Задача за двете тела и задача на Кеплер

1 Формулировка на задачата за двете тела

Две небесни тела – Слънце S с маса m_S и координати $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и Юпитер J с маса m_J и координати $y=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, се привличат съгласно закона на Нютон за всемирното привличане: J привлича S със сила $F=\big(F_1,F_2,F_3\big)\in\mathbb{R}^3$, а S привлича J със сила $(-F)$; големината на векторът F е

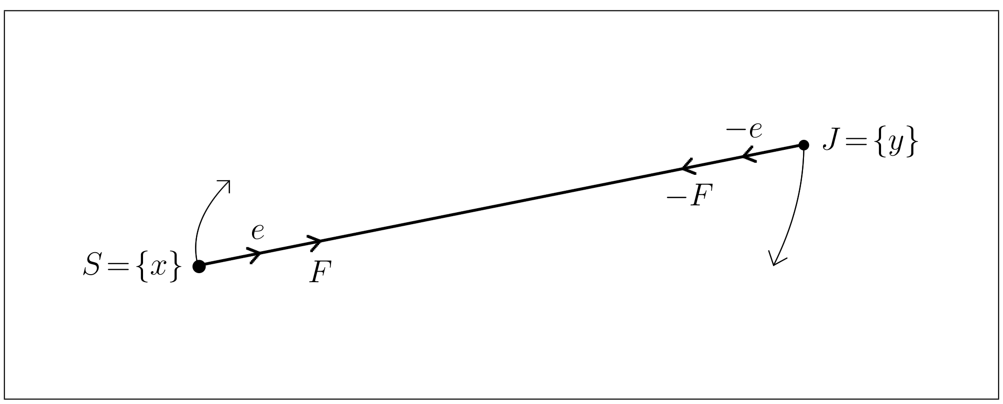
$$|\,F\,| = \sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2} = \frac{\mathcal{G}\,m_J\,m_S}{r^2}\,, \qquad \mathcal{G}=6,670.10^{-8}\tfrac{sm^3}{g.sek^2}=\left\{\begin{matrix}\text{гравитационната}\\ \text{константа}\end{matrix}\right\}.$$

Движението на всяко едно от двете тела става съгласно закона на Нютон $F=ma$ (силата $=$ масата . ускорението). Това са 6 диференциални уравнения от втори ред:

$$\left|\begin{aligned} m_S\,\ddot{x}_i &= -\frac{\mathcal{G}\,m_S\,m_J\,e_i}{r^2} = \frac{\mathcal{G}\,m_S\,m_J\,(y_i-x_i)}{|x-y|^3}\\ m_J\,\ddot{y}_i &= \frac{\mathcal{G}\,m_S\,m_J\,e_i}{r^2} = \frac{\mathcal{G}\,m_S\,m_J\,(x_i-y_i)}{|x-y|^3}\end{aligned}\right. \quad,\qquad i=1,2,3, \tag{1}$$

където $\dot{}=\frac{d}{dt}$ е диференциране по времето t, $e=(e_1,e_2,e_3)=\frac{x-y}{|x-y|}$ е единичният вектор, насочен от S към J, а $r:=|x-y|$ е дължината[1] на вектора $x-y$.

Задачата е да пресметнем траекториите $x=x(t)$ и $y=y(t)$ на S и J като функции на времето t.



Забележка. Тъй като $|y-x|\gg$ размерите на S и J, то можем да считаме, че двете небесни тела са материални точки с маса, съсредоточена съответно в техните центрове на тежестта.

[1]В евклидовата метрика в $\mathbb{R}^3$, $|x-y|:=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$.

2 Изключване на Слънцето

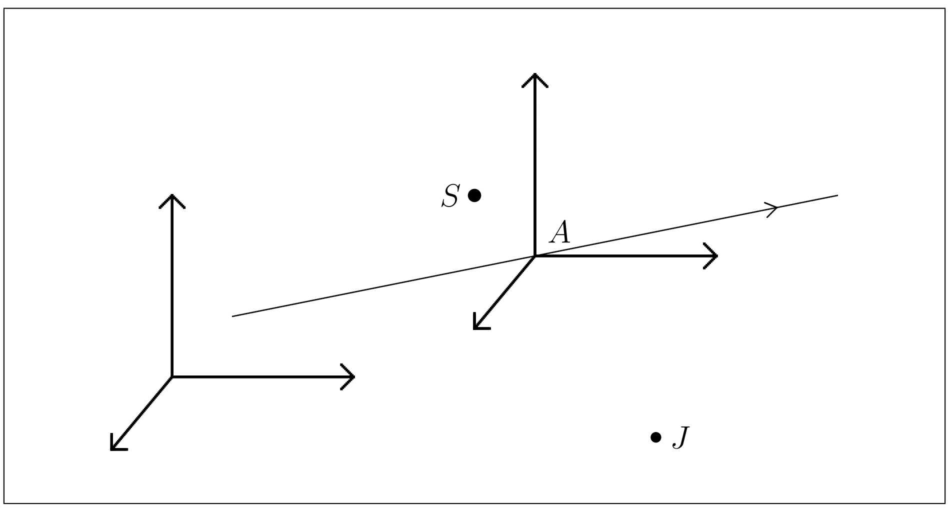
Събираме първото с четвъртото уравнение от (1), след което два пъти интегрираме по t. Аналогично действаме с второто и петото, респективно с третото и шестото уравнения на (1). Във векторен запис,

$$
\begin{aligned}
&m_S\,\ddot{x} + m_J\,\ddot{y} = 0 \qquad\qquad (\textit{закон за запазване на импулса}),\\
&m_S\,\dot{x} + m_J\,\dot{y} = c_1 = \text{константен вектор} = \textit{сумарен импулс на } S \textit{ и } J\,,\\
&m_S\,x + m_J\,y = c_1 t + c_0\,, \qquad c_0 = \text{константен вектор}\,.
\end{aligned}
$$

Център на тежестта на S *и* J наричаме вектора

$$A = \frac{m_S\,x + m_J\,y}{m_S + m_J} = \frac{c_1 t + c_0}{m_S + m_J}\,.$$

Той се движи праволинейно и равномерно в $\mathbb{R}^3$. Въвеждаме координатна система с център A и координатни оси, успоредни на осите на старата координатна система.



