Секулярни петурбации на ексцентрицитетите и дължините на перихелиите

В предишната тема „Секулярни пертурбации на планетите от слънчевата система“, след усредняване по бързите променливи - средните аномалии l_0,...,l_8, полагането

$$\gamma_k \;=\; \frac{1}{m_k^2}$$

и игнорирането на пертурбациите от трета и по-голяма степен, получихме следното усредняване на хамилтониана:

$$\langle H\rangle^l \approx \sum_{s\,=\,0}^{8} \frac{1}{2m_s(L_s)^2} -$$

$$-\sum_{0\le s\le j\le 8} \frac{\mathcal{G}m_s m_j}{L_s L_j}\Big[A_0\big(a_s,a_j\big) + \frac{B_1\big(a_s,a_j\big)}{4}\big(\epsilon_s^2+\epsilon_j^2-i_s^2-i_j^2+2i_s i_j\cos(\theta_s-\theta_j)\big)-$$

$$-\epsilon_s\epsilon_j\frac{B_2\big(a_s,a_j\big)}{2}\cos(\theta_s+g_s-\theta_j-g_j)\Big]$$

$\langle H\rangle$ без главната част $\displaystyle\sum_{s=0}^{8}\frac{1}{2m_s(L_s)^2}$ е пертурбацията дължаща се на s-тата и j-тата планета, където

$$A_0 \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\left(\sqrt{\dfrac{a_j}{a_s}+\dfrac{a_s}{a_j}-2\cos\varphi}\right)^3}$$

$$B_k \;:=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(k\varphi)d\varphi}{\left(\sqrt{\dfrac{a_j}{a_s}+\dfrac{a_s}{a_j}-2\cos\varphi}\right)^3} \qquad ,k=1,2.$$

Ще използваме променливите на Поанкаре

$$\left|\begin{array}{l}\xi_s \approx \sqrt{L_s}\cos(g_s+\theta_s)\epsilon_s\\[2ex] \eta_s \approx -\sqrt{L_s}\sin(g_s+\theta_s)\epsilon_s\end{array}\right. .$$

обличните променливи

$$\left| \begin{array}{l} p_s \approx \sqrt{L_s}\cos(\theta_s) i_s \\ \\ q_s \approx -\sqrt{L_s}\sin(\theta_s) i_s \end{array} \right.$$

и тригонометричната формула

$$\cos(\theta_s - \theta_j) \quad = \quad cos\theta_s \cos\theta_j + \sin\theta_s \sin\theta_j \ .$$

Така получаваме следните връзки:

$$\frac{\xi_s^2 + \eta_s^2}{L_s} = \epsilon_s^2\,, \tag{1}$$

$$\frac{p_s^2 + q_s^2}{L_s} = i_s^2\,, \tag{2}$$

$$2 i_s i_j \cos(\theta_s - \theta_j) = \frac{(p_s p_j + q_j q_s)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \cos((\theta_s + g_s) - (\theta_j + g_j)) &= \cos(\theta_s + g_s)\cos(\theta_j + g_j) + \sin(\theta_s + g_s)\sin(\theta_j + g_j) \\ &= \frac{\xi_s \xi_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}\epsilon_s\epsilon_j} + \frac{\eta_s \eta_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}\epsilon_s\epsilon_j} \quad . \end{aligned} \tag{4}$$

Ще проверим равенството (3):

$$\begin{aligned} 2 i_s i_j \cos(\theta_s - \theta_j) &= \frac{2 p_s p_j \cos(\theta_s - \theta_j)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}\cos\theta_s\cos\theta_j} \\ &= \frac{2 p_s p_j (\cos\theta_s\cos\theta_j + \sin\theta_s\sin\theta_j)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}\cos\theta_s\cos\theta_j} \\ &= \frac{2 p_s p_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}} + \frac{2 p_s p_j \sin\theta_s \sin\theta_j}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}\cos\theta_s\cos\theta_j} \\ &= \frac{2(p_s p_j + q_s q_j)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\,, \end{aligned}$$

