\left(1-\frac{a}{r}\right) \approx \pm\frac{c}{a}(r-a) \Rightarrow r \approx a + e^{\pm\frac{c}{a}(t-t_0)}$$

за някое $t_0 = \text{const}$. Това означава, че A клони безкрайно дълго към m_0.

По-общо: в ОТО, за разлика от класическата теория, материалните точки не се сблъскват.