Ако x и y са координатите на S и J в новата координатна система, то

$$\mathrm{x} = x - \frac{c_1 t + c_0}{m_S + m_J}\,, \qquad \mathrm{y} = y - \frac{c_1 t + c_0}{m_S + m_J}\,, \qquad \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^3\,, \tag{2}$$

$$m_S\mathrm{x} + m_J\mathrm{y} = m_S x + m_J y - (m_S + m_J)\,\frac{c_1 t + c_0}{m_S + m_J} = 0\,.$$

Това ни позволява да изразим координатите на S чрез координатите на J:

$$\mathrm{x} = -\frac{m_J}{m_S}\,\mathrm{y}\,, \qquad \text{или} \qquad \mathrm{x}_i = -\frac{m_J}{m_S}\,\mathrm{y}_i\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Смяната на променливите (2) не изменя вида на диференциалните уравнения (1). Ако обаче изключим x от (1) чрез (3), то ще получим две съвпадащи групи от по три диференциални уравнения:

$$m_J\,\ddot{\mathrm{y}} = \frac{\mathcal{G}\,m_S\,m_J\left(-\frac{m_J}{m_S}\,\mathrm{y} - \mathrm{y}\right)}{\left|\frac{m_J}{m_S}\,\mathrm{y} + \mathrm{y}\right|^3} = -\frac{\mathcal{G}\,m_S^3\,m_J\,\mathrm{y}}{(m_S + m_J)^2\,|\mathrm{y}|^3}\,.$$

Системата (1) за задачата за двете тела е еквивалентна на смяната (2) плюс последното изведено уравнение, което записваме във вида

$$m\ddot{\mathrm{y}} \;=\; -\frac{\mathcal{G}\, m\, m_{\scriptscriptstyle A}\, \mathrm{y}}{|\mathrm{y}|^3}\,, \qquad m := \frac{m_{\scriptscriptstyle J}\, m_{\scriptscriptstyle S}}{m_{\scriptscriptstyle J} + m_{\scriptscriptstyle S}}\,, \qquad m_{\scriptscriptstyle A} := \frac{m_{\scriptscriptstyle S}^3}{(m_{\scriptscriptstyle S} + m_{\scriptscriptstyle J})^2}\,. \tag{4}$$

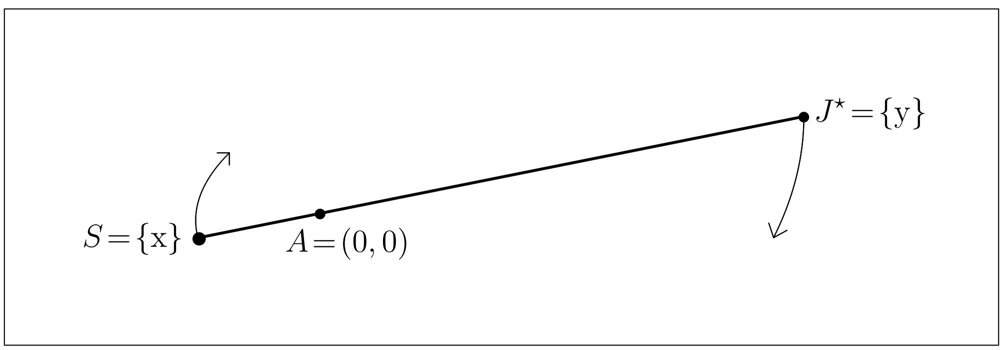
3 Задача на Кеплер

Системата от три ДУ от втори ред (4) има следната физическа интерпретация.

Задача на Кеплер. *Неподвижно тяло A с маса $m_{\scriptscriptstyle A}$ привлича тяло $J^\star$ с маса m. Да се опише движението на $J^\star$.*

И така, имаме четири тела: S с маса $m_{\scriptscriptstyle S}$, J с маса $m_{\scriptscriptstyle J}$, A с маса $m_{\scriptscriptstyle A} = \frac{m_S^3}{(m_S + m_J)^2}$ и $J^\star$ с маса $m = \frac{m_J\, m_S}{m_J + m_S}$. Във всеки един момент от времето, тези тела лежат на една права, J и $J^\star$ съвпадат като местоположение; тялото A е между S и $J \equiv J^\star$, като

$$|SA| : |AJ| \;=\; m_{\scriptscriptstyle J} : m_{\scriptscriptstyle S}\ .$$



Макар и апроксимирани с материални точки, S и J са реални небесни обекти. Телата A и $J^\star$ от задачата на Кеплер са фиктивни и силата, с която A привлича $J^\star$, също е фиктивна – макар и точно съответстваща на закона на Нютон. Както пише А. Поанкаре́ в своите „Лекции по небесна механика“, в природата фиктивни тела и фиктивни сили не съществуват; но това не бива да ни безпокои. Знаейки координатите на J, те са координати и на $J^\star$; знаейки местоположението на A и масите на телата, определяме и координатите на S. По друг начин казано, фиктивните тела от задачата на Кеплер се движат по начин, позволяващ ни без труд да възстановим движението на реалните тела от задачата за двете тела.