където $\dfrac{q_k}{p_k} = \dfrac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k}$ за к $\in \{j, s\}$. Чрез (1), (2), (3) и (4) получаваме усреднения по средната аномалия l хамилтониан:

$$\langle H \rangle^l \approx \sum_{s=0}^{8} \frac{1}{2 m_s L_s^2} - \sum_{0 \le j \le s \le 8} \frac{\mathcal{G} m_s m_j}{L_s L_j}\Big[A_0(a_s, a_j) +$$

$$+ \frac{B_1(a_s, a_j)}{4}\Big(\frac{\xi_s^2 + \eta_s^2}{L_s} + \frac{\xi_j^2 + \eta_j^2}{L_j} - \frac{p_s^2 + q_s^2}{L_s} - \frac{p_j^2 + q_j^2}{L_j} + \frac{2(p_s p_j + q_s q_j)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}} \Big) -$$

$$-\frac{B_2(a_s,a_j)}{2}\frac{(\xi_s\xi_j+\eta_s\eta_j)}{\sqrt{L_s}\sqrt{L_j}}\Big] \qquad .$$

Нека положим $\lambda = l + g + \theta$. Тогава $d\lambda = d(l + g + \theta)$ и тъй като дължината на перихелия $g + \theta \approx const$, то $d\lambda \approx dl$. Знаем, че

$$\langle\dot{L_s}\rangle = \frac{\partial\langle H\rangle^{\lambda}}{\partial\lambda_s} \approx \frac{\partial\langle H\rangle^{l}}{\partial l_s} = 0 \qquad ,$$

тъй като $\langle H\rangle^l$ не зависи от l и следователно $\langle L_s\rangle = const$, по-точно $L_s = \sqrt{a_s}$, където a_s е дължината на голямата полуос на s-тата планета, $s = 0,\ldots,8$.

Получаваме следната система с хамилтониан $\langle H\rangle^l$ относно ексцентричните променливи ξ_s и η_s:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\xi}_s = -\dfrac{\partial\langle H\rangle}{\partial\eta_s} \\[2ex] \dot{\eta}_s = \dfrac{\partial\langle H\rangle}{\partial\xi_s} \end{array}\right. \qquad , s = 0,\ldots,8.$$

Това е хомогенна система от 18 обикновени диференциални уравнения от първи ред с постоянни коефициенти. Нека я разпишем по-подробно:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\xi}_s = \displaystyle\sum_{j\neq s}\frac{\mathcal{G}m_sm_j}{L_sL_j}\Big[\frac{B_1(a_s,a_j)}{2}\frac{\eta_s}{L_s} - \frac{B_2(a_s,a_j)}{2}\frac{\eta_j}{\sqrt{L_sL_j}}\Big] \\ \dot{\eta}_s = -\displaystyle\sum_{j\neq s}\frac{\mathcal{G}m_sm_j}{L_sL_j}\Big[\frac{B_1(a_s,a_j)}{2}\frac{\xi_s}{L_s} - \frac{B_2(a_s,a_j)}{2}\frac{\xi_j}{\sqrt{L_sL_j}}\Big] \end{array}\right. \qquad , s = 0,\ldots,8.$$

Можем да запишем последната система във вида:

$$\left|\begin{array}{l} \dot{\xi} = Q.\eta \\ \dot{\eta} = -Q.\xi \end{array}\right. \tag{5}$$

където $\xi = (\xi_0, ..., \xi_8)$, $\eta = (\eta_0, ..., \eta_8)$, а Q е следната симетрична матрица :

$$Q_{sj} = Q_{js} = \frac{\mathcal{G}m_sm_j}{2L_sL_j\sqrt{L_sL_j}}B_2(a_s,a_j) \quad , j \neq s$$

$$Q_{ss} = \sum_{j\neq s}\frac{\mathcal{G}m_sm_j}{2L_j(L_s)^2}B_1(a_s,a_j) \ .$$

От линейната алгебра, знаем че съществува ортогонална матрица S, такава че

$$Q \ = \ Q^T = S.J.S^{-1} \ ,$$

където

$$J \;=\; \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_8 \end{pmatrix}.$$

