Теорема на Лаплас за устойчивост на Слънчевата система

Основната теорема в небесната механика е формулирана и доказана за първи път от Лаплас. Тя гласи следното:

Ако игнорираме пертурбациите от трети и по-висок ред относно ексцентрицитетите e_k *и наклоненостите* i_k *на планетите, то Слънчевата система е устойчива в смисъл, че оскулиращите елипси, по които се движат планетите и Слънцето имат константни големи полуоси* a_k*, а ексцентрицитетите* e_k *и наклоненостите* i_k *осцилират в малки интервали. При това не са възможни нито сблъсъци между планетите, нито някоя от тях да напусне пределите на Слънчевата система.*

Горните твърдения важат и за всяка планетна система, подобна на Слънчевата, а именно:

1) *всички планети се въртят около Слънцето в една и съща посока,*

2) *стойността на ексцентрицитетите и наклоненостите* (*в даден момент* $t = t_0$) *са достатъчно малки.*

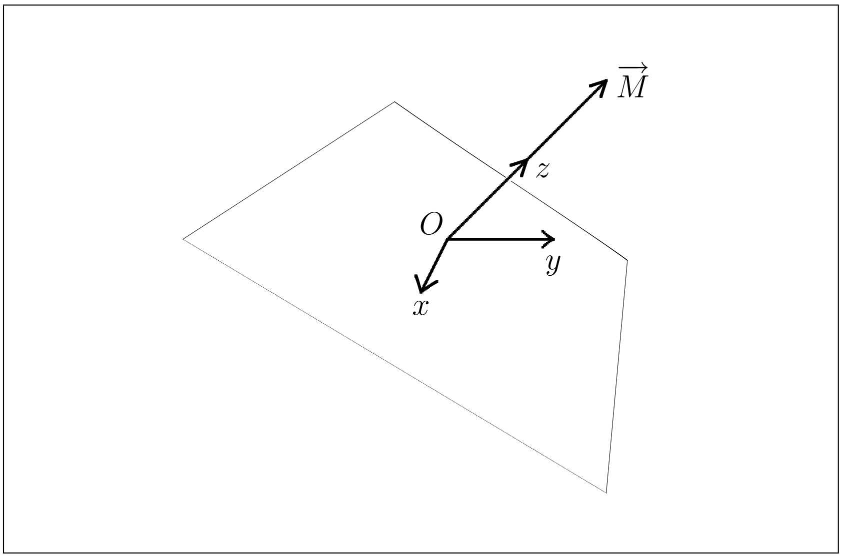
Доказателство. Нека $r_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ е положението на k-тата планета, $k = 0, ..., 8$. Ще използваме интеграла на сумарния момент на импулса на Слънчевата система: векторът на момента на импулса

$$\overrightarrow{M} \ := \ \sum_{k=0}^{8} m_k \, r_k \times \dot{r}_k \ = \ (M_1, M_2, M_3) \ = \ constant \, ,$$

защото

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overrightarrow{M} \ &= \ \sum_{k=0}^{8} m_k \, \dot{r}_k \times \dot{r}_k + \sum_{k=0}^{8} r_k \times \ m_k \, \ddot{r}_k \\
&= \ \sum_{k=0}^{8} r_k \times \sum_{j \neq k} \frac{G \, m_j \, m_k \, (r_j - r_k)}{|\, r_j - r_k \,|^3} \\
&= \ \sum_{0 \leq k < j \leq 8} G \, m_k \, m_j \, \frac{(r_k \times r_j + r_j \times r_k)}{|\, r_k - r_j \,|^3} \\
&= \ (0, 0, 0) \, .
\end{aligned}$$

Избираме координатната система $Oxyz$ така, че оста Oz да е колинеарна с вектора $\overrightarrow{M}$. Равнината $Oxy \perp \overrightarrow{M}$ е неизменна, защото $\overrightarrow{M} = (0, 0, |\overrightarrow{M}|)$ с константен вектор. Oxy се нарича още равнина на Лаплас.



В новите координати,

$$\sum_{k=0}^{8} m_k \, r_k \times \dot{r}_k \;\; = \;\; \big(0, 0, |M|\big).$$

За третата компонента на това тъждество имаме

$$|M| \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{8} m_k \, (x_k \, \dot{y}_k - \dot{x}_k \, y_k) \; = \; \sum_{k=0}^{8} G_k \, \cos i_k \; = \; \sum_{k=0}^{8} L_k \sqrt{1 - e_k^2} \, \cos i_k \, ,$$

като съществено използваме, че всички планети и Слънцето се въртят около центъра на тежестта в посока, обратна на часовниковата, т.е. $y_k \, \dot{z}_k - \dot{y}_k \, z_k > 0$.

От друга страна, след усредняването по бързите променливи $l_1, ..., l_8$ доказахме, че елементите на Делоне L_k са константи. Следователно,

$$\sum_{k=0}^{8} L_k \;\; = \;\; C_1 \; = \; constant,$$

откъдето получаваме, че

$$C_1 - |M| \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{8} L_k \Big(1 - \sqrt{1 - e_k^2} \cos i_k\Big) \;\; = \;\; \sum_{k=0}^{8} L_k \, \frac{e_k^2 \cos^2 i_k + \sin^2 i_k}{1 + \sqrt{1 - e_k^2} \, \cos i_k} \, .$$

Константата $C_1 - |M|$ е малка и положителна като сума на 9 положителни малки функции. В сила е оценката

$$e_k^2 \cos^2 i_k + \sin^2 i_k \;\; \leq \;\; \frac{2(C_1 - |M|)}{L_k} \; ,$$

откъдето

$$e_k \;\; \leq \;\; \sqrt{\frac{2\big(C_1 - |M|\big)}{L_k}} \, , \qquad | \sin i_k| \leq \sqrt{\frac{2\big(C_1 - |M|\big)}{L_k}} \; .$$

Последните три оценки могат да бъдат подобрени, като умножим десните им части по по-малкия от едно множител $1 - \frac{C_1 - |M|}{2L_k}$.

Тези неравенства доказват, че e_k и $\sin i_k$ остават малки, при това от първоначалния порядък на най-големите измежду e_k и $\sin i_k$.

Теоремата на Лаплас е доказана.

Забележка. Ексцентрицитетът и наклонът на планетите в Слънчевата система са малки при положение, че изменението на a е малко. Направеният извод има изключения тогава, когато или na^2 е малко, тоест за планетите, които са близко разположени до Слънцето, или при сравнително малко μ. Да напомним, че $L = \mu n a^2$, където n е средното движение на планетата.

От конкретните параметри за малките планети, не следва верността на изложеното доказателството за устойчивост, т. е. по принцип техните наклони и ексцентрицитети могат да приемат големи стойности.

Емилия Колева, emilia_f@abv.bg
Петя Вълчанова, petjavalchanova@yahoo.com