4 Изключване на възлите

Към системата от три ДУ от втори ред

$$m\ddot{\mathrm{y}} \;=\; -\frac{\mathcal{G}\, m\, m_{\scriptscriptstyle A}\, \mathrm{y}}{|\mathrm{y}|^3}\,, \qquad \mathrm{y} = (\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \mathrm{y}_3) \in \mathbb{R}^3$$

ще приложим процедура, наричана от астрономите *изключване на възлите*. В резултат ще докажем, че S, A и $J \equiv J^\star$ лежат в една неизменна равнина.

Нека $\times$ е векторното произведение в $\mathbb{R}^3$. От тъждеството

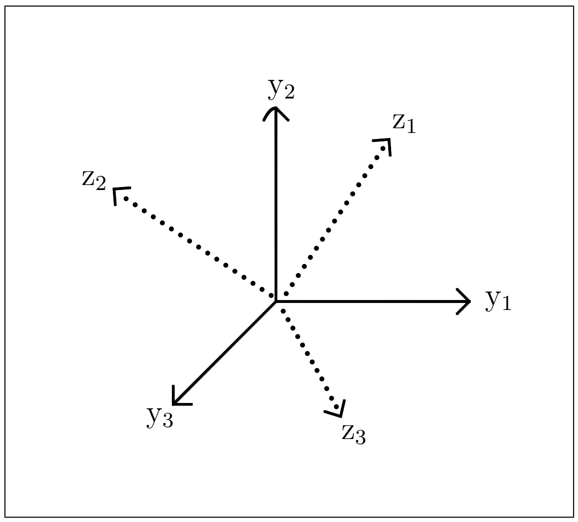
$$\frac{d}{dt}\big(\mathrm{y}\times\dot{\mathrm{y}}\big) \;=\; \dot{\mathrm{y}}\times\dot{\mathrm{y}} + \mathrm{y}\times\ddot{\mathrm{y}} \;=\; 0 \,+\, \mathrm{y}\times\Big(-\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}}{|\mathrm{y}|^3}\,\mathrm{y}\Big) \;=\; 0+0 \;=\; 0$$

следва, че

$$M \;:=\; m\,\mathrm{y}\times\dot{\mathrm{y}} \;=\; (M_1, M_2, M_3) \;=\; \text{константен вектор}\,.$$

Векторът M се нарича *момент на импулса на* $J^\star$, а векторното тъждество $\frac{d}{dt}M = 0$ – *закон за запазване на момента на импулса.*

За втори път сменяме координатната система, като завъртаме $\mathbb{R}^3$ около центъра A.



Новите координати z и старите y са свързани с ортогонално преобразование

$$\mathrm{z} \,=\, Q\,\mathrm{y} \,\in\, \mathbb{R}^3\,, \qquad Q \in SO(3,\mathbb{R}) \;\text{ е ортогонална матрица, т.е.}\quad Q^tQ = I_{3\times 3}\,. \tag{5}$$

Смяната (5) не променя вида на диференциалните уравнения (4):

$$m\ddot{\mathrm{z}} \,=\, m\,Q\,\ddot{\mathrm{y}} \,=\, Q\,\frac{-\mathcal{G}\,m\,m_{A}\,\mathrm{y}}{|\mathrm{y}|^3} \,=\, -\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}Q\,\mathrm{y}}{\langle Q^{-1}\mathrm{z}, Q^{-1}\mathrm{z}\rangle^{\frac{3}{2}}} \,=\, -\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}\,\mathrm{z}}{\langle \mathrm{z},\mathrm{z}\rangle^{\frac{3}{2}}} \,=\, -\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}\,\mathrm{z}}{|\mathrm{z}|^3}\,,$$

$\langle\;,\;\rangle$ е евклидовото скаларно произведение в $\mathbb{R}^3$.

Избираме ортогоналната матрица Q така, че моментът на импулса M да е колинеарен с оста $A\mathrm{z}_3$. Това винаги е възможно и е еднозначно с точност до завъртане около оста $A\mathrm{z}_3$. В новата координатна система,

$$M \,=\, (0,0,|M|) \,=\, m\mathrm{z}\times\dot{\mathrm{z}} \;\perp\; \mathrm{z} \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{z}_3 = 0\,.$$

Доказахме следния основен факт:

Теорема. *Четирите тела S, $J \equiv J^\star$ и A се движат в неизменната равнина $\mathrm{z}_3 = 0$ и уравненията на движение са*:

$$m\ddot{\mathrm{z}}_1 \;=\; -\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}\,\mathrm{z}_1}{(\mathrm{z}_1^2+\mathrm{z}_2^2)^{\frac{3}{2}}}\;, \qquad m\ddot{\mathrm{z}}_2 \;=\; -\frac{\mathcal{G}\,m\,m_{A}\,\mathrm{z}_2}{(\mathrm{z}_1^2+\mathrm{z}_2^2)^{\frac{3}{2}}}\;, \qquad \mathrm{z}_3 \;=\; 0\;.$$

5 Втори закон на Кеплер

За току-що изведените диференциални уравнения

$$\ddot{\mathrm{z}}_1 \;=\; -\frac{\gamma\,\mathrm{z}_1}{(\mathrm{z}_1^2+\mathrm{z}_2^2)^{\frac{3}{2}}}\;, \qquad \ddot{\mathrm{z}}_2 \;=\; -\frac{\gamma\,\mathrm{z}_2}{(\mathrm{z}_1^2+\mathrm{z}_2^2)^{\frac{3}{2}}}\;, \qquad\qquad \gamma \;:=\; \mathcal{G}\,m_{\scriptscriptstyle A}\;, \tag{6}$$

