Усредняване по l и l'

Теорема. *Нека $r = (x, y, z)$ и $r' = (x', y', z')$ са съответните координати на две от планетите. Тогава усредняването по средните аномалии l и l' се задава с формулата*

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dl\ dl'}{|r-r'|} &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-e\cos u)(1-e'\cos u')}{|r-r'|} du\, du' \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{aa'}} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left[\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}-2\cos\varphi\right]^{1/2}} \right. \\
&\quad + \left[\frac{e^2}{4}+\frac{e'^2}{4}-\frac{i^2}{4}-\frac{i'^2}{4}+\frac{ii'^2}{2}\cos(\theta-\theta')\right]\cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\left[\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}-2\cos\varphi\right]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \left. - \frac{ee'}{2}\cos(\theta-\theta'+g-g') \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi\ d\varphi}{\left[\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}-2\cos\varphi\right]^{\frac{3}{2}}} \right\}.
\end{aligned}$$

Това е съкратеният вид на основната формула в теорията на пертурбациите, kато a и a' са дължините по големите полуоси и φ е ъгълът между планетите.

Забележка. Интегралът $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{A^3}}$ е елиптичен и лесно и с произволна точност се пресмята (например с компютър).

Доказателство на теоремата. Тъй като

$$l \ = \ a(u - e\sin u), \quad \text{то} \quad dl \ = \ a(1-e\cos u)du\ .$$

Аналогично за втората планета $l' = a'(u' - e'\sin u')$ и $dl' = a'(1-e'\cos u')du'$.

Ъгълът между планетите

$$\varphi \ = \ u + g + \theta - u' - g' - \theta'.$$

и следователно можем да сменим вторите променливи u' (по които интегрираме) с φ

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{du\ du'}{\sqrt{\frac{a'}{a}+\frac{a}{a'}-2\cos\varphi}} \ = \ \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{du\ d\varphi}{\sqrt{\frac{a'}{a}+\frac{a}{a'}-2\cos\varphi}}\ .$$

Наистина, ако u е фиксирано, то $d\varphi = -du'$, когато u' се мени от 0 до 2π, то φ се мени от 0 до -2π. Минусите от $-du'$ и обратната посока на интегриране 0 до -2π се компенсират и можем да заменим du' с $d\varphi$.

Аналогично, ако фиксираме u' , то $du = d\varphi$.

Тъй като знаменателят

$$A \;\; := \;\; \frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi,$$

не зависи от u, то двойният интеграл се превръща в единичен:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{du\; d\varphi}{\sqrt{\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi}} \;\; = \;\; 2\,\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi}} \;.$$

Всички интеграли, в които няма $\cos\varphi$ остават, а останалите са равни на нула. Ще покажем един пример:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{a'} \cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + 2u)}{\sqrt{(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi)}^3}\, du\, du' \\
= \;\; & \frac{a}{a'} \cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + 2u)}{\sqrt{(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi)}^3}\, du\, d\varphi \\
= \;\; & \frac{a}{a'} \cdot \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\cos 2u - \sin\varphi\sin 2u}{\sqrt{(\frac{a'}{a} + \frac{a}{a'} - 2\cos\varphi)}^3}\, du\, d\varphi \\
= \;\; & \frac{a}{a'} \cdot \left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{\sqrt{A^3}} d\varphi \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos 2u\;du \;\; - \;\; \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{A^3}}\, d\varphi \cdot \int\limits_0^{2\pi} \sin 2u\;du\right] \\
= \;\; & 0\;,
\end{aligned}$$

тъй като $\int\limits_0^{2\pi} \cos 2u\;du = 0$ и $\int\limits_0^{2\pi} \sin 2u\;du = 0$.

Следователно, остават само интегралите от вида

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} const \cdot \frac{\cos\varphi}{\sqrt{A^3}}\, du\, d\varphi \;\; = \;\; 2\,\pi \int\limits_0^{2\pi} const \cdot \frac{\cos\varphi}{\sqrt{A^3}}\, d\varphi \;.$$

Останалите интеграли, в които имаме $\cos(\varphi + \cdots)$, стават равни на нула, защото $\cos\varphi$ може да се представи по формулата, която показахме по-горе.

Веселина Чанева veselina_ch@abv.bg
Райна Тренева, r_treneva@hotmail.com
Росен Филипов, rfilipov@abv.bg
Йорданка Сиракова, sirakovajg@abv.bg
Иван Иванов, ivanivanov@fmi.uni-sofia.bg