Умножаваме двете уравнения на система (5) с S^{-1} отляво и получаваме

$$\left| \begin{array}{l} S^{-1}\dot{\xi} = J.S^{-1}\eta \\[2ex] S^{-1}\dot{\eta} = -J.S^{-1}\xi \end{array} \right. . \tag{6}$$

Покоординатно

$$\left| \begin{array}{l} (S^{\dot{-}1}\xi)_s = \alpha_s.(S^{-1}\eta)_s \\[2ex] (S^{\dot{-}1}\eta)_s = -\alpha_s.(S^{-1}\xi)_s \end{array} \right. \qquad , s = 0, \ldots, 8. \tag{7}$$

Знаем, че система от вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha y \\[2ex] \dot{y} = -\alpha x \end{array} \right.$$

има решение

$$\left| \begin{array}{l} x = C.\cos(\alpha t + \beta) \\[2ex] y = C.\sin(\alpha t + \beta) \end{array} \right. ,$$

където $x = x(t)$, $y = y(t)$, t е времето, а константите C и β се определят от началните условия. Следователно системата (7) има следното решение

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_s \cos(\theta_s + g_s) = \displaystyle\sum_{j=0}^{8} K_{sj} \cos(\alpha_j t + \beta_j) \\[2ex] \epsilon_s \sin(\theta_s + g_s) = \displaystyle\sum_{j=0}^{8} K_{sj} \sin(\alpha_j t + \beta_j) \end{array} \right. \qquad , s = 0, \ldots, 8, \tag{8}$$

където величините $\sqrt{L_s}$ сме включили в константите K_{sj}; K_{sj} и β_j се определят от началните условия, а $\alpha_0, ..., \alpha_8$ са собствените числа на матрицата Q.

От система (8), виждаме че елипсите, по които се движат планетите, променят - ексцентрицитета и положението на перихелия си квазипериодически, тъй като в решението имаме сбор на периодични функции. Например периодът на перихелия на Меркурий е 237 197 години.

За да бъде пълно решението трябва да се пресметнат константите K_{sj}, β_j и α_j, $j = 0, \ldots, 8$. Това е направил Стокуел през 1870г.

Забележка. Тъй като $K_{sj} \ll K_{s1}$, за $j > 1$, то можем да считаме, че

$$\left| \begin{array}{l} \epsilon_s \cos(\theta_s + g_s) \approx K_{s1} \cos(\alpha_1 t + \beta_1) \\ \\ \epsilon_s \sin(\theta_s + g_s) \approx K_{s1} \sin(\alpha_1 t + \beta_1) \end{array} \right. , \tag{9}$$

където $\alpha_1 = 5'', 463$, $\beta_1 = 88^o, 0', 38''$ и $K_{11} = +0, 1766$. Системата (9) е приблизително решение на система (7). Ексцентрицитетът на Меркурий се мени в границите от

$$0.1766 - 0.0268 - 0.0014 - 0.0015 - 0.0000 - 0.0005 - 0.0244 + 0.0009 = 0.1214$$

до

$$0.1766 + 0.0268 + 0.0014 + 0.0015 + 0.0000 + 0.0005 + 0.0244 - 0.0009 = 0.2317 .$$

Ще изключим Слънцето и ще съставим таблица, която съдържа стойности на посъществените константи, участващи в точното решение (8) на система (7).

	$j = 2$ $s = 2$	$j = 3$ $s = 3$	$j = 4$ $s = 4$	$j = 5$ $s = 5$	$j = 6$ $s = 6$	$j = 7$ $s = 7$	$j = 8$ $s = 8$
α_j	$7'', 248$	$17'', 014$	$17'', 748$	$0'', 616$	$2'', 727$	$3'', 716$	$22'', 460$
β_j	$20^o50'19''$	$335^o11'31''$	$137^o06'36''$	$67^o56'$	$105^o03'53''$	$28^o08'46''$	$307^o56'50''$
K_{s1}	$+0, 0268$	$+0, 0014$	$+0, 0015$	$+0, 0000$	$+0.0005$	$+0, 0244$	$-0, 00009$

Йонка Иванова, yonni_ivanova@abv.bg