е естествено да въведем полярни координати

$$\mathrm{z}_1 = r\,\cos\varphi\,, \quad \mathrm{z}_2 = r\,\sin\varphi\,, \qquad\qquad r = r(t)\,,\ \varphi = \varphi(t)\,.$$

Заместено в по-горните ДУ,

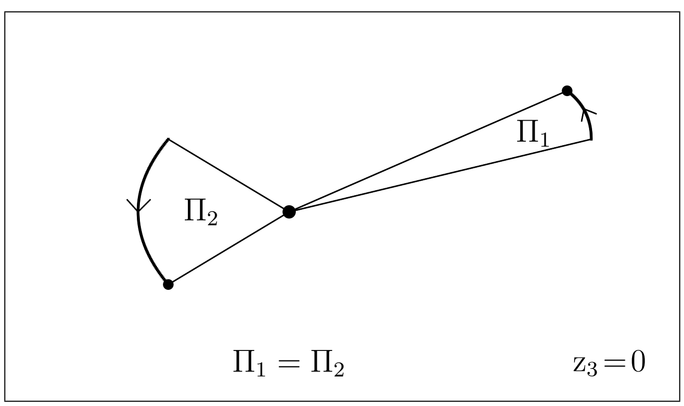
$$\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{z}}_1 \;&=\; \ddot{r}\,\cos\varphi - 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi - r\,\dot{\varphi}^2\,\cos\varphi - r\,\ddot{\varphi}\,\sin\varphi \;=\; -\frac{\gamma\,r\,\cos\varphi}{r^3}\;,\\
\ddot{\mathrm{z}}_2 \;&=\; \ddot{r}\,\sin\varphi + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\cos\varphi \;=\; -\frac{\gamma\,r\,\sin\varphi}{r^3}\;.
\end{aligned}$$

Преобразуваме получените две тъждества:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{z}}_1\,\cos\varphi + \ddot{\mathrm{z}}_2\,\sin\varphi \;&=\; \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2 \;=\; -\frac{\gamma}{r^2}\;, \qquad (7)\\
\ddot{\mathrm{z}}_2\,\cos\varphi - \ddot{\mathrm{z}}_1\,\sin\varphi \;&=\; 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi} \;=\; 0\;,\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{r^2\varphi}{2}\Big) \;&=\; \dot{r}\,\dot{\varphi} + \frac{r^2\varphi}{2} \;=\; \frac{r}{2}\cdot\big(2\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + r\,\ddot{\varphi}\big) \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

С последното равенство доказахме следната теорема.

Втори закон на Кеплер. *Площната скорост* $\dfrac{r^2\dot{\varphi}}{2}$ *е константа.*



При това,

$$\begin{aligned}
(m\mathrm{z}\times\dot{\mathrm{z}})_{3^{\text{та}}\ \text{координата}} \;&=\; m.(\mathrm{z}_1\dot{\mathrm{z}}_2 - \mathrm{z}_2\dot{\mathrm{z}}_1)\\
&=\; m.\big[\,r\,\cos\varphi\,(\dot{r}\,\sin\varphi + r\dot{\varphi}\,\cos\varphi) - r\,\sin\varphi\,(\dot{r}\,\cos\varphi - r\dot{\varphi}\,\sin\varphi)\,\big]\\
&=\; m\,r^2\dot{\varphi}\;,
\end{aligned}$$

което ни определя скоростта на изменение на φ:

$$\dot{\varphi} \;=\; \frac{|M|}{m\,r^2}\;. \tag{8}$$

6 Първи закон на Кеплер

Уравненията (6) са еквивалентни на (7)+(8). Използвайки (8), преработваме (7):

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= -\frac{\gamma}{r^2} \,, \\
m\dot{r}\ddot{r} - m\dot{r}r\Big(\frac{|M|}{mr^2}\Big)^2 &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\gamma m}{r}\Big) \,, \\
\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\gamma m}{r} &= E = \text{константа} \,, \qquad (9) \\
\dot{r} &= \sqrt{\frac{2}{m}\Big(E + \frac{m\gamma}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\Big)} = \frac{dr}{dt} \,.
\end{aligned}
$$

Константата E наричаме *пълна енергия*, $\dfrac{m\dot{r}^2}{2}$ – *кинетичната енергия*, $\dfrac{|M|^2}{2mr^2}$ наричаме *центробежна енергия*, $-m\gamma/r$ – *потенциална енергия*, а самото уравнение (9) се нарича *закон за запазване на енергията.*

Използваме последното уравнение, за да пресметнем

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \int \dot{\varphi}\, dt = \int \frac{|M|}{mr^2}\, dt = \frac{|M|}{m} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}\Big(E + \frac{m\gamma}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}\Big)}} \\
&= \int \frac{-dr^{-1}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{2m^2\gamma}{M^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \int \frac{-d\Big(\frac{1}{r} - \frac{m^2\gamma}{M^2}\Big)}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^4\gamma^2}{M^4} - \Big(\frac{1}{r} - \frac{m^2\gamma}{M^2}\Big)^2}} \\
&= \arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{m^2\gamma}{M^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{M^2} + \frac{m^4\gamma^2}{M^4}}} + \varphi_0 = \arccos \frac{\frac{M^2}{m^2\gamma}\cdot\frac{1}{r} - 1}{\sqrt{\frac{2EM^2}{m^3\gamma^2} + 1}} + \varphi_0 \\
&= \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon} + \varphi_0 \,,
\end{aligned}
$$

като φ_0 е константа на интегриране и сме положили

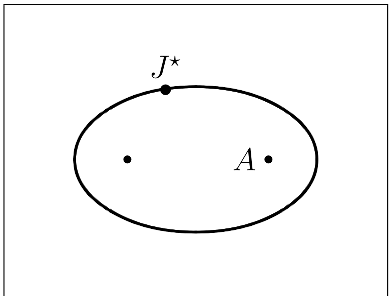
$$
p := \frac{M^2}{m^2\gamma} = \textit{параметър}\,, \qquad \varepsilon := \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m^3\gamma^2}} = \textit{ексцентрицитет}\,.
$$

Горната дълга поредица от равенства извежда следния закон.

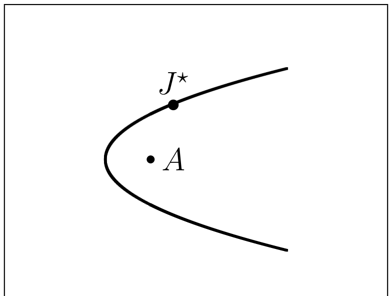
Първи закон на Кеплер. *Траекторията на* $J^\star$

$$
r = \frac{p}{1 + \varepsilon\, \cos(\varphi - \varphi_0)} \qquad (10)
$$

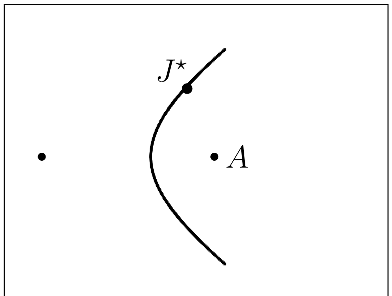
е конично сечение: елипса, парабола или хипербола.



Елипса: $0 \le \varepsilon < 1,\ E < 0$



Парабола: $\varepsilon = 1,\ E = 0$



Хипербола: $\varepsilon > 1,\ E > 0$

Забележка. По първо приближение, всяка една от планетите от Слънчевата система се движи по елипса със съответни ексцентрицитети:

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_{\text{Меркурий}} = 0,205.., & \varepsilon_{\text{Венера}} = 0,006.., & \varepsilon_{\text{Земята}} = 0,017.., \\
\varepsilon_{\text{Марс}} = 0,093.., & \varepsilon_{\text{Юпитер}} = 0,048.., & \varepsilon_{\text{Сатурн}} = 0,056.., \\
\varepsilon_{\text{Уран}} = 0,046.., & \varepsilon_{\text{Нептун}} = 0,009.., & \varepsilon_{\text{Плутон}} = 0,249...
\end{array}$$

Оказва се също така, че движението на деветте планети и Слънцето става приблизително в една и съща равнина, а посоките на въртене на планетите около Слънцето съвпадат. Тези факти по никакъв начин не следват от законите на Кеплер и тепърва ще трябва да бъдат обяснени.

7 Трети закон на Кеплер

Орбитата на $J^\star$ е ограничена единствено в елиптичния случай $0 \le \varepsilon < 1$. Диференциалното уравнение $\dot{\varphi} = \frac{|M|}{mr^2}$ е автономно и следователно в елиптичния случай движението на $J^\star$ е периодично с период T. Ще пресметнем T, като отначало ще припомним необходимите ни геометрични формули и факти за елипсата с фокално уравнение

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)} = \frac{a\,(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos v}$$

където $v := \varphi - \varphi_0$ и съответно:

$$\min|AJ^\star| = \min r(v) = \frac{p}{1+\varepsilon} = \textit{перихелий}\ ,$$

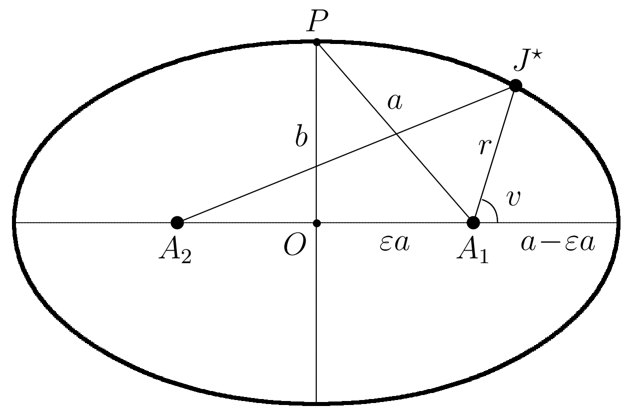
$$\max|AJ^\star| = \max r(v) = \frac{p}{1-\varepsilon} = \textit{апохелий}\ ,$$

$$a := \frac{\max r + \min r}{2} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{M^2}{m^2\gamma}\cdot\frac{m^3\gamma^2}{2|E|M^2} = \frac{m\,\gamma}{2\,|E|} = \left\{\begin{array}{c}\text{дължина на}\\ \text{голямата полуос}\end{array}\right\},$$

$$b := a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{m\gamma}{2|E|}\cdot\sqrt{\frac{2|E|M^2}{m^3\gamma^2}} = \frac{|M|}{2m|E|} = \left\{\begin{array}{c}\text{дължина на}\\ \text{малката полуос}\end{array}\right\},$$

$$|OA| \;=\; \frac{\max r - \min r}{2} \;=\; \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2} \;=\; \varepsilon a \;=\; \left\{ \begin{array}{l} \text{разстояние от центъра } O \\ \text{до фокуса } A \text{ на елипсата} \end{array} \right\},$$

$$\varepsilon \;=\; \frac{\max r - \min r}{\max r + \min r} \;=\; \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\,.$$



$$|A_1J^\star| = r,\; |A_2J^\star| = 2a-r,\; |OA_1| = \varepsilon a,\; |A_1P| = a\,.$$

Можем да дефинираме елипсата като ГМТ J такива, че $|JA_1|+|JA_2| = 2a$, където A_1 и A_2 са две произволни точки от равнината, наричащи се *фокуси* на елипсата. В задачата на Кеплер, фиктивното тяло A съвпада с единия от фокусите, а тялото $J^\star$ се движи по елипсата.

Накрая пресмятаме периода на планетата J:

$$\begin{aligned} T \;&=\; \frac{\text{площта на елипсата}}{\text{площната скорост}} \;=\; \frac{\pi\, a\, b}{\frac{1}{2}\, r^2 \dot{\varphi}} \;=\; 2\,\pi\, a\, \frac{|M|}{\sqrt{2m|E|}} \cdot \frac{m}{|M|} \\ &=\; 2\,\pi\, a \sqrt{\frac{m}{2\,|E|}} \;=\; 2\,\pi\, a \sqrt{\frac{a}{\gamma}} \;=\; \frac{2\,\pi}{\sqrt{\gamma}}\, a^{\frac{3}{2}} \;=\; \frac{2\,\pi\,(m_S+m_J)}{\sqrt{\mathcal{G}}} \Big(\frac{a}{m_S}\Big)^{\frac{3}{2}}\,. \end{aligned}$$

Трети закон на Кеплер. *Квадратът T^2 на времето за обиколка на планетата $J \equiv J^\star$ по елипсата ѝ (годината на J, както и на S) е пропорционално на куба на голямата полуос a. В частност, T зависи от енергията E, но не зависи от площната скорост.*

8 Аномалии

Съгласно първият закон на Кеплер, траекторията на $J^\star$ е конично сечение с три варианта – елипса, парабола или хипербола. Скоростта на движение на $J^\star$ по съответното конично сечение се определя от втория закон на Кеплер. С оглед на бъдещото интегриране на уравненията на движение (6), чрез три различни ъгъла, наречени *аномалии*, ще параметризираме по три различни начина

$$\text{елипсата} \qquad \left(\frac{z_1}{a}+\varepsilon\right)^2+\left(\frac{z_2}{b}\right)^2=1\,, \qquad \varepsilon^2=1-\frac{b^2}{a^2}\,,$$

$$\text{параболата} \qquad 2\,p\,z_1+z_2^2=p^2\,,$$

$$\text{хиперболата} \qquad \left(\frac{z_1}{a}+\varepsilon\right)^2-\left(\frac{z_2}{b}\right)^2=1\,, \qquad \varepsilon^2=1+\frac{b^2}{a^2}\,.$$

Това са *истинската аномалия* v, вече въведена с полярната смяна, *ексцентричната аномалия* u, виж рисунката и таблицата по–долу, и *средната аномалия* l, която е линейна функция на времето t. В елиптичния случай, средната аномалия l дефинираме посредством втория закон на Кеплер, след интегриране по t:

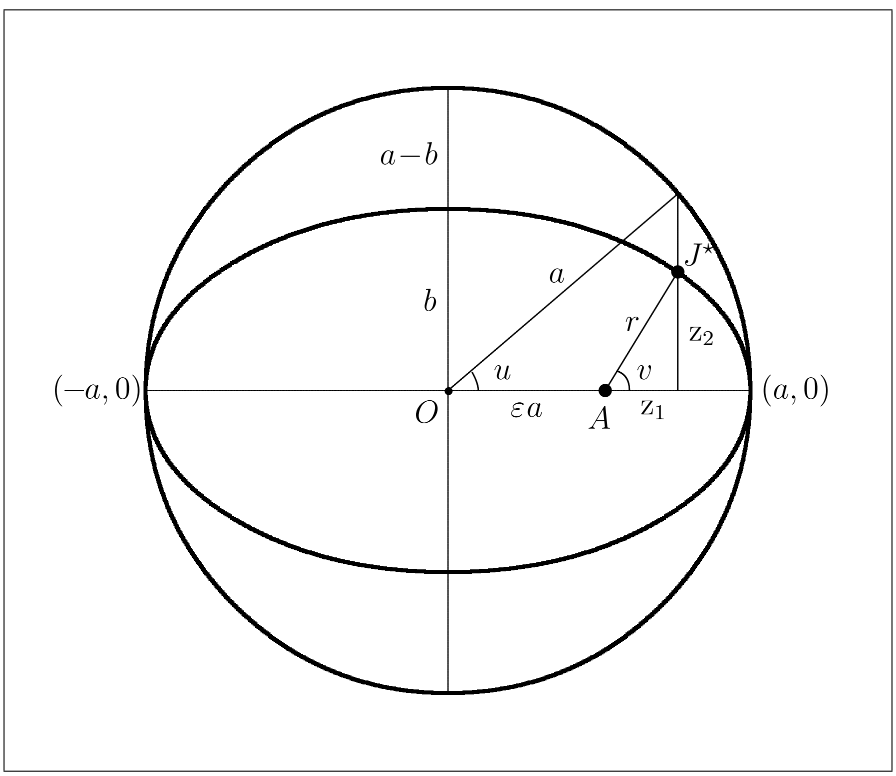
$$\frac{|M|}{mr^2}\;=\;\dot{\varphi}\;=\;\dot{v}\;=\;\frac{d}{dt}\arctan\frac{z_2}{z_1}\;=\;\frac{\dot{z}_2\,z_1-z_2\,\dot{z}_1}{z_1^2+z_2^2}\;=\;\frac{\dot{z}_2\,z_1-z_2\,\dot{z}_1}{r^2}\,,$$

$$\frac{|M|}{m}\;=\;\dot{z}_2\,z_1-z_2\,\dot{z}_1\;=\;b\,\dot{u}\,(\cos u)\,a\,(\cos u-\varepsilon)+b\left(\sin^2 u\right)a\,\dot{u}\;=\;a\,b\,\dot{u}\,(1-\varepsilon\,\cos u)\,,$$

$$(1-\varepsilon\,\cos u)\,du\;=\;\frac{|M|}{mab}\,dt\;=\;\frac{2\,\pi}{T}\,dt\;=\;\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}\,dt\,,$$

$$u-\varepsilon\,\sin u\;=\;\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}\,(t-t_0)\;=\;n\,(t-t_0)\;:=\;l\,, \qquad n:=\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{\mathcal{G}m_A}\,a^{-\frac{3}{2}}.$$

Величината n наричаме *средно движение*; t_0 е *момента на преминаване през перихелия.* Връзката между средната и ексцентрична аномалии $l=u-\varepsilon\,\sin u$ наричаме *уравнение на Кеплер.*



По аналогичен начин пресмятаме средните аномалии в параболичния и в хиперболичния случаи. В следващата таблица са зададени съотношенията между декартовите координати $(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2)$ и трите вида аномалии, при това в трите варианта – на елиптично, параболично или хиперболично движение. Връзката на $\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2$ със средната аномалия l ще получим в параграф (10).

	истинска аномалия v	ексцентрична аномалия u	средна аномалия l или t
$\mathrm{z}_1 =$	$r\,\cos v$	$\begin{cases} a\,(\cos u - \varepsilon) \\ \frac{1}{2}\,(p - u^2) \\ a\,(\operatorname{ch} u - \varepsilon) \end{cases}$	$-\dfrac{3\varepsilon}{2}\,a \,+\, 2a\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_k'(k\varepsilon)}{k}\,\cos kl$
$\mathrm{z}_2 =$	$r\,\sin v$	$\begin{cases} b\,\sin u \\ \sqrt{p}\,u \\ b\operatorname{sh} u \end{cases}$	$2\,b\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_k(k\varepsilon)}{k\varepsilon}\,\sin kl$
u	$\tan\dfrac{v}{2} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\,\tan\dfrac{u}{2} \\ \dfrac{u}{\sqrt{p}} \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\operatorname{th}\dfrac{u}{2} \end{cases}$	$\square$	$\cos u = -\dfrac{\varepsilon}{2} + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_k'(k\varepsilon)}{k}\,\cos kl$ $\sin u = 2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_k(k\varepsilon)}{k\varepsilon}\,\sin kl$ $u \,=\, l + 2\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{J_k(k\varepsilon)}{k}\,\sin kl$
$l =$	—	$\begin{cases} u - \varepsilon\,\sin u \\ u + \frac{u^3}{3p} \\ u - \varepsilon\operatorname{sh} u \end{cases}$	$n\,(t - t_0) = \begin{cases} \sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}(t - t_0) \\ \sqrt{\gamma}\,\frac{2}{p}\,(t - t_0) \\ -\sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}(t - t_0) \end{cases}$

9 Функции на Бесел

Нека $i = \sqrt{-1}$ е имагинерната единица. Комплекснозначната функция $\mathrm{e}^{i\,w\sin u}$, $w \in \mathbb{C}$, е 2π–периодична по u и следователно може да бъде разложена в ред на Фурие:

$$\mathrm{e}^{i\,w\sin u} \;:=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(w)\,\mathrm{e}^{iku}\,, \qquad J_k(w) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\,w\sin u\,-\,iku}du\,.$$

Коефициентите $J_k(w)$ на този ред на Фурие зависят от w и се наричат *функции на Бесел.* Те са изведени от Лагранж именно във връзка с уравненията на Кеплер. Ще ги пресметнем в явен вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{i\,w\sin u} \;&=\; \mathrm{e}^{w\left[\dfrac{\cos u + i\sin u}{2} + \dfrac{\cos u - i\sin u}{2}\right]} \;=\; \mathrm{e}^{w\left[\dfrac{\mathrm{e}^{iu}}{2} - \dfrac{\mathrm{e}^{-iu}}{2}\right]} \;=\; \mathrm{e}^{\frac{w}{2}\mathrm{e}^{iu}}.\,\mathrm{e}^{-\frac{w}{2}\mathrm{e}^{-iu}} \\ &=\; \sum_{\alpha=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!}\left(\frac{w}{2}\,\mathrm{e}^{iu}\right)^{\alpha}.\sum_{\beta=0}^{\infty}\frac{1}{\beta!}\left(-\,\frac{w}{2}\,\mathrm{e}^{-iu}\right)^{\beta} \;=\; \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\beta}}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha+\beta}\mathrm{e}^{iu(\alpha-\beta)}\,.\end{aligned}$$

За всяко $k \geq 0$, сравняваме коефициентите пред e^{iku} от последния степенен ред с дефиницията на $J_k(w)$:

$$J_k(w) \;=\; \sum_{\substack{\alpha,\beta=0\\ \alpha-\beta=k}}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{w}{2}\right)^{\alpha+\beta} \;=\; \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta}{\beta!\,(\beta+k)!}\left(\frac{w}{2}\right)^{\beta+2k}.$$

От тъждеството $\exp(i\,w\,\sin u) \equiv \exp i(-w)(-\sin u)$, след приравняване на коефициентите пред $\exp(iku)$ в съответните редове на Фурие получаваме, че $J_k(w) \equiv J_{-k}(-w)$. Но при k четно, $J_k(w)$ съдържа само четни степени на w, а при k нечетно, $J_k(w)$ съдържа само нечетни степени на w; следователно

$$J_{-k}(w) \;=\; (-1)^k J_k(w) \;=\; J_k(-w) \;=\; \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{1}{\beta!\,(\beta-k)!}\left(\frac{w}{2}\right)^{\beta-2k} \qquad \forall\, k<0\,, \quad \forall\, w \in \mathbb{C}\,.$$

По критерия на Даламбер, редът на $J_k(w)$ по w е абсолютно сходящ и $J_k(w)$ е цяла функция на w. Всъщност, самата функция $\exp(i\,w\,\sin u)$ е цяла и следователно можем формално да диференцираме и интегрираме почленно реда ѝ на Фурие. Така например, със сравняване на съответните коефициенти на Фурие доказваме тъждествата

$$w\,J_{k-1} + w\,J_{k+1} \;=\; 2\,k\,J_k\,, \qquad\qquad J_k := J_k(w)\,, \tag{11}$$

$$2\,J_k^{'} \;=\; J_{k-1} + J_{k+1}\,, \qquad\qquad J_k^{'} := \frac{dJ_k(w)}{dw}\,. \tag{12}$$

Тях ще използваме в следващия параграф.

10 Елиптично движение

Елиптичното движение на $J^\star = (\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, 0)$ се задава с уравненията

$$\mathrm{z}_1 = a\,(\cos u - \varepsilon)\,, \qquad \mathrm{z}_2 = b\;\sin u\,, \qquad l = u - \varepsilon\,\sin u = \sqrt{\gamma}\,a^{-\frac{3}{2}}\,(t - t_0)\,.$$

Целта ни е да пресметнем z_1 и z_2 като функции на времето t, значи трябва да пресметнем

$$\cos u = \frac{\mathrm{e}^{iu} + \mathrm{e}^{-iu}}{2}\,, \qquad \sin u = \frac{\mathrm{e}^{iu} - \mathrm{e}^{-iu}}{2i}\,, \qquad \text{т.е.} \quad \mathrm{e}^{iu}\,,\ \mathrm{e}^{-iu}$$

като функции на средната аномалия l.

Ако в уравнението на Кеплер $l = u - \varepsilon\,\sin u$ към u прибавим 2π, то към l се прибавя 2π и $\mathrm{e}^{2\pi kl}$ не се изменя за $k \in \mathbb{Z}$. Следователно, за $s = \pm 1$, можем да разложим e^{isu} в ред на Фурие по l:

$$\mathrm{e}^{isu} \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{ikl}\,, \qquad c_k \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{isu\,-\,ikl}dl\,.$$

Чрез елементарно интегриране пресмятаме c_0:

$$2\pi c_0 \;=\; \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{isu} dl \;=\; \int_{u=0}^{u=2\pi} \mathrm{e}^{isu} d(u - \varepsilon\,\sin u) \;=\; \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{isu}(1 - \varepsilon\,\cos u)\,du$$

$$=\; \int_0^{2\pi} (\cos u + i\,\sin u)(1 - \varepsilon\,\cos u)\,du \;=\; -\int_0^{2\pi} \varepsilon\,\cos^2 u\,du \;=\; -\varepsilon\,\pi\,.$$

С едно интегриране по части пресмятаме и останалите коефициенти на Фурие c_k:

$$
\begin{aligned}
2\pi c_k &= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{e}^{isu - ikl} dl \;=\; \int\limits_{l=0}^{l=2\pi} \mathrm{e}^{isu} d\frac{\mathrm{e}^{-ikl}}{-ik} \;=\; \frac{i}{k}\left[\mathrm{e}^{isu - ikl}\Big|_{l=0}^{l=2\pi} - \int\limits_{l=0}^{l=2\pi} \mathrm{e}^{-ikl} d\mathrm{e}^{isu} \right] \\
&= \frac{s}{k}\left[0 - is \int\limits_{u=0}^{u=2\pi} \mathrm{e}^{i(s-k)u + ik\varepsilon \sin u} du \right] = \frac{2\pi s}{k}\, J_{k-s}(k\,\varepsilon) \ ,
\end{aligned}
$$

съгласно дефиницията на функции на Бесел. Оттук изразяваме $\cos u$ и $\sin u$ чрез l:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\pm iu} &= -\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{J_{k\mp 1}(k\varepsilon)\,\mathrm{e}^{ikl}}{k} \ , \\
\cos u &= -\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{J_{k-1}(k\varepsilon) - J_{k+1}(k\varepsilon)}{2k}\,\mathrm{e}^{ikl} \overset{(12)}{=} -\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{J_k'(k\varepsilon)}{k}\,\mathrm{e}^{ikl} \\
&= -\frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k'(k\varepsilon)}{k} \cos kl \ , \\
\sin u &= \sum_{k\neq 0} \frac{J_{k-1}(k\varepsilon) + J_{k+1}(k\varepsilon)}{2ik}\,\mathrm{e}^{ikl} \overset{(11)}{=} \sum_{k\neq 0} \frac{J_k(k\varepsilon)}{ik\varepsilon}\,\mathrm{e}^{ikl} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(k\varepsilon)}{k\varepsilon} \sin kl \ .
\end{aligned}
$$

Решението на задачата на Кеплер в декартови координати е:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}_1 &= a\left[-\frac{3\varepsilon}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k'(k\varepsilon)}{k} \cos kl \right] , \\
\mathrm{z}_2 &= 2\,a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(k\varepsilon)}{k\varepsilon} \sin kl \ , \\
l &= \sqrt{\mathcal{G} m_{A}}\; a^{-\frac{3}{2}}\,(t - t_0)\,, \qquad m_{A} = \frac{m_{S}^3}{(m_{S} + m_{J})^2}\,.
\end{aligned}
$$